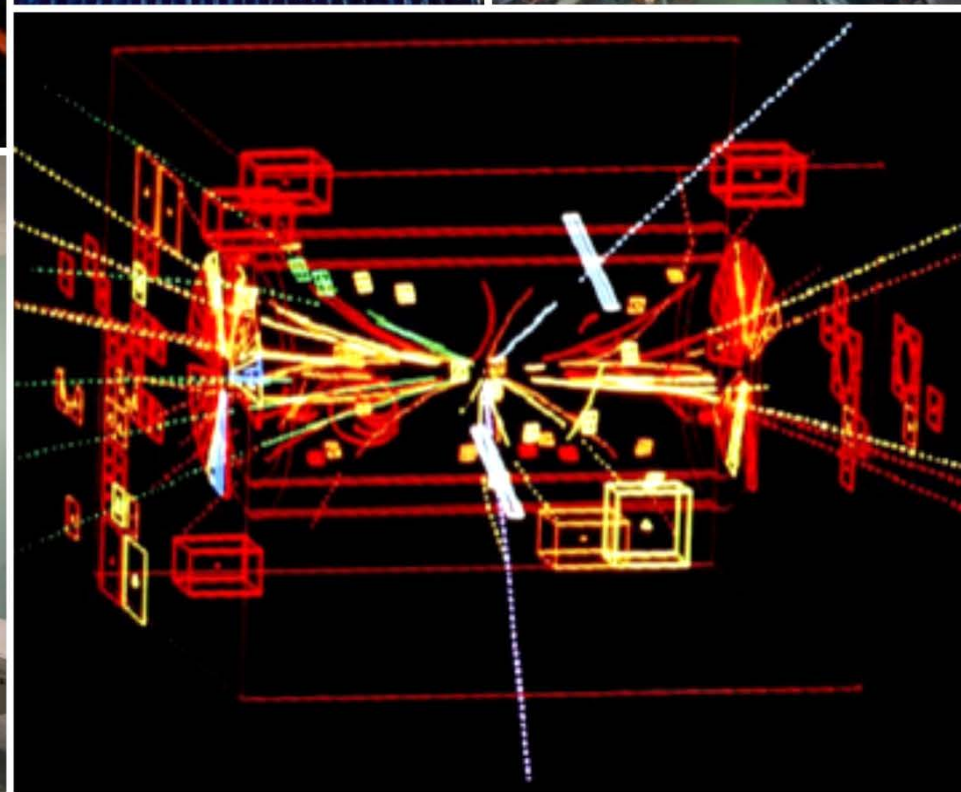
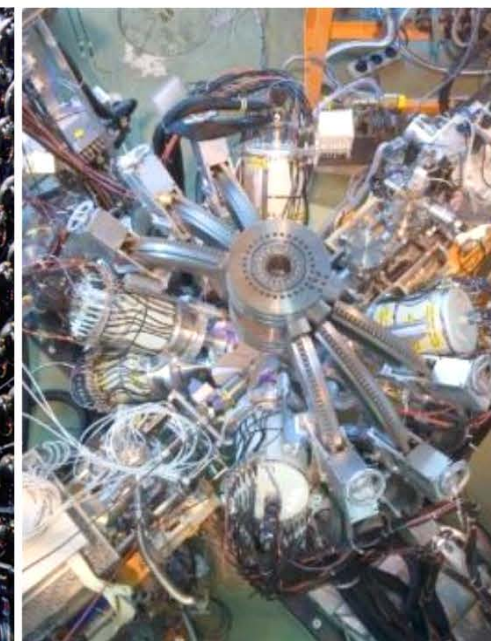
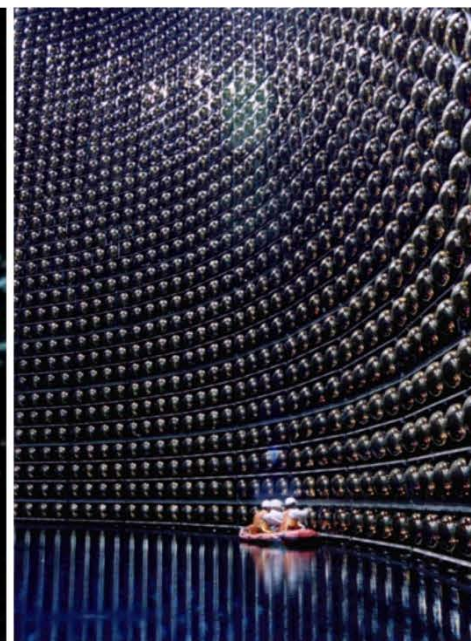
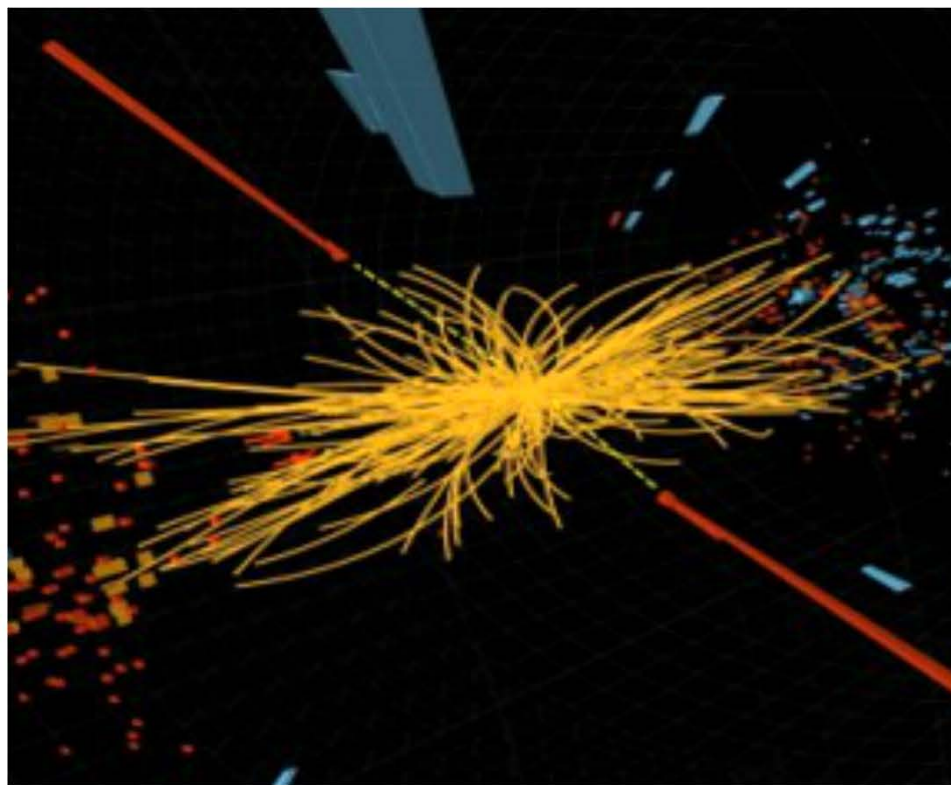


FÍSICA NUCLEAR I DE PARTÍCULES

Fernando Martínez Vidal
Emilio Higón Rodríguez

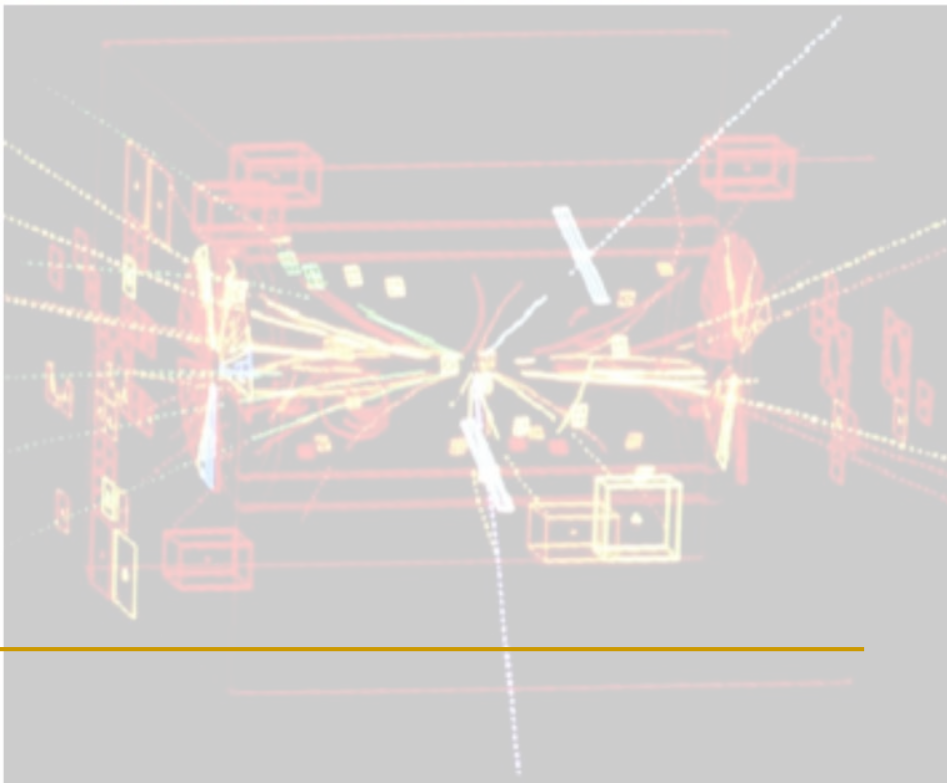
Departament de Física Atòmica, Molecular i Nuclear

VNIVERSITAT
DE VALÈNCIA 



PROGRAMA

1. Introducció a la física nuclear i de partícules
2. Radiacions, interacció amb matèria i aplicacions
3. Sistemes experimentals: detectors i acceleradors
4. Partícules i simetries
5. Les interaccions fonamentals
6. Propietats i models nuclears
7. Desintegració nuclear
8. La fissió i la fusió nuclears



BIBLIOGRAFIA

Bàsiques

- W.S.C. Williams, Nuclear and Particle Physics, Oxford University Press, 1991.
- A. Das and T. Ferbel, Introduction to Nuclear and Particle Physics, World Scientific, 2003 (2nd Ed.).
- A. Ferrer, Física Nuclear y de Partículas, Univ. de Valencia, 2015 (3a ed.).
- A. Bettini, Elementary Particle Physics, Cambridge University Press, 2014 (2a ed.) & 2008 (1a ed.).

Complementàries

- W.E. Burcham and M. Jobes, Nuclear and Particle Physics, Longman, 1995.
- D. Griffiths, Introduction to Elementary Particles, Wiley, 1987.
- F. Halzen and A.D. Martin, Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics, Wiley, 1984.
- M. Thomson, Modern Particle Physics, Cambridge University Press, 2013 (reprinted 2017).
- K.S. Krane, Introductory Nuclear Physics, John Wiley & Sons Inc., 1988.
- G.C. Lowenthal and P.L. Airey, Practical Applications of Radioactivity and Nuclear Radiations, Cambridge, 2001.
- J. Lilley, Nuclear Physics. Principles and Applications, John Wiley & Sons 2007.
- A. Galindo & P. Pascual, Mecánica Cuántica, Eudema Universidad, 1989.
- J.D. Jackson, Classical electrodynamics, Wiley, 1999.

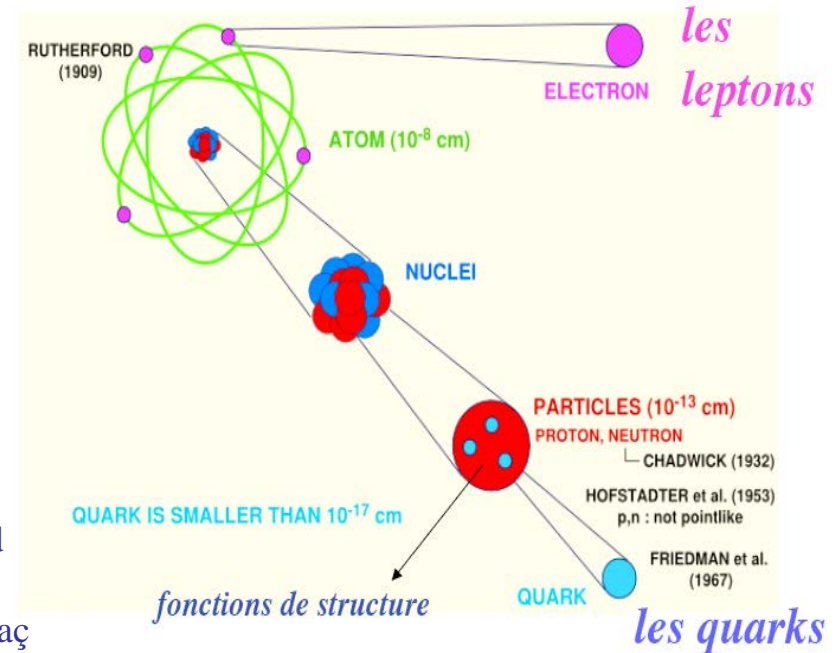
Exercicis

- A. Bromberg, A. Das and T. Ferbel, Introduction to Nuclear and Particle Physics, Solutions Manual, World Scientific, 2006.
- Y. Lim (editor), Problems and solutions on Atomic, Nuclear and Particle Physics, World Scientific, 2007.
- N. Newbury et al., Princeton problems in Physics with solutions, Princeton U. Press, 1991.
- R. Gautreau and W. Savin, Modern Physics, McGraw-Hill, 1999.
- M. Shaw; A. Willart, Física Nuclear: problemas resueltos, Alizanza Universidad, 2002.
- A. Ferrer; E. Ros, Problemas resueltos de Física de Partículas, Univ. de València, 2007.

Tema 1:

Introducció a la física nuclear i de partícules

1. Objectius, limitacions i mètodes
 - 1.1 Mètodes en física nuclear
 - 1.2 Terminologia en física nuclear
 - 1.3 Física de partícules
 - 1.4 Ordre de distàncies
 - 1.5 Les fronteres de la física
 - 1.6 Constituents i interaccions de la matèria
 - 1.7 Història de l'Univers
 - 1.8 Mètodes i experiments en física de partícules
2. Secció eficaç de dispersió: estudi d'estructures i interaccions
 - 2.1 Secció eficaç total i secció eficaç diferencial
 - 2.2 Exemples: esfera rígida, dispersió de Rutherford
 - 2.3 Concepte de secció eficaç diferencial en MQ
 - 2.4 Relació entre amplitud de dispersió i secció eficaç
 - 2.5 Determinació de l'amplitud de dispersió
 - 2.6 Secció eficaç per a potencials amb simetria esfèrica: esfera rígida i dispersió de Rutherford
 - 2.7 Nuclis no puntuals: concepte de factor de forma
3. Unitats, dimensions i constants



1. Objectius, limitacions i mètodes

Física nuclear

- Estudia els nuclis atòmics, les seues propietats i les forces que actuen entre els seus constituents, denominats genèricament nucleons (protons i neutrons).
- Estretament relacionada amb l'origen i desenvolupament de la mecànica quàntica, avui un dels fonaments bàsics de la ciència (no sols la física).
- Avui es té un bon coneixement de les propietats dels nuclis i de la seua estructura.
- Però falta una formulació teòrica coherent que permeta explicar i interpretar tots els fenòmens d'una manera fonamental (a partir de principis primers: a causa del tractament matemàtic del problema de molts cossos i a la complexitat de la força forta nuclear).
- A causa d'això s'ha d'abordar l'estudi de la física nuclear d'una forma fenomenològica, utilitzant diferents formulacions (mecanoquàntiques, semiclàssiques, empíriques, etc.) i models (que a primera vista poden resultar incompatibles) per a cada tipus de fenòmens: desintegració alfa, desintegració beta, reaccions directes, fissió, etc.
- Multitud d'implicacions en altres disciplines científiques (astrofísica nuclear, astropartícules, física de l'estat sòlid, nanotecnologia, computació quàntica, etc.) així com aplicacions tècniques (diagnòstic en medicina i tractament de malalties, producció d'energia, etc.).
- A més, ha contribuït a nombrosos avanços tecnològics atès que és una de les disciplines científiques que més recursos tècnics ha requerit per al seu avanç.

Mètodes en física nuclear

- Els procediments experimentals utilitzats per a l'estudi de la gravitació i l'electromagnetisme clàssics no són vàlids.
 - Els sistemes nuclears (sistemes constituïts per nucleons) no són objectes macroscòpics.
 - La informació experimental procedeix de tres fonts o tipus d'experiments:
 - Difusió (o col·lisió), en què un objecte subatòmic es fa col·lidir amb un altre:
 - Estats finals, seccions eficaces, angles de difusió, etc.
 - Desintegració, en què una partícula subatòmica es desintegra.
 - Desintegració espontània o induïda.
 - Productes de la desintegració, probabilitats de desintegració (vides mitjanes), etc.
 - Estats lligats, en què dues o més partícules subatòmiques formen un sistema compost.
 - La finalitat d'aquests estudis és determinar **la dinàmica (lleis d'interacció)** a partir d'aquesta informació, tasca que no és trivial. Així:
 - Hem de suposar la forma de la interacció i comparar les prediccions teòriques amb les observacions experimentals.
 - Problema de molts cossos (és una dificultat afegida).
 - Mecànica quàntica, generalment no relativista, però de vegades relativista.
 - Molt complex, irresoluble per a sistemes amb molts nucleons.
- La descripció requereix models fenomenològics d'estructura nuclear.
- Naturalesa exacta de les forces nuclears desconeguda, encara que qualitativament avui sabem que es tracta de forces gluòniques residuals (tipus Van der Waals).

Terminologia en Física Nuclear

- El nucli ve caracteritzat per::

→ Defineix l'ordre en la taula periòdica: nombre atòmic

$${}_{26}^{56}\text{Fe}_{30} \quad {}_Z^AX_N \quad \begin{cases} Z: \text{Nombre de protons} \\ N: \text{Nombre de neutrons} \\ A: \text{Nombre de nucleons} \end{cases}$$

$$A = Z + N$$

- Isòtops:** Nuclis amb el mateix valor de Z

$${}_{92}^{235}\text{U}_{143} (0.720\%, 7.0 \times 10^8 \text{ a})$$

$${}_{92}^{238}\text{U}_{146} (99.275\%, 4.5 \times 10^9 \text{ a})$$

- Isòtons:** Nuclis amb el mateix valor de N

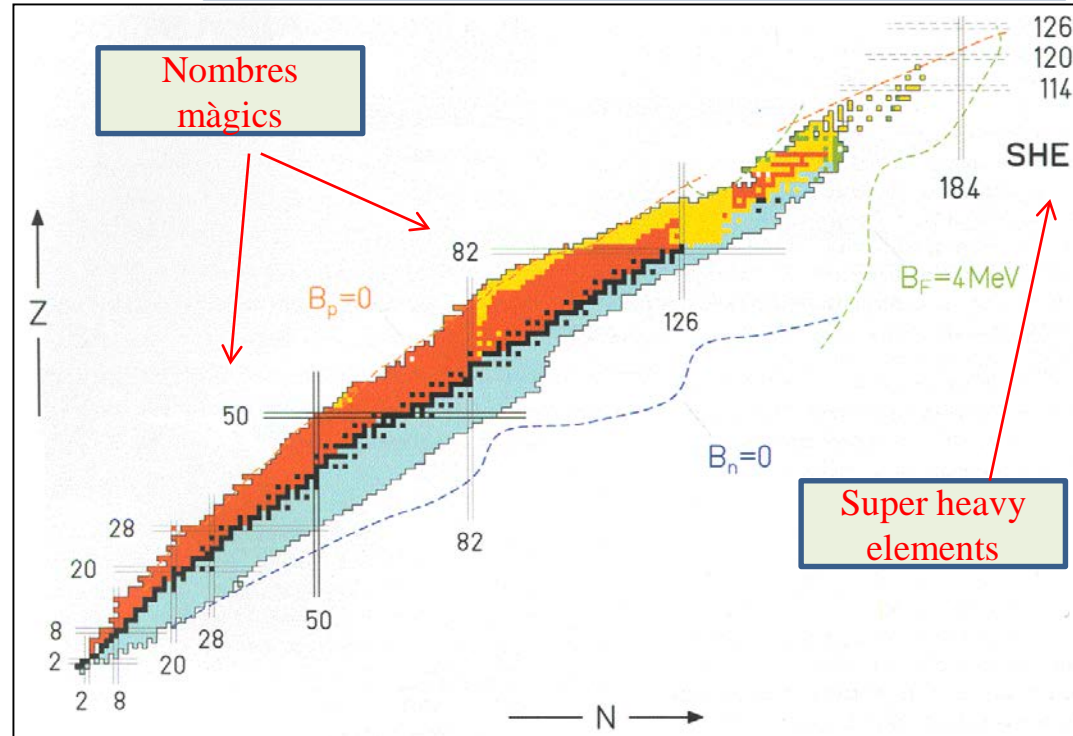
$${}_1^2\text{H}_1, {}_2^3\text{He}_1$$

- Isòbars:** Nuclis amb el mateix valor de A

$${}_1^3\text{H}_2, {}_2^3\text{He}_1$$

- Estats isòmers o metaestables:**
Estats excitats d'un nucli amb vida mitjana llarga ($\tau > 1 \text{ s}$)

$${}_{43}^{99m}\text{Tc}_{56} (6.02 \text{ h})$$



Conceptes:

Nuclis estables.

Nuclis radioactius.

Nombres màgics.

Illa de l'estabilitat.

Elements superpesats.

Física de partícules: objectius

- Estudia els **constituents bàsics** de la matèria i les propietats i naturalesa de les **forces fonamentals** que intervenen en les seues interaccions: quantes forces hi ha, com es comporten i quants paràmetres són necessaris per a la seua descripció.
 - Descripció en termes del **menor nombre possible de partícules i forces fonamentals**.
 - A una certa escala de longituds (o energies) podem descriure la matèria en termes de constituents que poden ser considerats com a fonamentals, ara bé ...

...a distàncies més curtes aquests constituents poden deixar de ser fonamentals i passar a tenir estructura interna.

- Evolució del concepte de “fonamental”:**

Segle XIX: àtoms

1930s: electrons, protons, neutrons

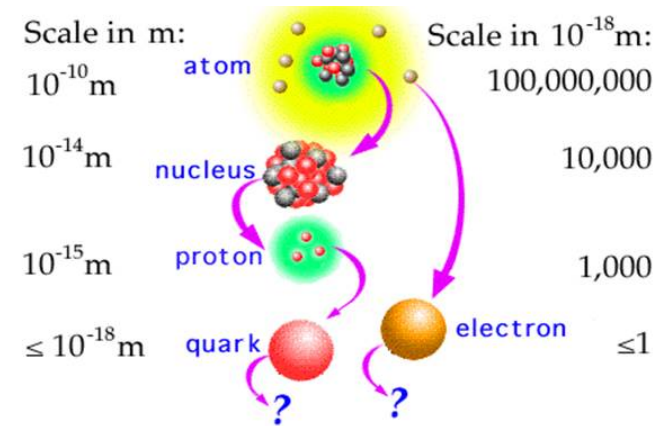
1970s: quarks i leptons

2012-: Higgs, ...

- També **denominada física d'altres energies**, per dues raons:

- Hi ha partícules fonamentals, com el bosó Z, el bosó de Higgs i el quark top, la massa dels quals és unes 100, 125 i 175 vegades la massa del protó. Per tant, per a produir aquestes partícules es requereixen altes energies ($E = mc^2$), en centre de masses!
- Per a explorar l'«infinitament» petit, cal disposar de projectils d'alta energia (dualitat ona-corpúscle $\lambda = h/p$, $h = 6,626076 \times 10^{-34}$ Js. La λ ha de ser de l'ordre o menor que el que es vol observar.)

Nota: $\hbar c = 197,3 \begin{cases} \text{MeV fm} \\ \text{eV nm} \end{cases}$ $\lambda = \frac{h}{p} = 2\pi \frac{\hbar c}{pc} \cong 1,24 \frac{\text{GeV fm}}{pc}$; $pc \rightarrow E$; per $E \uparrow$. $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$



Ordre de distàncies en física nuclear i de partícules

- Per a veure un objecte xicotet necessitem longituds d'ona de l'ordre de la seua grandària:

→ Relació de De Broglie $\lambda = h/p$

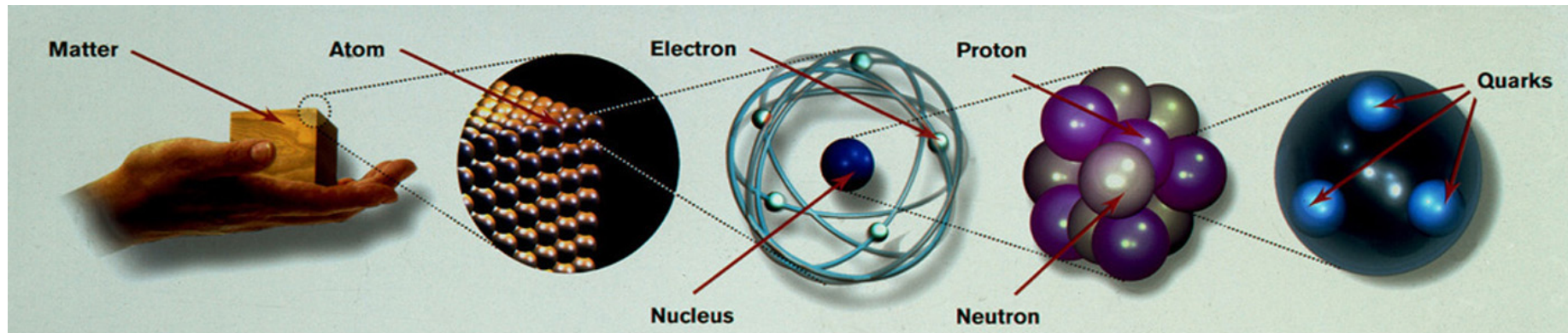
$h = \text{constant de Planck} = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J s} = 4.14 \times 10^{-24} \text{ GeV s}$

$p = \text{moment de l'objecte.}$

Quin és el moment '**necessari**' per a 'veure' un nucli? Considerem un nucli de grandària $10 \text{ fm} = 10^{-14} \text{ m}$

$$pc = \frac{2\pi \hbar c}{\lambda} = 2\pi \frac{197,3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{\lambda} = \frac{1,24}{\lambda} \text{ GeV} \cdot \text{fm} \rightarrow p \geq 0.12 \text{ GeV}/c$$

Matèria $\sim 10^{-9} \text{ m}$ Àtom $\sim 10^{-10} \text{ m}$ Nucli $\sim 10^{-14} \text{ m}$ Nucleó $< 10^{-15} \text{ m}$




$p = h / \lambda$	→	$\sim \text{keV}/c$	$\sim 10 \text{ keV}/c$	$\sim 100 \text{ MeV}/c$	$> 1 \text{ GeV}/c$
		FÍSICA	FÍSICA	FÍSICA	FÍSICA
		MATERIALS	ATÒMICA	NUCLEAR	PARTÍCULES

Energies de lligadura dels electrons en l'àtom: 10 eV - 100 keV

Energies de lligadura dels nucleons en el nucli: 1 MeV – 10 MeV

L'Univers que es coneix

 la física nuclear i la física de partícules estudien la matèria a distàncies molt curtes

L'astrofísica estudia la matèria a grans distàncies 



10⁻¹⁹ m 10⁻¹⁵ 10⁻¹² 10⁻⁹ 10⁻⁶ 10⁻³ 10⁰ 10³ 10⁶ 10⁹ 10¹² 10¹⁵ 10¹⁸ 10²¹ 10²⁴ m

Camps de visió

Microscopis

Binoculars

Telescopis òptics,
radiotelescopis

Acceleradors
i detectors
de partícules

L'ull

$$p = h / \lambda$$

LES DUES FRONTERES DE LA FÍSICA:
El més gran i el més menut

Per a estudiar la naturalesa a petites distàncies hem d'utilitzar molta energia:
“física de partícules” ≡ “física d'altres energies”

Mètodes en física de partícules

- Sotmetre la matèria a temperatures i densitats extremes. El límit actual:
 - $E \sim 10 \text{ TeV} (10^{13} \text{ eV}), \lambda \sim 10^{-19} \text{ m}$
 - $T \sim 12 \times 10^{16} \text{ K} (E = kT)$ \longrightarrow
 - Densitat $\sim 1000 \times$ densitat nuclear

Paràmetres relacionats

Són experiments que es relacionen amb l'evolució de l'Univers fent col·lidir nuclis pesants mitjançant ions, p+p, etc.
- Accelerar partícules subatòmiques a altes velocitats i fer-les col·lidir frontalment.
- Estudiar els productes que emergeixen de la col·lisió:
 - Producció de noves partícules (L'energia en centre de masses és l'energia “útil”).
 - Estudiar la seua estructura interna i les seues interaccions fonamentals a través d'observacions ‘indirectes’ que significa mesurar:
 - Angles de difusió, seccions eficaces, etc.
 - Desintegracions i els seus paràmetres
 - Estats lligats i les seues propietats
- Conjecturar la forma de la interacció i comparar les prediccions teòriques amb les observacions \Rightarrow mètodes i tècniques tots semblants als de la física nuclear.
- Dues estratègies (estratègia de descobriments):
 - Més i més energia (experiments a la frontera d'energia)
 - \rightarrow Produir objectes de major massa: $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$

Col·lisionadors de descobriment (p+p) i col·lisionadors de precisió (e+e)

Resoldre l'estructura a distàncies més xicotetes: $\lambda = h / p$

 - Mirar amb detall (estratègia en la frontera de precisió: experiments amb partícules fonamentals, com els electrons)
 - \rightarrow Producció neta (lliure de fons) i en abundància (a menor energia de la frontera).

- La formulació de les 'conjectures' (mitjançant models) està basada en primers principis:

- ❑ **Mecànica quàntica**
- ❑ **Relativitat especial**
- ❑ **Principis de simetria**

Ràpid

Mecànica clàssica	Mecànica quàntica
Relativitat	Teoria quàntica de camps

Menut

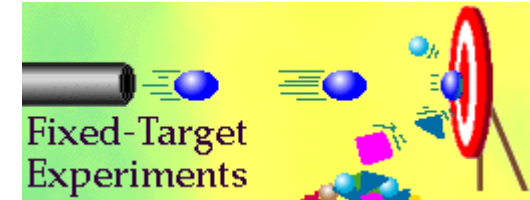
- \Rightarrow MODEL ESTÀNDARD (ME):

- ❑ Descriu com les excitacions de baixa energia, açò és, les partícules, interaccionen entre elles a través de les tres forces (electromagnètica, dèbil i forta).
- ❑ Basada en la simetria 'gauge' o 'local' de tipus $[SU(2) \times U(1)]_{\text{Electrodèbil}} \times SU(3)_{\text{Color}}$
- ❑ Interpretació extremadament precisa de totes les observacions experimentals.
- ❑ Situació molt millor que en la física nuclear (la seua construcció és formalment coherent).
- ❑ Queden moltes preguntes sense resposta, i per tant la descripció no és encara completa, però qualsevol nova teoria ha d'incloure el ME:
 - Per què hi ha 3 famílies de quarks i leptons? Hi ha algun patró per a les seues masses? Què passa amb la massa dels neutrinos? Són els quarks realment fonamentals o també tenen estructura? Què determina els valors dels 19 paràmetres lliures del ME?...
- Com en el cas de la física nuclear, el seu desenvolupament ha necessitat i ha contribuït a molts avanços tecnològics (frontera tecnològica), en particular, els acceleradors i detectors de partícules, inicialment concebuts per a l'estudi de les propietats nuclears.
- El seu desenvolupament ha estat sembrat de grans descobriments (experimentals i teòrics), i representa sens dubte un dels majors èxits intel·lectuals i tecnològics del segle XX.

Com realitzar un experiment en física de partícules?

- Cal obtenir les partícules subatòmiques inicials (protons, antiprotons, electrons,...)
- Accelerar-les en un buit
- Fer-les col·lidir → Blanc fix i col·lisionadors

En els col·lisionadors hi ha un guany d'energia en CM comparat amb els experiments de blanc fix.



$$E_{cm} = 2E \sim 200 \text{ GeV per } E \sim 100 \text{ GeV} \quad E_{cm} = \sqrt{2Emc^2} \sim 14 \text{ GeV per } E \sim 100 \text{ GeV}$$

- Observar i registrar el que ocorre després de la col·lisió:
- Analitzar i interpretar les dades:
- Per a això es necessita:
 - ❑ Font de partícules i sistema accelerador
 - ❑ Sistemes de detecció
 - ❑ 'Trigger' (per a decidir què és el que es registrarà) i sistema d'emmagatzemament
 - ❑ Molt treball, paciència i mà d'obra especialitzada (físics, enginyers, etc.) per a:
 - Dissenyar, construir, testear i operar el sistema accelerador.
 - Dissenyar, construir, testear, calibrar, operar i comprendre el detector.
 - Prendre i analitzar les dades.
 - ❑ I diners...

$$m = 1 \text{ GeV}/c^2$$

Grans col·laboracions internacionals,
en molts casos a escala mundial

Esquema general dels constituents i interaccions de la matèria

		Constituents	Quantum del camp	Interacció
Física Atòmica	Àtom	e^- , <i>nucli</i>	γ	Electromagnètica (QED)
Física Nuclear	Nucli	p , n	π (<i>OPEP: one pion exchange potential</i>)	Nuclear (Yukawa: Intercanvi de mesons “virtuals”)
Física de Partícules	Quarks	Barions (qqq) Mesons ($q\bar{q}$)	Gluons	Forta (QCD)
	Leptons	(l , ν)	γ , Z , W^\pm Higgs (associat a la generació de massa)	Electrofeble

L'aventura de les partícules: <http://particleadventure.org/particleadventure/spanish/>

Esquema general dels constituents i interaccions de la matèria

Constituents: paral·lelisme de tres famílies de fermions

Quatre interaccions bàsiques amb els bosons d'intercanvi

FERMIONS			matter constituents spin = 1/2, 3/2, 5/2, ...		
Leptons spin = 1/2			Quarks spin = 1/2		
Flavor	Mass GeV/c ²	Electric charge	Flavor	Approx. Mass GeV/c ²	Electric charge
ν_L lightest neutrino*	$(0-2) \times 10^{-9}$	0	u up	0.002	2/3
e electron	0.000511	-1	d down	0.005	-1/3
ν_M middle neutrino*	$(0.009-2) \times 10^{-9}$	0	c charm	1.3	2/3
μ muon	0.106	-1	s strange	0.1	-1/3
ν_H heaviest neutrino*	$(0.05-2) \times 10^{-9}$	0	t top	173	2/3
τ tau	1.777	-1	b bottom	4.2	-1/3

+ antipartícules

BOSONS			force carriers spin = 0, 1, 2, ...		
Unified Electroweak spin = 1			Strong (color) spin = 1		
Name	Mass GeV/c ²	Electric charge	Name	Mass GeV/c ²	Electric charge
γ photon	0	0	g gluon	0	0
W⁻	80.39	-1	Higgs Boson spin = 0		
W⁺	80.39	+1	Name	Mass GeV/c ²	Electric charge
Z⁰ Z boson	91.188	0	H Higgs	126	0

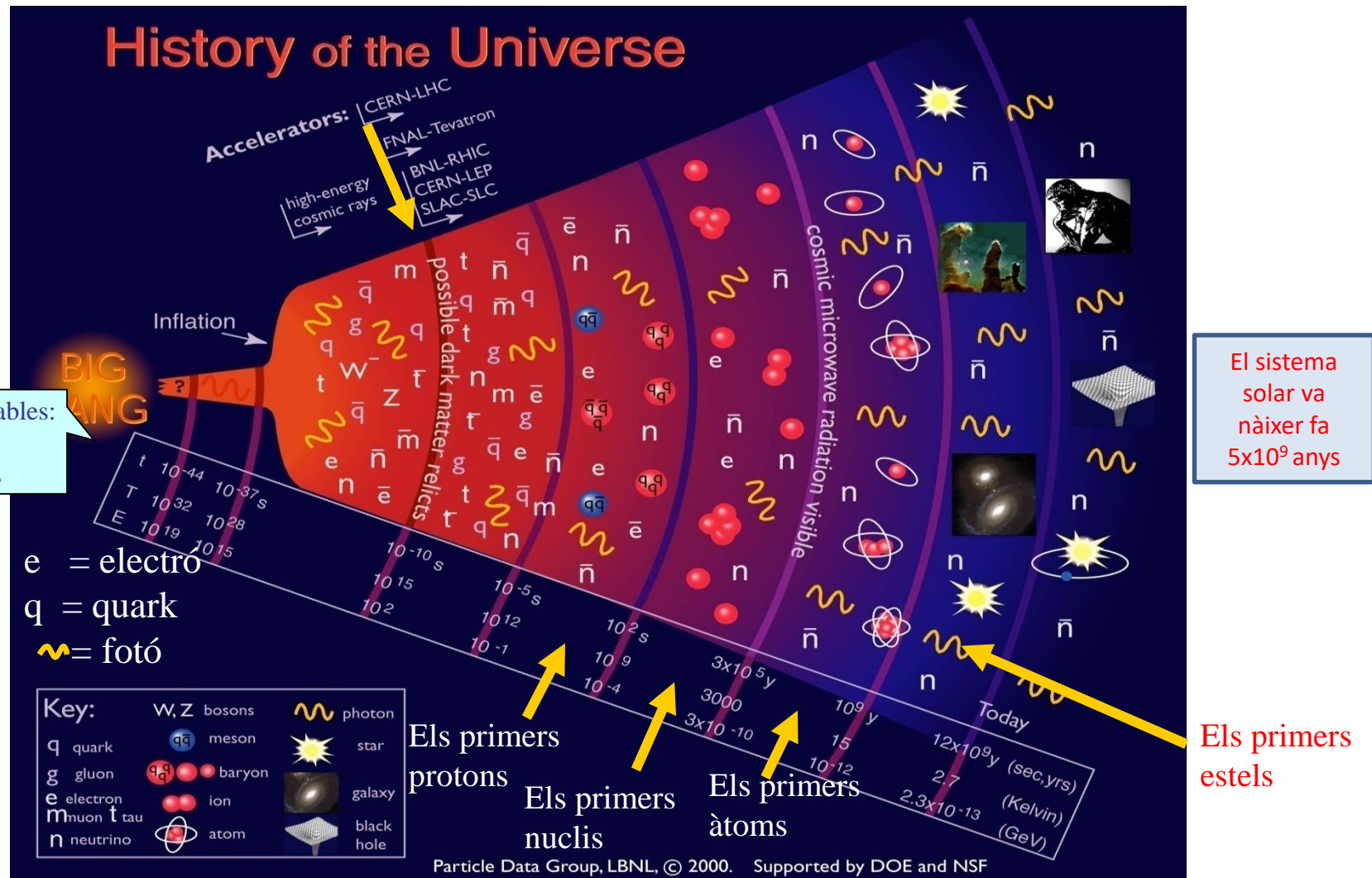
+ gravitó, intermediari de la gravitatòria

Properties of the Interactions

The strengths of the interactions (forces) are shown relative to the strength of the electromagnetic force for two u quarks separated by the specified distances.

Property	Gravitational Interaction	Weak Interaction (Electroweak)	Electromagnetic Interaction	Strong Interaction
Acts on:	Mass – Energy	Flavor	Electric Charge	Color Charge
Particles experiencing:	All	Quarks, Leptons	Electrically Charged	Quarks, Gluons
Particles mediating:	Graviton (not yet observed)	W⁺ W⁻ Z⁰	γ	Gluons
Strength at {	10 ⁻⁴¹	0.8	1	25
{	10 ⁻⁴¹	10 ⁻⁴	1	60

La física nuclear i de partícules està estretament relacionada amb els processos que van ocórrer en l'evolució de l'Univers des del Big-Bang inicial, fa $13,7 \times 10^9$ anys:



Conceptes: Desacoblament de la radiació amb els quarks → formació de protons i neutrons.
Desacoblament de la radiació γ amb els electrons → Univers visible i radiació romanent.

Unsolved Mysteries

Driven by new puzzles in our understanding of the physical world, particle physicists are following paths to new wonders and startling discoveries. Experiments may even find extra dimensions of space, microscopic black holes, and/or evidence of string theory.

Why is the Universe Accelerating?



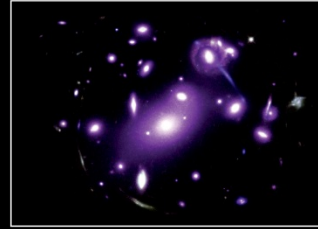
The expansion of the universe appears to be accelerating. Is this due to Einstein's Cosmological Constant? If not, will experiments reveal a new force of nature or even extra (hidden) dimensions of space?

Why No Antimatter?



Matter and antimatter were created in the Big Bang. Why do we now see only matter except for the tiny amounts of antimatter that we make in the lab and observe in cosmic rays?

What is Dark Matter?

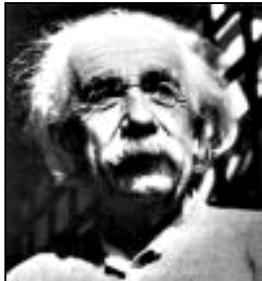


Invisible forms of matter make up much of the mass observed in galaxies and clusters of galaxies. Does this dark matter consist of new types of particles that interact very weakly with ordinary matter?

Are there Extra Dimensions?



An indication for extra dimensions may be the extreme weakness of gravity compared with the other three fundamental forces (gravity is so weak that a small magnet can pick up a paper clip overwhelming Earth's gravity).



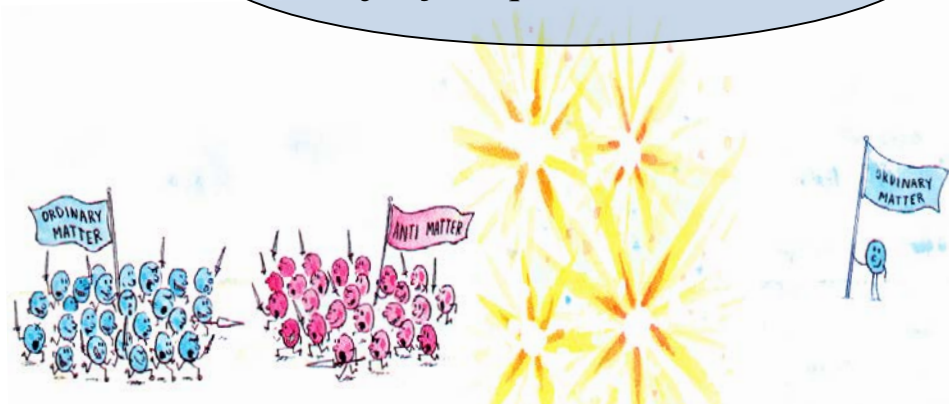
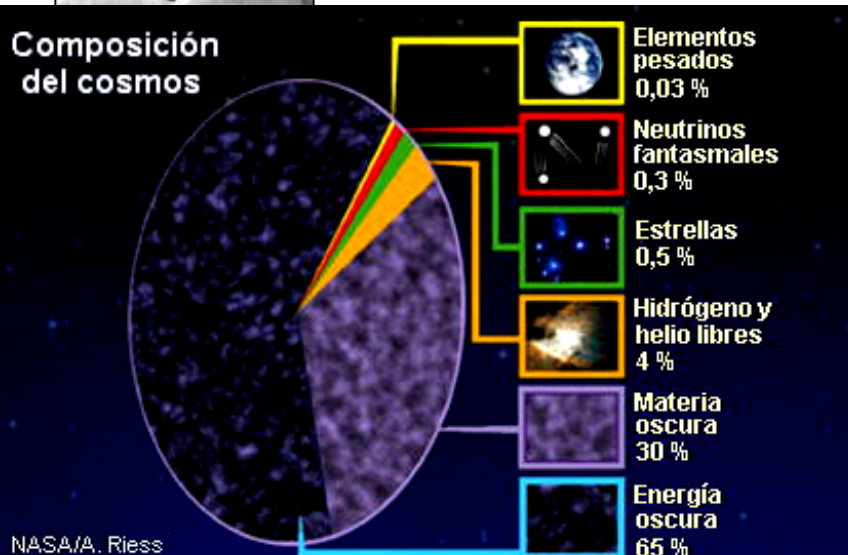
Hi ha quelcom que accelera l'expansió de l'Univers: **l'energia fosca**

La constant cosmològica?

Higgs descobert en 2012 al LHC del CERN

Big-Bang \Rightarrow Matèria \gg Antimatèria?
Mitjançant quins mecanismes?

Composició del cosmos



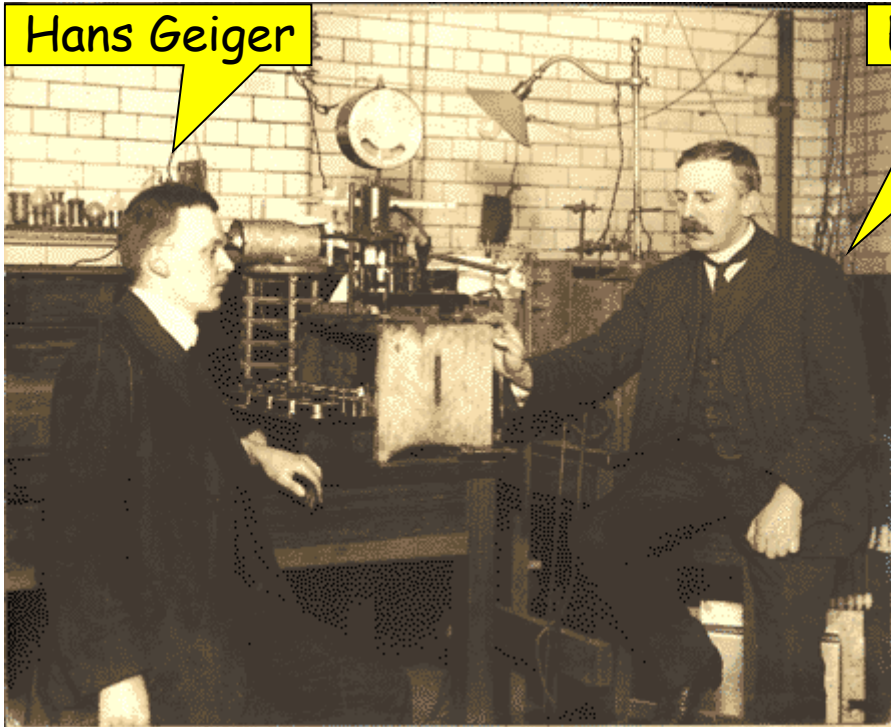
Per cada 10^9 partícules de matèria ordinària que es varen aniquilar amb les de antimatèria en l'Univers primigeni, va quedar una partícula de matèria.

Algunes pàgines web d'interès en física nuclear i de partícules

- <http://www.cern.ch/> (CERN, European Laboratory for Particle Physics)
- <http://www.d0.fnal.gov/> (Fermilab)
- <http://www.slac.stanford.edu/> (SLAC, Stanford Linear Accelerator Center)
- <http://ParticleAdventure.org/> (LBNL particle adventure)
- <http://sg1.hep.fsu.edu/~wahl/Quarknet/index.htm> (has links to many particle physics sites)
- <http://www.fnal.gov/pub/tour.html> (Fermilab particle physics tour)
- <http://www.nndc.bnl.gov/> (Brookhaven Nuclear Data Base)
- <http://isotopes.lbl.gov/toi.html> (LBNL Nuclear Data Dissemination)
- <http://pdg.lbl.gov/> (LBNL Particle Data Group)
- <http://www.laradioactivite.com/> (Divulgació sobre conceptes i aplicacions de la Física Nuclear)

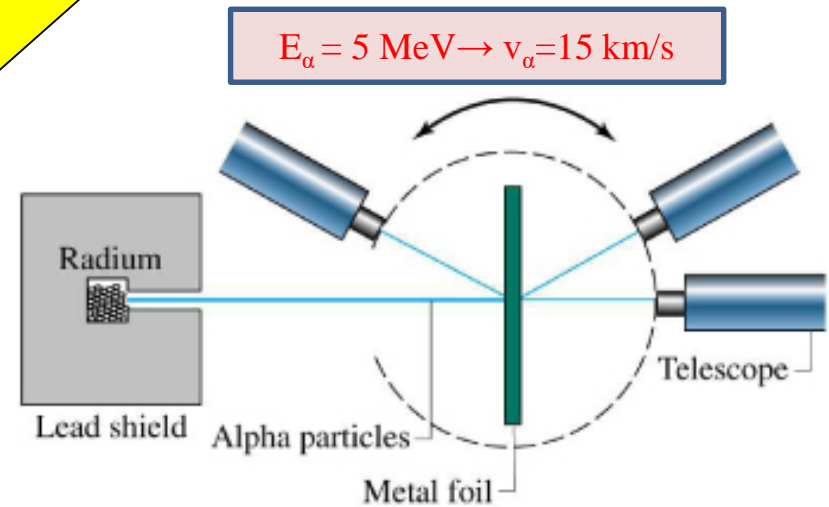
2. Secció eficaç de dispersió: estudi d'estructures i interaccions

Exemple: la dispersió de Rutherford



Hans Geiger

Ernest Rutherford



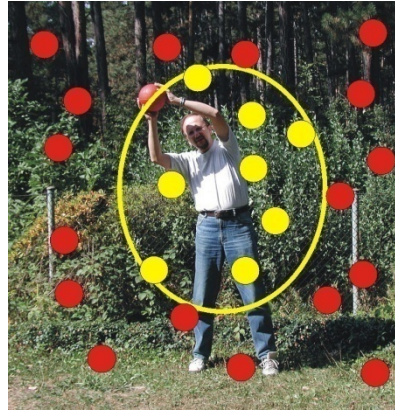
El model de Thompson previ al de Rutherford (“púding de panses”)

Amb un flux constant de partícules alfa, observant $d^2N(\theta)/d\theta d\theta$ (el nombre de partícules dispersades en $d\theta$ per unitat de temps) Rutherford va concloure **l'existència del nucli** on es concentrava tota la càrrega positiva i pràcticament tota la massa de l'àtom.

La grandària del nucli és molt més petita (10^{-14} m) que la grandària de l'àtom (10^{-10} m).

Secció eficaç TOTAL “ σ ”: àrea efectiva

Símil del concepte de secció eficaç: Si em llancen pilotes distribuïdes uniformement a l'espai, i amb la mateixa velocitat, quina és la meua “habilitat” d'aturar-les / desviar-les?



La meua “habilitat” es caracteritza per una àrea efectiva que anomenarem **secció eficaç total**

$$\sigma \approx 2 \text{ m}^2$$



El nombre de pilotes que NO continuaran rectes (aturaré o desviaré) per unitat de temps serà on ϕ és el flux de pilotes (nombre de pilotes que em tiren per unitat d'àrea i temps).

$$N = \sigma \phi$$

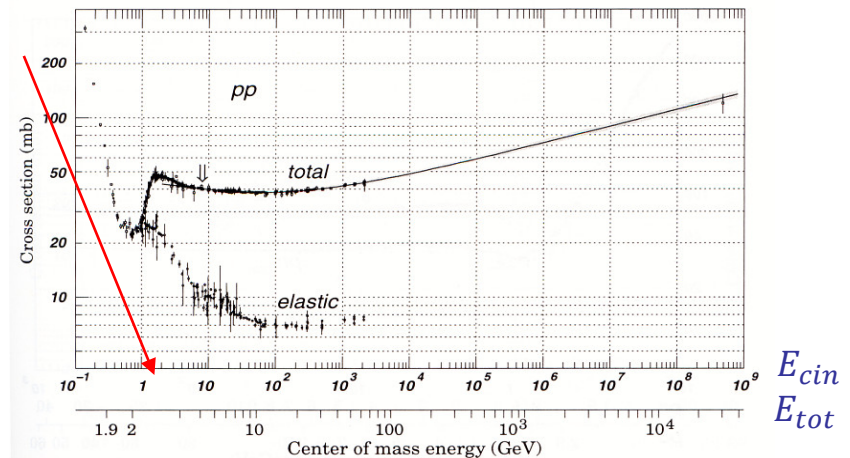
Però σ depèn del tipus i de la velocitat de les pilotes, per exemple:

Seccions eficaces pp



En aquest punt energètic els protons tenen prou energia per a **crear una nova partícula**: el pió. És aquest un exemple de procés que contribueix a la secció **inelàstica**:

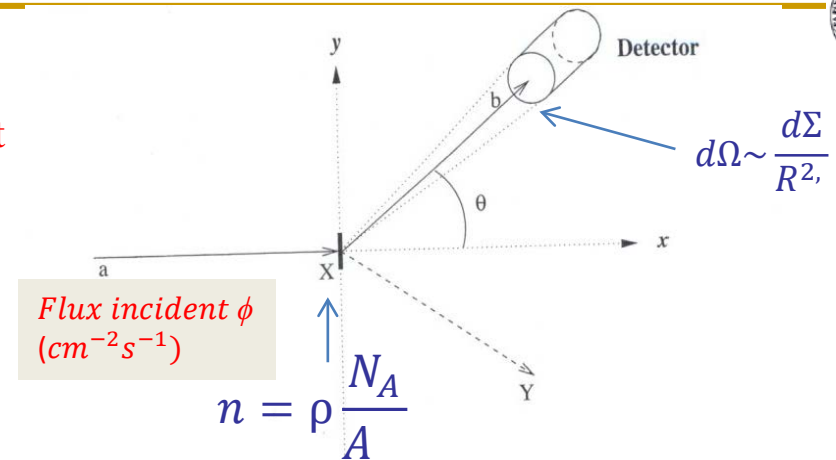
$$\sigma_{\text{inelas}} = \sigma_{\text{total}} - \sigma_{\text{elastic}}$$



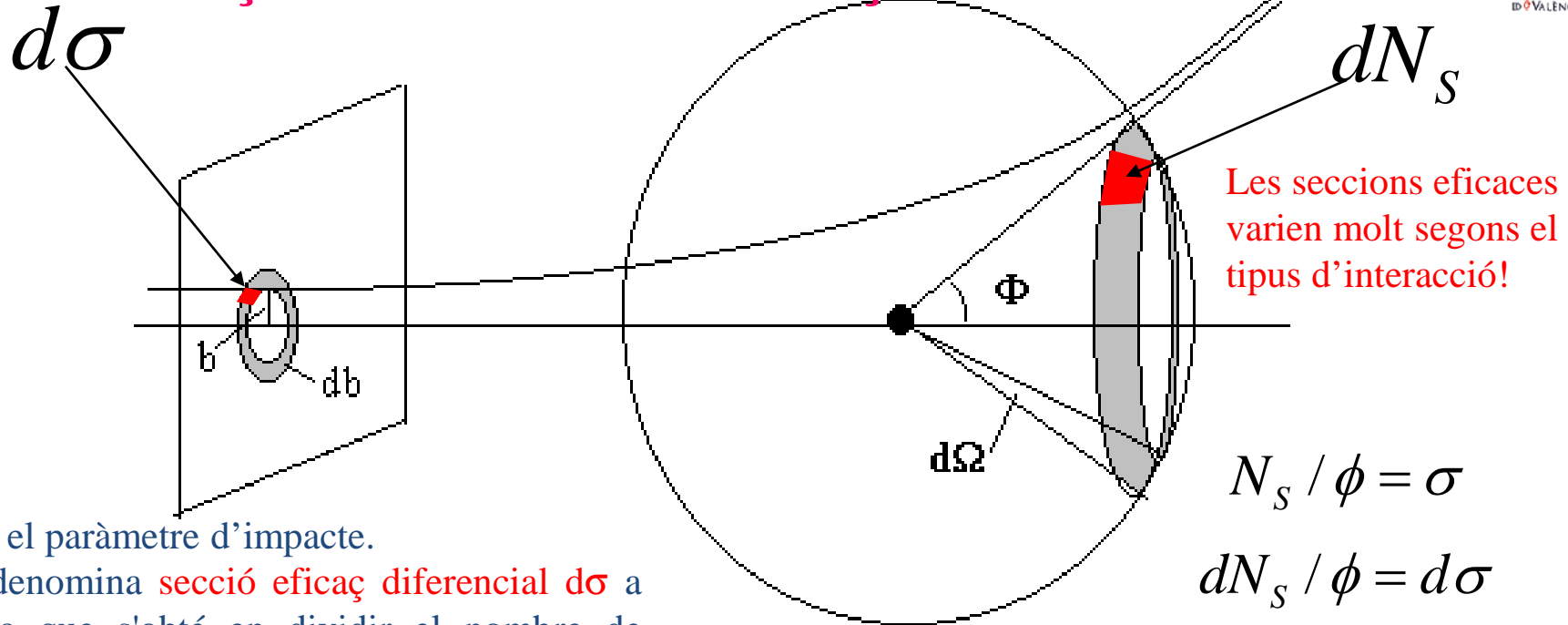
Estudiant la dependència de σ en funció de l'energia podem inferir propietats del blanc i de la interacció.

Concepte de secció eficaç

- La secció eficaç es relaciona amb la probabilitat d'interacció d'una partícula amb un blanc.
Una situació habitual és la de la figura:
- Incideix sobre el blanc un flux de partícules ϕ donat en (partícules per $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$)
- La densitat del nombre de blancs per unitat de volum serà n (blancs cm^{-3}) que podem calcular com a $n = \rho \frac{N_A}{A}$, on N_A es el nombre d'Avogadro i A es el pes atòmic del blanc.
- L'angle sòlid que subtendeix el detector (allunyat del blanc) és: $d\Omega \sim \frac{d\Sigma}{R^2}$, on $d\Sigma$ representa l'àrea subtendida pel detector.
- El concepte de secció eficaç pot ser quantificat mitjançant una àrea característica del procés, on una àrea gran significa gran probabilitat d'interacció i el contrari per a àrees menudes.
- Donat que el radi nuclear es de l'ordre de 10^{-12} cm la seua "àrea geomètrica" d'interacció ($A = \pi r^2$) valdria $\sim 10^{-24} \text{cm}^2$ i és aquesta la unitat que s'agafa: **1 barn = 10^{-24}cm^2** .
- Quan s'envia un feix de partícules sobre un blanc podem mesurar la probabilitat total d'interacció de tots els processos possibles \rightarrow secció eficaç total, o podem fixar-nos solament en les partícules que han estat difoses elàsticament \rightarrow secció eficaç elàstica. També es poden calcular les seccions eficaces en funció de l'element diferencial d'angle sòlid \rightarrow secció eficaç diferencial $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ i la de producció d'un canal o partícula.
- En general, per a cada procés individual d'interacció es pot definir la seua secció eficaç.



Secció eficaç diferencial i secció eficaç total



b és el paràmetre d'impacte.

Es denomina **secció eficaç diferencial** $d\sigma$ a l'àrea que s'obté en dividir el nombre de partícules dispersades per unitat de temps N_s en l'angle sòlid $d\Omega$ entre el flux (ϕ)

Definició:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\phi} \frac{dN_s}{d\Omega}$$

$$\frac{dN_s}{d\Omega}$$

: nombre de partícules difoses en l'angle sòlid $d\Omega$ per unitat de temps.

ϕ : flux: nombre de partícules incidents per unitat d'àrea i unitat de temps.

$d\sigma$ té dimensions d'àrea \Rightarrow secció geomètrica del blanc "interceptada" pel feix

- En general $d\sigma$ varia amb l'energia del feix i amb l'angle de difusió
- La **secció eficaç total** a energia E és:

$$\sigma(E) = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

Unitats

$$1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$$

$$= 10^{-24} \text{ cm}^2$$

El mètode experimental implica que el detector està molt lluny del centre difusor

- En la situació real el blanc és un material extens amb múltiples centres de dispersió. Si
 - n_{blanc} : densitat **volúmica** de centres dispersors del blanc.

$$n_{\text{blanc}} = \rho \frac{N_A}{A}$$

ρ : densitat del blanc (g/cm³)
 A : pes atòmic o molecular del blanc (en grams)
 N_A : nombre d'Avogadro

- δx : gruix del material en la direcció del feix (habitualment es tria no massa gros perquè no hi haja difusions múltiples).
- $n_{\text{blanc}} \delta x$: densitat **superficial** de centres dispersors perpendiculars al feix.
- S : àrea total del blanc il·luminada pel feix, aleshores:

Concepte relatiu
de blanc prim

el nombre de partícules difoses en mitjana per unitat de temps (I , intensitat de difusió) és:

$$\frac{dI_S}{d\Omega} = \emptyset S n_{\text{blanc}} \delta x \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

- El nombre total de partícules difoses en tots els angles per unitat de temps és:

$$I_S = \emptyset S n_{\text{blanc}} \delta x \sigma$$

- En el cas de blancs grossos, en travessar un gruix δx a la profunditat x , el feix incident s'atenuarà:

$$-d\emptyset(x) = \emptyset(x) n_{\text{blanc}} \delta x \sigma \rightarrow$$

$$\emptyset(x) = \emptyset_0 e^{-n_{\text{blanc}} \sigma x} \rightarrow I(x) = I_0 e^{-n_{\text{blanc}} \sigma x} \rightarrow \frac{I(x)}{I_0} = P(x) = e^{-n_{\text{blanc}} \sigma x} \rightarrow N = N_0 e^{-n_{\text{blanc}} \sigma x}$$

Equacions que representen la **lei d'atenuació del feix de partícules** sobre un blanc per al **flux incident** (cm⁻²s⁻¹), per a la **intensitat incident** $I(x)$ (partícules per unitat de temps, s⁻¹) i la **probabilitat de supervivència** $P(x)$ i N de les partícules en funció de la profunditat abastada x .

Es pot calcular també la probabilitat $F(x)$ que una partícula haja sobreviscut una distància x sense interaccionar i que interaccione immediatament a continuació en l'interval entre x i $x+dx$:

$$F(x) = P(x)n_{blanc}\sigma dx$$

Recorregut lliure mitjà λ : és el valor mitjà dels recorreguts de les partícules en el medi material. És un concepte semblant al de la vida mitjana de les partícules, però en funció de la distància que recorren en el medi:

$$\lambda = \frac{\int_{x=0}^{x=\infty} x P(x) dx}{\int_{x=0}^{x=\infty} P(x) dx} = \frac{1}{n_{blanc}\sigma} \Rightarrow \frac{\Phi(x)}{\Phi_0} = \frac{I(x)}{I_0} = e^{-x/\lambda} = e^{-\mu x}$$

$P(x)=e^{-x/\lambda}$ és la probabilitat de supervivència, no normalitzada.

La funció normalitzada és:

$$P(x)=\lambda^{-1} e^{-x/\lambda}$$

$$\lambda = \int_0^{\infty} xP(x)dx$$

on μ rep el nom de **coeficient d'absorció lineal** (es veurà en el tema 2): $\mu = 1/\lambda$.

Nota: el concepte de recorregut lliure mitjà és semblant al de la vida mitjana dels estats, aquell en funció de la variable x , i aquest en funció del temps t .

Càlcul de seccions eficaces teòriques: Per al càlcul de les seccions eficaces teòriques s'utilitza la regla d'or de Fermi que ens dóna la probabilitat d'interacció, com la probabilitat $\lambda_{i \rightarrow f}$ de passar de l'estat inicial i a l'estat final f :

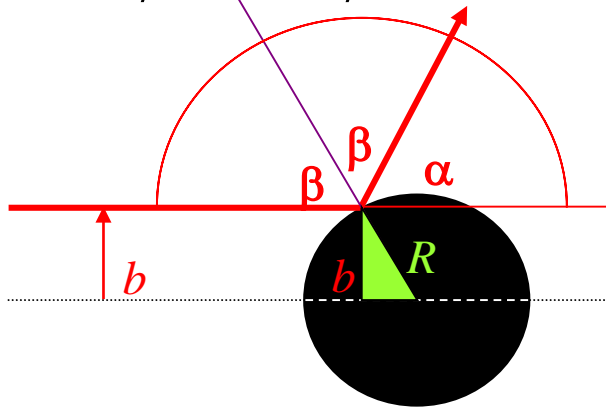
$$\lambda_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle f | H | i \rangle \right|^2 \rho(E_f)$$

on H representa el hamiltonià de la interacció i $\rho(E_f)$ és la densitat d'estats finals. Aquest càlcul o predicció teòrica és el que cal comparar amb la determinació experimental que hem establert.

Exemple: esfera rígida (Mec. clàssica)

Totes les boles que passen per aquest anell d'àrea $\Delta S = 2\pi b \Delta b$ seran dispersades en el interval angular $\Delta\alpha$, és a dir, a l'angle sòlid $\Delta\Omega = 2\pi \sin\alpha \Delta\alpha$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\phi} \frac{dN_s}{d\Omega} = \frac{1}{\phi} \frac{\phi(2\pi b db)}{2\pi \sin\alpha d\alpha}$$



$$\frac{b}{R} = \sin\beta, \quad 2\beta + \alpha = \pi.$$

$$b = R \sin \frac{\pi - \alpha}{2} = R \cos \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Area} = 2\pi b \Delta b$$

El signe - reflecteix el fet que l'angle α decreix amb b creixents. Només ens interessen els valors absoluts

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi b db}{2\pi \sin\alpha d\alpha} = \frac{b}{\sin\alpha} \frac{db}{d\alpha} = \frac{R \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} R \sin \frac{\alpha}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{4 \sin\alpha} R^2 = -\frac{R^2}{4}.$$

$$\sigma = \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} 2\pi \sin\alpha d\alpha = \int_0^\pi \frac{\pi R^2}{2} \sin\alpha d\alpha = \frac{\pi R^2}{2} [-\cos\alpha]_0^\pi = \pi R^2$$

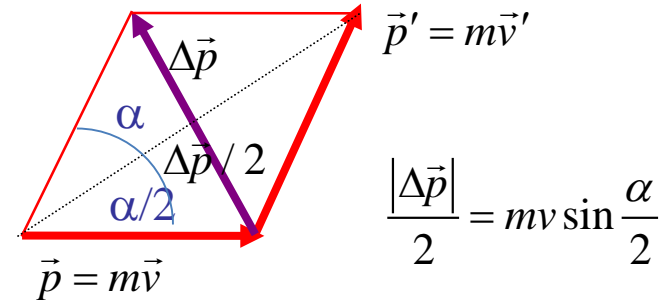
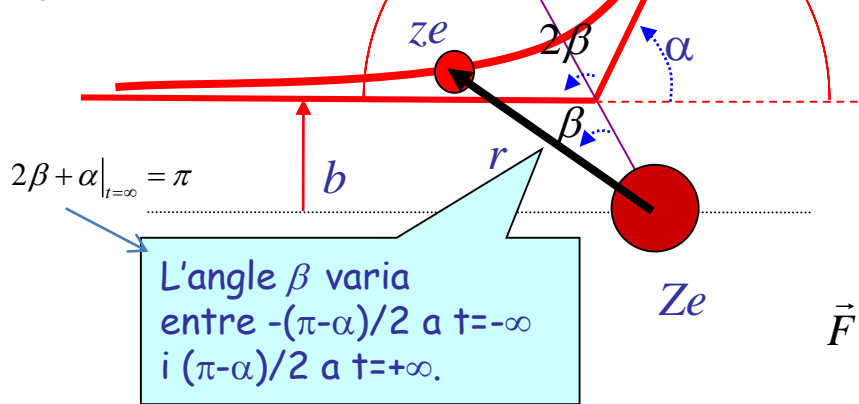
És l'àrea efectiva d'una esfera !!!

Angle sòlid:
 $d\Omega = 2\pi \sin\alpha d\alpha$

$d\sigma/d\Omega$ no depèn de α . Això indica que qualsevol direcció és equiprobable (com un focus de llum)

Exemple: Dispersió de Rutherford (Mec. Clàssica)

Es tracta d'una difusió elàstica i entre partícules puntuals. Observeu la geometria.



El canvi de moment és degut a la força de Coulomb:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \Delta \vec{p} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}(r) dt. \quad |\Delta \vec{p}| = \int_{-\infty}^{+\infty} F(r) \cos \beta dt.$$

El moment angular $L = mr^2\omega$ es conserva per a una partícula en un camp central. Condició inicial $L = mvb$

$$[L = |\vec{r} \times \vec{p}| = mvb = m\omega r^2 = cte]$$

$$|\Delta \vec{p}| = 2mv \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$|\Delta \vec{p}| = \int_{-\frac{\pi-\alpha}{2}}^{+\frac{\pi-\alpha}{2}} F(r) \cos \beta \frac{d\beta}{\left| \frac{d\beta}{dt} \right|}$$

$$\left| \frac{d\beta}{dt} \right| = \omega = \frac{vb}{r^2}$$

$$F(r) = \frac{Zze^2}{r^2}$$

$$2mv \sin \frac{\alpha}{2} = Zze^2 \int_{-\frac{\pi-\alpha}{2}}^{+\frac{\pi-\alpha}{2}} \frac{1}{r^2} \cos \beta \frac{d\beta}{\frac{vb}{r^2}}$$

$$b \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{Zze^2}{2mv^2} \int_{-\frac{\pi-\alpha}{2}}^{+\frac{\pi-\alpha}{2}} \cos \beta d\beta = \frac{Zze^2}{mv^2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$b = \frac{Zze^2}{mv^2} \cotan \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \alpha} \left| \frac{db}{d\alpha} \right| = \left(\frac{Zze^2}{mv^2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sin \alpha} \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$= \left(\frac{Zze^2}{mv^2} \right)^2 \frac{\cancel{\cos \frac{\alpha}{2}}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cancel{\cos \frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Zze^2}{4(mv^2/2)} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\alpha}{2}}$$

Fórmula de dispersió
coulombiana de Rutherford
per a partícules puntuals

Quina és la probabilitat que la partícula α siga desviada més d'1 grau?

(considerem com a energia cinètica típica de les partícules $\alpha \rightarrow 1 \text{ MeV} = 1,60 \times 10^{-13} \text{ J}$) E_c de la partícula incident

$$\sigma^{\alpha \geq 1^\circ} = (\dots)^2 \int_{1^\circ}^{180^\circ} \frac{2\pi \sin \alpha d\alpha}{\sin^4 \frac{\alpha}{2}} = 2\pi (\dots)^2 \int_{1^\circ}^{180^\circ} \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} d\alpha}{\sin^4 \frac{\alpha}{2}} = 8\pi (\dots)^2 \int_{1^\circ}^{180^\circ} \frac{\cos \frac{\alpha}{2} d\frac{\alpha}{2}}{\sin^3 \frac{\alpha}{2}} =$$

Substituint $\sin \frac{\alpha}{2} = x$

$$= 8\pi (\dots)^2 \int_{\sin 0.5^\circ}^{\sin 90^\circ} \frac{dx}{x^3} = 8\pi (\dots)^2 \left[\frac{-1}{2x^2} \right]_{\sin 0.5^\circ}^{\sin 90^\circ} = 5.33 \times 10^{-22} \text{ m}^2 = 5.33 \times 10^6 \text{ barn}$$

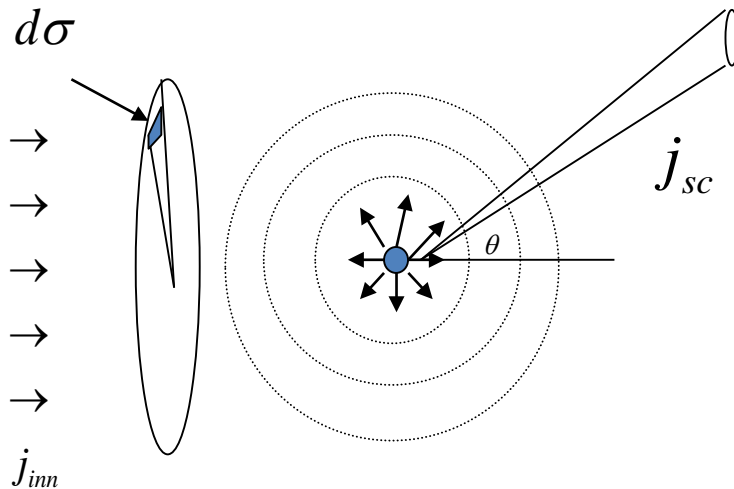
Quin és el paràmetre d'impacte que correspon a un angle d'1°?

$$b = \frac{Zze^2}{mv^2} \cotan \frac{\alpha}{2} = 1.14 \times 10^{-13} \times \cotan 0.5^\circ \text{ m} = 1.30 \times 10^{-11} \text{ m}$$

- Observeu que la secció eficaç és divergent corresponent a una interacció d'abast infinit.
- La distància d'aproximació de la partícula α queda molt lluny del nucli per a sentir la interacció forta.

Secció eficaç diferencial en MQ (H no funció de t)

Una ona plana és dispersada per l'objecte i emergeix una ona esfèrica



$$\psi = \psi_{in} + \psi_{scattered}$$

$$\psi_{in} = C e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad \text{Ona plana incident}$$

$$\psi_{scattered} = C f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r}$$

Lluny del centre difusor tindrem una ona esfèrica (amb el factor d'atenuació $1/r$) amb una amplitud $f(\theta, \phi)$

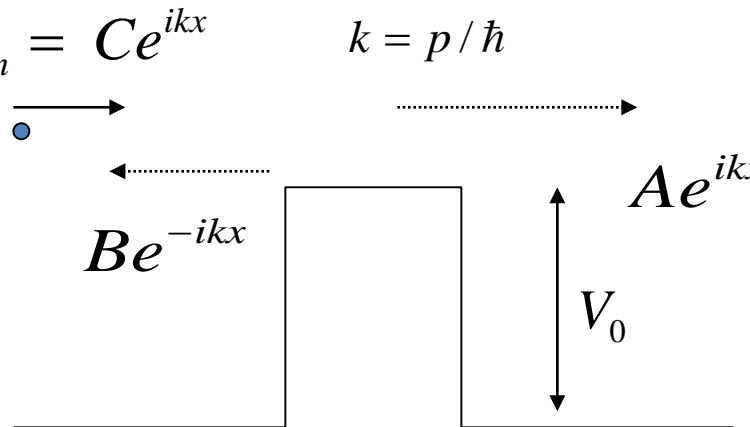
Procediment:

- Solucionar l'equació de Schrödinger independent del temps.
- Aproximar la solució per una vàlida molt lluny del centre de dispersió.
- Escriure aquesta solució com a suma d'una ona plana entrant inicial i d'una ona esfèrica sortint.

$$\psi \cong C \left[e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} \right]$$

Determinem primer la relació entre la funció “ f ” i la secció eficaç diferencial.

Abans però un exemple en 1D: penetració a través d'un escaló de potencial.



$$\psi_{in} = C e^{ikx} \quad k = p / \hbar$$

$$\psi_{scattered} = C(A e^{ikx} + B e^{-ikx})$$

$$\psi = \psi_{in} + \psi_{scattered}$$

$$f(\theta, \phi) = \begin{cases} A & \text{Difusió cap endavant (Forward scattering)} \\ B & \text{Reflexió} \end{cases}$$

En aquest cas podem trobar exactament “ f ” fent el procediment habitual de continuïtat de

$$\psi \quad i \quad d\psi / dx$$

Relació entre la funció “ $f(\theta, \phi)$ ” i la secció eficaç diferencial

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}) \quad \text{amb} \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \text{i} \quad U(\vec{r}) = \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}) \quad \text{obtenim:}$$

$$(\nabla^2 + k^2) \psi(\vec{r}) = U(\vec{r}) \psi(\vec{r})$$

Equació de Schrödinger independent del temps

Densitat de corrent:

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) = \text{Re} \left(\psi^* \frac{\hbar}{im} \vec{\nabla} \psi \right)$$

Densitat de corrent entrant:

$$\psi_{in} = C e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = C e^{ikz}$$

$$\vec{j}_{in} = \frac{\hbar k}{m} |C|^2 \hat{k}$$

Densitat de corrent sortint:

$$\psi_{sc} = C f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} C f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} = ik C f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} + O(r^{-2})$$

$$\vec{j}_{sc} = |C|^2 |f(\theta, \phi)|^2 \frac{\hbar k}{mr^2} \vec{e}_r$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f(r) &= \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \dots \vec{e}_\theta + \dots \vec{e}_\phi \end{aligned}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{j_{sc} r^2 d\Omega}{d\Omega j_{in}} = \frac{|C|^2 \frac{\hbar k}{mr^2} |f(\theta, \phi)|^2 r^2 d\Omega}{d\Omega |C|^2 \frac{\hbar k}{m}} = |f(\theta, \phi)|^2 \Rightarrow$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \phi)|^2$$

Amplitud de difusió $f(\theta, \phi)$

Determinació de la funció " $f(\theta, \phi)$ " amplitud de difusió

Utilitzarem el mètode de les funcions de Green $G(r)$ per a obtenir una solució "formal" de l'equació de Schrödinger, que podem escriure com a:

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\vec{r}) = U(\vec{r})\psi(\vec{r})$$

La solució formal és:

és:

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) + \int G(\vec{r} - \vec{r}')U(\vec{r}')\psi(\vec{r}') d^3r'$$

$\psi_0(\vec{r})$ és la funció d'ona entrant

Si ho apliquem al cas d'una partícula lliure:

$$(\nabla^2 + k^2)\psi_0(\vec{r}) = 0 \quad \longrightarrow \quad \psi_0(\vec{r}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

Equació de Laplace

$$(\nabla^2 + k^2)G(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad \text{Equació de Green}$$

efectivament

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\vec{r}) = \underbrace{(\nabla^2 + k^2)\psi_0(\vec{r})}_{\text{Aquest terme és 0}} + \int \underbrace{(\nabla^2 + k^2)G(\vec{r} - \vec{r}')}_{\text{això és igual a } \delta(\vec{r} - \vec{r}')} U(\vec{r}')\psi(\vec{r}') d^3r'$$

Aquest terme és 0

això és igual a $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$

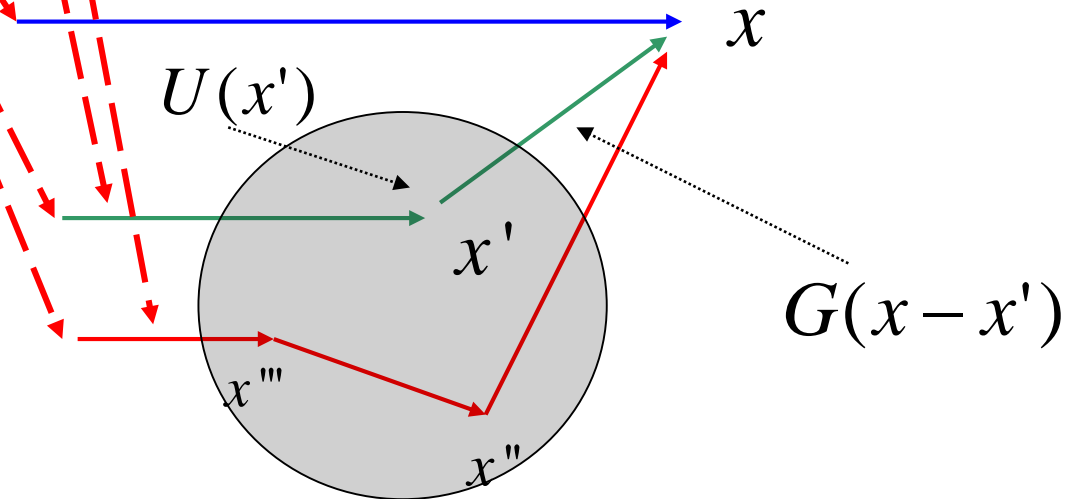
La sèrie de BORN: Diagrames de Feynman

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) + \int G(\vec{r} - \vec{r}') U(\vec{r}') \psi(\vec{r}') d^3 r'$$

Com que U és petit la podem obtenir iterant:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}) = & \psi_0(\vec{r}) + \int d^3 r' G(\vec{r} - \vec{r}') U(\vec{r}') \psi_0(\vec{r}') + \\ & + \int d^3 r'' \int d^3 r''' G(\vec{r} - \vec{r}'') U(\vec{r}'') G(\vec{r}'' - \vec{r}''') U(\vec{r}''') \psi_0(\vec{r}''') + \dots \end{aligned}$$

La interpretació simplista
de la qual és:
(diag. de Feynman:
Vèrtex i propagador
de la interacció. Mètode
pertorbatiu)




Quina és la funció de Green associada a l'equació de Schrödinger?

$$(\nabla^2 + k^2)G(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Noteu: $\delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{s} \cdot \vec{r}} d^3s$, i: $\nabla^2 e^{i\vec{s} \cdot \vec{r}} = -s^2 e^{i\vec{s} \cdot \vec{r}}$

Com que $\int (\nabla^2 + k^2) e^{i\vec{s} \cdot \vec{r}} d^3s = \int (-s^2 + k^2) e^{i\vec{s} \cdot \vec{r}} d^3s \Rightarrow$

$$\int (\nabla^2 + k^2) \frac{e^{i\vec{s} \cdot \vec{r}}}{-s^2 + k^2} d^3s = \int e^{i\vec{s} \cdot \vec{r}} d^3s = (2\pi)^3 \delta(\vec{r})$$

la funció buscada serà: $G(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\vec{s} \cdot \vec{r}}}{-s^2 + k^2} d^3s$  Integrant

$$G(\vec{r}) = -\frac{e^{ik\vec{r}}}{4\pi r}$$

Aproximacions per r molt gran....

Si el potencial és de curt abast, és a dir, actiu només per r' petits:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} = r \left(1 - 2 \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{1/2} \approx r \left(1 - \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^2} \right)$$

$$1) e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx e^{ikr} e^{-ik \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r}'} = e^{ikr} e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}'}$$

Doncs (xoc elàstic)

$$k \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{p}_f}{\hbar} \equiv \vec{k}_f$$

$$2) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r}$$

$$G(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{e^{ik(\vec{r} - \vec{r}')}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \approx -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}'}$$

Per tant, la solució formal per a r molt grans (on posem els detectors), i que ens permet obtenir la funció $f(\theta, \phi)$:

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) + \int G(\vec{r} - \vec{r}') U(\vec{r}') \psi(\vec{r}') d^3 r' = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - \frac{e^{ikr}}{r} \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}'} U(\vec{r}') \psi(\vec{r}') d^3 r'}_{f(\theta, \phi)}$$

$$= \begin{array}{c} \rightarrow x' \rightarrow x \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \psi_0(x) U(x') G(x - x') \end{array} + \rightarrow x''' \rightarrow x'' \rightarrow x + \dots$$

Ho podem obtenir iterant. Aquestes iteracions (sèries de BORN) ja hem vist que es poden expressar de manera diagramàtica: DIAGRAMES DE FEYNMAN

Secció eficaç diferencial en MQ. Aproximació de BORN

Si ens quedem a la primera iteració (primer terme): $\psi_0(\vec{r}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ i $U(\vec{r}) = \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r})$

$$\psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{2m}{4\pi\hbar^2} \int e^{i(\vec{k} - \vec{k}_f) \cdot \vec{r}'} V(\vec{r}') d^3 r'$$

i per tant $f(\theta, \phi)$ serà (aproximació de BORN):

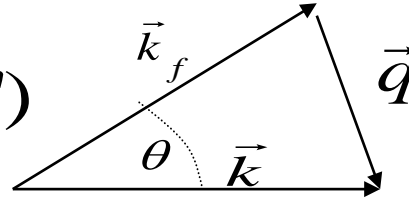
$$f^B(\theta, \phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i(\vec{k} - \vec{k}_f) \cdot \vec{r}} V(\vec{r}) d^3 r$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx |f^B(\theta, \phi)|^2$$

L'amplitud de dispersió és la transformada de Fourier del potencial !!!

Secció eficaç diferencial elàstica per potencials amb simetria esfèrica

$$V(\vec{r}') = V(r')$$



$$q^2 = k_f^2 + k^2 - 2k_f k \cos \theta = 2k^2(1 - \cos \theta)$$

$$q = 2k \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$k_f = k \quad \text{Elàstica}$$

$$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\begin{aligned} f^B(\theta, \phi) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i(\vec{k} - \vec{k}_f) \cdot \vec{r}'} V(r') d^3 r' \\ &= -\frac{2m}{4\pi\hbar^2} \int_0^\infty V(r') r'^2 dr' \int_0^\pi e^{iqr' \cos \theta'} \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \\ &= -\frac{2m}{q\hbar^2} \int_0^\infty r' V(r') \sin(qr') dr' \end{aligned}$$

Observeu que q depèn de θ , però no de ϕ

La secció eficaç TOTAL: $\sigma = \int_{\Omega} |f^B(\theta, \phi)|^2 d\Omega = \int_{\Omega} |f^B(\theta, \phi)|^2 \sin \theta d\theta d\phi$

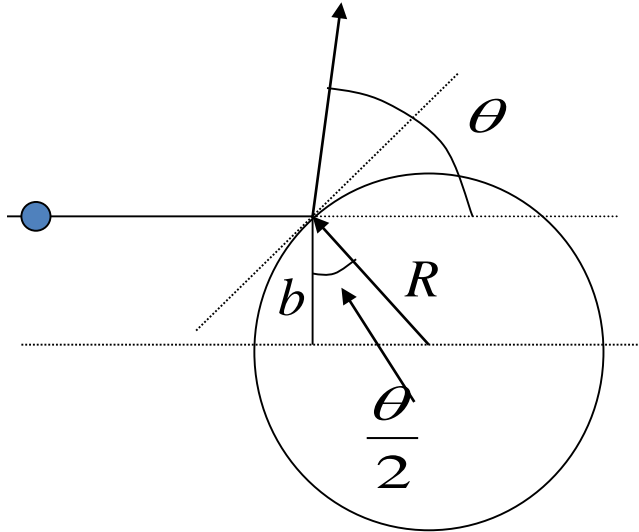
$$\sin \theta = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad dq = k \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

$$\sigma = 2\pi \int_0^\pi |f^B(\theta)|^2 \sin \theta d\theta = \frac{2\pi}{k^2} \int_0^{2k} |f^B(q)|^2 q dq$$

En funció de l'angle de difusió

En funció del moment transferit

Exemple 1: esfera rígida (MQ)



Recordem que en mecànica clàssica hem obtingut:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \frac{R^2}{4}$$

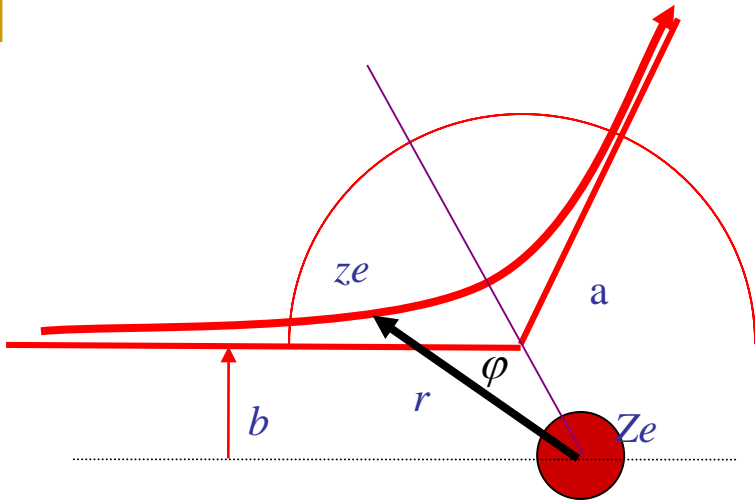
Potencial quàntic esfera rígida: $V(r') \approx \delta(r' - R)$

$$f^B(\theta) = -\frac{2m}{q\hbar^2} \int_0^\infty \delta(r' - R) \sin(qr') r' dr' = -\frac{2m}{q\hbar^2} R \sin(qR)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \left(\frac{2m}{q\hbar^2} \right)^2 R^2 \sin^2(qR)$$

Depèn dels angles – però quasi independent si $qR \ll 1$ $\sin^2(qR) \approx (qR)^2$, $qR \rightarrow 0$

Exemple 2: Dispersió de Rutherford (MQ)



$$V(\vec{r}') = \frac{zZe^2}{|\vec{r}'|}$$

$$q = 2k \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$k = p/\hbar$$

$$f^B(\theta, \phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}'} V(\vec{r}') d^3r' = -\frac{zZe^2 m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r}'|}$$

Aquesta integral divergeix. Es pot trobar aplicant un factor de convergència

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \int d^3x \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{x} e^{-\mu x} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{4\pi}{q^2 + \mu^2} = \frac{4\pi}{q^2} \quad (T = mv^2/2)$$

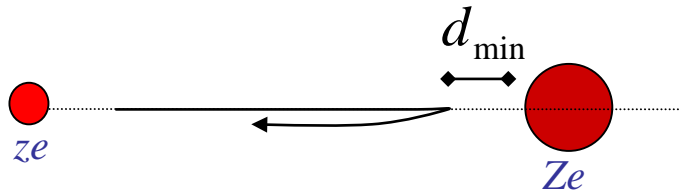
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \phi)|^2 = \frac{(zZe^2)^2 m^2}{(2\pi)^2 \hbar^4} \frac{(4\pi)^2}{q^4} = \frac{(zZe^2)^2 m^2}{4p^4 \sin^4(\theta/2)} = \left(\frac{zZe^2}{4T} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

(coincideix amb el que s'obté clàssicament!)

Dispersió Rutherford: resultats experimentals

Utilitzant partícules alfa amb energia cinètica d'aproximadament 7.6 MeV sobre Au, no es van apreciar diferències amb la fórmula de càrregues puntuals de Rutherford.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Zze^2}{4T} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

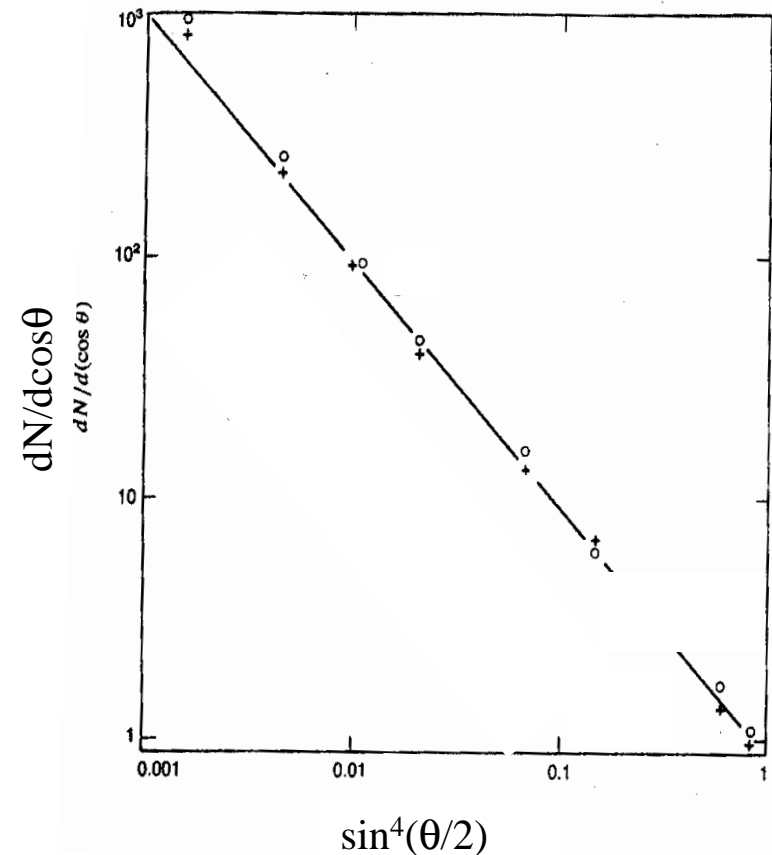


$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{zZe^2}{d_{\min}} \Rightarrow d_{\min} = \frac{zZe^2}{T}$$

Per Au (A=197, Z=79) i alfes de 7.6 MeV

$$d_{\min} \approx 30 \text{ fm}$$

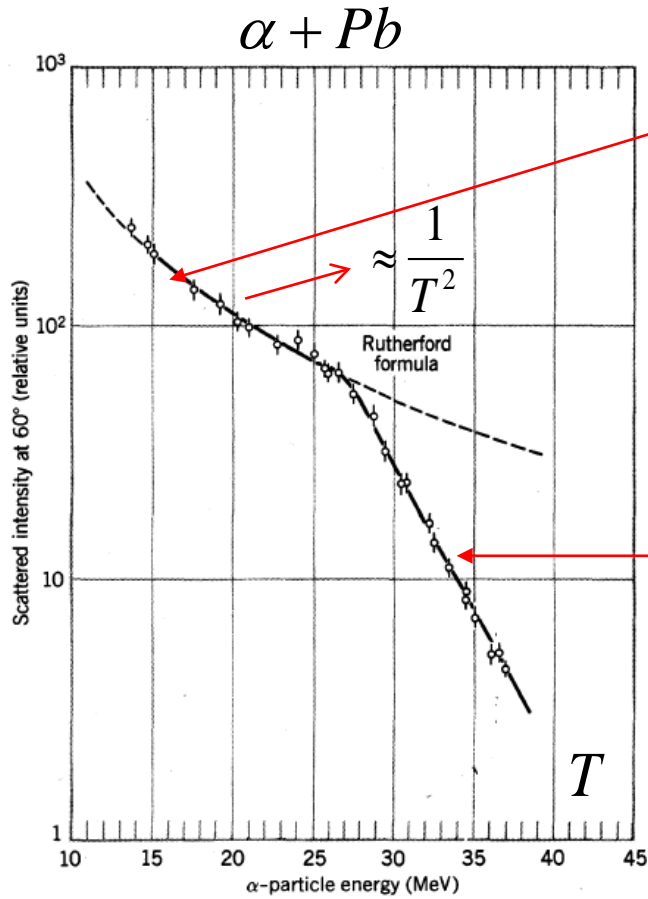
No “penetrem” en el nucli (10 fm)



Desviació de la dispersió Rutherford a alta energia

⇒ determina la distribució de càrrega del nucli

Per a nuclis més lleugers (o amb alfes més energètiques) sí que es poden apreciar diferències corresponents a distàncies màximes d'aproximació de 10 fm (es comencen a veure efectes d'una distribució de càrrega finita i efectes de la interacció forta):

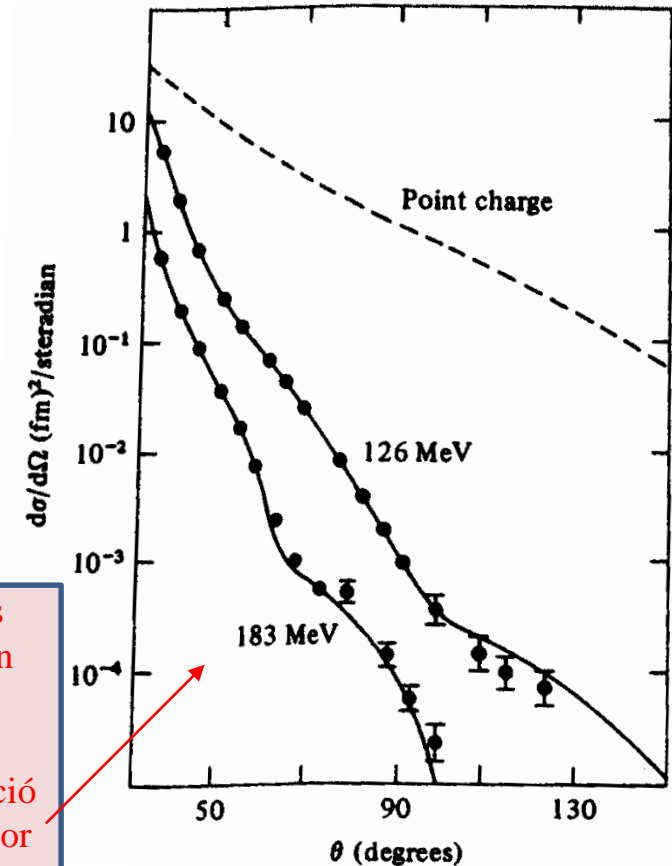


$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Zze^2}{4T} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

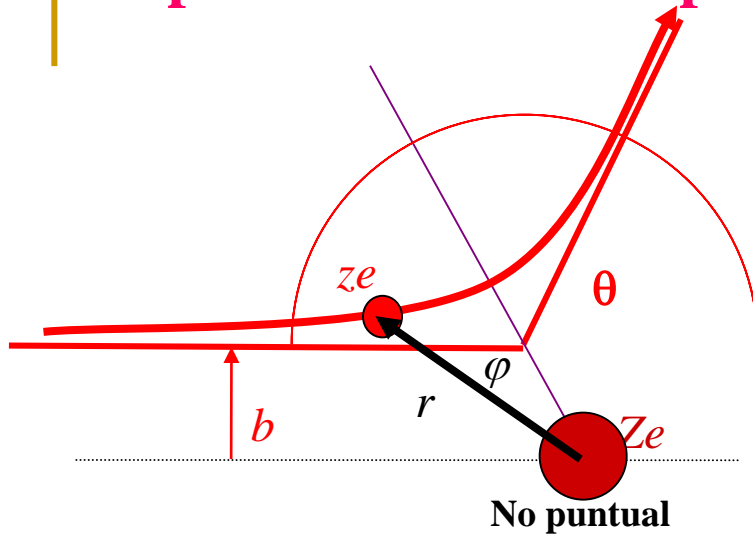
Decreix!!!! La força nuclear és atractiva

A aquestes energies, els electrons que interactuen electromagnèticament, senten la distribució de càrrega nuclear, informació que es transmet en el factor de forma

Electron - Gold



Dispersió Rutherford per a nuclí NO puntual



$$V_{\text{point}}(\vec{r}') = \frac{zZe^2}{|\vec{r}'|} = zZe^2 \int d^3R \frac{\delta(\vec{R})}{|\vec{r}' - \vec{R}|}$$

Passant a una distribució finita de càrrega

$$V(\vec{r}') = zZe^2 \int d^3\vec{R} \frac{\rho(\vec{R})}{|\vec{r}' - \vec{R}|} \quad \text{amb} \quad \int d^3\vec{R} \rho(\vec{R}) = 1$$

$$q = 2k \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$f_{\text{point}}^B(\theta, \phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}'} V(\vec{r}') d^3r' = -\frac{zZe^2 m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r}'|}$$

$$f^B(\theta, \phi) = -\frac{zZe^2 m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}'} \int d^3R \frac{\rho(\vec{R})}{|\vec{r}' - \vec{R}|} \quad \{\vec{r}', \vec{R}\} \rightarrow \{\vec{x}' = \vec{r}' - \vec{R}, \vec{R}\}$$

$$f^B(\theta, \phi) = -\frac{zZe^2 m}{2\pi\hbar^2} \int d^3R \rho(\vec{R}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{R}} \int d^3x' e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}'} \frac{1}{|\vec{x}'|} = \int d^3R \rho(\vec{R}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{R}} f_{\text{point}}^B(q)$$

$\boxed{\int d^3R \rho(\vec{R}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{R}} \equiv F(q)}$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_B(q)|^2$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{point}} |F(q)|^2$$

Factor de forma del nucli

(transformada de Fourier de la distribució de càrrega) \Rightarrow Concepte important

Veiem, doncs, que utilitzant col·lisions de més alta energia podrem tenir més informació sobre l'estructura (i també modes d'interacció) del blanc.

Per aquest motiu després de l'experiment de Rutherford s'han anat construint **acceleradors de partícules** cada vegada amb més energia en el centre de masses de la col·lisió, per a estudiar no només el nucli sinó també el protó i altres partícules, i esbrinar quins són els elements fonamentals de la matèria i la manera en què interactuen.

Aquests acceleradors i detectors de partícules han permès estudiar les seccions eficaces diferencials fent col·lisions:

$$e^- e^+$$

$$pp$$

$$p\bar{p}$$

$$e^- p$$

$$pN$$

$$NN$$

Veurem en el tema següent quines són les tècniques que utilitzen els acceleradors de partícules i com es detecten aquestes en els experiments anomenats “d'alta energia”.

3. Unitats, dimensions i constants

- Longituds:**

- Grandàries nuclears des d'1 fm fins a 7 fm
- Grandàries en física de partícules: fins a $\sim 10^{-5}$ fm

$$1 \text{ fermi (fm)} = 10^{-15} \text{ m}$$

- Temps:** L'interval de variació és molt ampli, des de $\sim 10^{-23}$ s dels processos forts fins a desintegracions (α , β , per exemple) amb vides mitjanes de fins a 10^9 anys.

Procés	Duració
Fragmentació dels nuclis ${}^5\text{He}$ o ${}^8\text{Be}$	10^{-20} s
Reaccions nuclears (temps de trànsit nuclear)	
Desintegracions electromagnètiques (γ)	ps (10^{-12} s) - ns (10^{-9} s)
Desintegracions α , β	Fins a 10^9 anys
Desintegracions fortes (física de partícules)	10^{-23} s

- Energies:**

$$1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-13} \text{ J}$$

[~ energia d'enllaç d'un nucleó]

Procés	Valors
Desintegracions α , β , γ	$\sim \text{MeV}$
Reaccions nuclears de baixa energia	1–100 MeV
Reaccions nuclears d'alta energia (física de partícules)	$> 1 \text{ GeV}$ fins als 14 TeV (10^7 MeV), LHC

- Masses:** Es mesuren en unitats de massa atòmica (u.m.a, o u) o MeV/c^2

$$1 \text{ u} = \frac{1}{12} M({}^{12}\text{C}) = 931.494043 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg} = 0.511 \text{ MeV} / c^2$$

$$m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg} = 938 \text{ MeV} / c^2$$

Inclou els electrons atòmics !!!

Unitats Naturals (UN) o unitats de Planck

- A més d'usar l'eV (i els seus múltiples) com a unitat d'energia, el sistema més convenient és el de les Unitats Naturals (UN):
- Constant de Plank reduïda $\rightarrow \hbar = h / 2\pi = 1$ adimensional.
- Velocitat de la llum $\rightarrow c = 1$ adimensional.
- Facilitat per a escriure equacions
 - Relació entre energia, momentum i massa: $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \Rightarrow E^2 = p^2 + m^2$
- Conversió entre el Sistema Internacional (MKS) i UN: $MKS: M^p L^q T^r \quad UN: E^n$

$$[c] = M^0 L^1 T^{-1} \quad [E] = M^1 L^2 T^{-2} \quad [\hbar] = [E \cdot T] = M^1 L^2 T^{-1}$$

$$c = 1, \hbar = 1 \Rightarrow \begin{cases} L = T, M = L^{-1} = T^{-1} \\ [E] = [p] = M = L^{-1} = T^{-1} \end{cases}$$

- Exemple: la secció eficaç té unitats de L^2 .
En UN té unitats de GeV^{-2}

$$[\sigma] = L^2 = M^{-2}$$

	p	q	r	n
Acció	1	2	-1	0
Velocitat	0	1	-1	0
Massa	1	0	0	1
Longitud	0	1	0	-1
Temps	0	0	1	-1
Momentum	1	1	-1	1
Energia	1	2	-2	1

Constants físiques i factors de conversió

Per a recordar

Quantity	Symbol, equation	Value	Uncertainty (ppb)
speed of light in vacuum	c	$299\,792\,458\text{ m s}^{-1}$	exact*
Planck constant	\hbar	$6.626\,0693(11)\times 10^{-34}\text{ J s}$	170
Planck constant, reduced	$\hbar \equiv \hbar/2\pi$	$1.054\,571\,68(18)\times 10^{-34}\text{ J s}$	170
electron charge magnitude	e	$1.602\,176\,53(14)\times 10^{-19}\text{ C} = 4.803\,204\,41(41)\times 10^{-10}\text{ esu}$	85, 85
conversion constant	$\hbar c$	$197.326\,968(17)\text{ MeV fm}$	85
conversion constant	$(\hbar c)^2$	$0.389\,379\,323(67)\text{ GeV}^2\text{ mbarn}$	170
electron mass	m_e	$0.510\,998\,918(44)\text{ MeV}/c^2 = 9.109\,3826(16)\times 10^{-31}\text{ kg}$	86, 170
proton mass	m_p	$938.272\,029(80)\text{ MeV}/c^2 = 1.672\,621\,71(29)\times 10^{-27}\text{ kg}$	86, 170
deuteron mass	m_d	$1875.612\,82(16)\text{ MeV}/c^2$	86
unified atomic mass unit (u)	$(\text{mass }^{12}\text{C atom})/12 = (1\text{ g})/(N_A\text{ mol})$	$931.494\,043(80)\text{ MeV}/c^2 = 1.660\,538\,86(28)\times 10^{-27}\text{ kg}$	86, 170
permittivity of free space	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	$8.854\,187\,817\, \dots \times 10^{-12}\text{ F m}^{-1}$	exact
permeability of free space	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}\text{ N A}^{-2} = 12.566\,370\,614\, \dots \times 10^{-7}\text{ N A}^{-2}$	exact
fine-structure constant	$\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$	$7.297\,352\,568(24)\times 10^{-3} = 1/137.035\,999\,11(46)^\dagger$	3.3, 3.3
classical electron radius	$r_e = e^2/4\pi\epsilon_0 m_e c^2$	$2.817\,940\,325(28)\times 10^{-15}\text{ m}$	10
(e^- Compton wavelength)/ 2π	$\lambda_e = \hbar/m_e c = r_e\alpha^{-1}$	$3.861\,592\,678(26)\times 10^{-13}\text{ m}$	6.7
Bohr radius ($m_{\text{nucleus}} = \infty$)	$a_\infty = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/m_e e^2 = r_e\alpha^{-2}$	$0.529\,177\,2108(18)\times 10^{-10}\text{ m}$	3.3
wavelength of 1 eV/c particle	$\hbar c/(1\text{ eV})$	$1.239\,841\,91(11)\times 10^{-6}\text{ m}$	85
Rydberg energy	$\hbar c R_\infty = m_e e^4/2(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2 = m_e c^2\alpha^2/2$	$13.605\,6923(12)\text{ eV}$	85
Thomson cross section	$\sigma_T = 8\pi r_e^2/3$	$0.665\,245\,873(13)\text{ barn}$	20
Bohr magneton	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	$5.788\,381\,804(39)\times 10^{-11}\text{ MeV T}^{-1}$	6.7
nuclear magneton	$\mu_N = e\hbar/2m_p$	$3.152\,451\,259(21)\times 10^{-14}\text{ MeV T}^{-1}$	6.7
electron cyclotron freq./field	$\omega_{\text{cycl}}/B = e/m_e$	$1.758\,820\,12(15)\times 10^{11}\text{ rad s}^{-1}\text{ T}^{-1}$	86
proton cyclotron freq./field	$\omega_{\text{cycl}}/B = e/m_p$	$9.578\,833\,76(82)\times 10^7\text{ rad s}^{-1}\text{ T}^{-1}$	86
gravitational constant†	G_N	$6.6742(10)\times 10^{-11}\text{ m}^3\text{ kg}^{-1}\text{ s}^{-2}$ $= 6.7087(10)\times 10^{-39}\text{ } \hbar c\text{ (GeV}/c^2)^{-2}$	1.5×10^5 1.5×10^5
standard gravitational accel.	g_n	$9.806\,65\text{ m s}^{-2}$	exact
Avogadro constant	N_A	$6.022\,1415(10)\times 10^{23}\text{ mol}^{-1}$	170
Boltzmann constant	k	$1.380\,6505(24)\times 10^{-23}\text{ J K}^{-1}$ $= 8.617\,343(15)\times 10^{-5}\text{ eV K}^{-1}$	1800 1800
molar volume, ideal gas at STP	$N_A k(273.15\text{ K})/(101\,325\text{ Pa})$	$22.413\,996(39)\times 10^{-3}\text{ m}^3\text{ mol}^{-1}$	1700
Wien displacement law constant	$b = \lambda_{\text{max}} T$	$2.897\,7685(51)\times 10^{-3}\text{ m K}$	1700
Stefan-Boltzmann constant	$\sigma = \pi^2 k^4/60\hbar^3 c^2$	$5.670\,400(40)\times 10^{-8}\text{ W m}^{-2}\text{ K}^{-4}$	7000
Fermi coupling constant**	$G_F/(\hbar c)^3$	$1.166\,37(1)\times 10^{-5}\text{ GeV}^{-2}$	9000
weak-mixing angle	$\sin^2 \hat{\theta}(M_Z)$ (MS)	$0.23122(15)^{++}$	6.5×10^5
W^\pm boson mass	m_W	$80.403(29)\text{ GeV}/c^2$	3.6×10^5
Z^0 boson mass	m_Z	$91.1876(21)\text{ GeV}/c^2$	2.3×10^4
strong coupling constant	$\alpha_s(m_Z)$	$0.1176(20)$	1.7×10^7
$\pi = 3.141\,592\,653\,589\,793\,238$		$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235$	$\gamma = 0.577\,215\,664\,901\,532\,861$
1 in $\equiv 0.0254\text{ m}$	1 G $\equiv 10^{-4}\text{ T}$	1 eV $\equiv 1.602\,176\,53(14) \times 10^{-19}\text{ J}$	kT at 300 K $\equiv [38.681\,684(68)]^{-1}\text{ eV}$
1 Å $\equiv 0.1\text{ nm}$	1 dyne $\equiv 10^{-5}\text{ N}$	1 eV/ $c^2 \equiv 1.782\,661\,81(15) \times 10^{-36}\text{ kg}$	0 °C $\equiv 273.15\text{ K}$
1 barn $\equiv 10^{-28}\text{ m}^2$	1 erg $\equiv 10^{-7}\text{ J}$	$2.997\,924\,58 \times 10^9\text{ esu} = 1\text{ C}$	1 atmosphere $\equiv 760\text{ Torr} \equiv 101\,325\text{ Pa}$

Sistema Internacional (SI)

SI prefixes

10^{24}	yotta	(Y)
10^{21}	zetta	(Z)
10^{18}	exa	(E)
10^{15}	peta	(P)
10^{12}	tera	(T)
10^9	giga	(G)
10^6	mega	(M)
10^3	kilo	(k)
10^2	hecto	(h)
10	deca	(da)
10^{-1}	deci	(d)
10^{-2}	centi	(c)
10^{-3}	milli	(m)
10^{-6}	micro	(μ)
10^{-9}	nano	(n)
10^{-12}	pico	(p)
10^{-15}	femto	(f)
10^{-18}	atto	(a)
10^{-21}	zepto	(z)
10^{-24}	yocto	(y)

Physical quantity	Name of unit	Symbol
<i>Base units</i>		
length	meter	m
mass	kilogram	kg
time	second	s
electric current	ampere	A
thermodynamic temperature	kelvin	K
amount of substance	mole	mol
luminous intensity	candela	cd
<i>Derived units with special names</i>		
plane angle	radian	rad
solid angle	steradian	sr
frequency	hertz	Hz
energy	joule	J
force	newton	N
pressure	pascal	Pa
power	watt	W
electric charge	coulomb	C
electric potential	volt	V
electric resistance	ohm	Ω
electric conductance	siemens	S
electric capacitance	farad	F
magnetic flux	weber	Wb
inductance	henry	H
magnetic flux density	tesla	T
luminous flux	lumen	lm
illuminance	lux	lx
celsius temperature	degree celsius	$^{\circ}\text{C}$
activity (of a radioactive source)*	becquerel	Bq
absorbed dose (of ionizing radiation)*	gray	Gy
dose equivalent*	sievert	Sv

Taula periòdica dels elements químics

1 IA																	18 VIIIA									
1 H Hydrogen 1.00794	2 He Helium 4.002602																									
3 Li Lithium 6.941	4 Be Beryllium 9.012182	PERIODIC TABLE OF THE ELEMENTS														5 B Boron 10.811	6 C Carbon 12.0107	7 N Nitrogen 14.0067	8 O Oxygen 15.9994	9 F Fluorine 18.9984032	10 Ne Neon 20.1797					
11 Na Sodium 22.989770	12 Mg Magnesium 24.3050	3 IIIB	4 IVB	5 VB	6 VIB	7 VIIB	8 VIII	9 VIII	10 VIII	11 IB	12 IIB	13 Al Aluminum 26.981538	14 Si Silicon 28.0855	15 P Phosph. 30.973761	16 S Sulfur 32.065	17 Cl Chlorine 35.453	18 Ar Argon 39.948									
19 K Potassium 39.0983	20 Ca Calcium 40.078	21 Sc Scandium 44.955910	22 Ti Titanium 47.867	23 V Vanadium 50.9415	24 Cr Chromium 51.9961	25 Mn Manganese 54.938049	26 Fe Iron 55.845	27 Co Cobalt 58.933200	28 Ni Nickel 58.6934	29 Cu Copper 63.546	30 Zn Zinc 65.39	31 Ga Gallium 69.723	32 Ge German. 72.64	33 As Arsenic 74.92160	34 Se Selenium 78.96	35 Br Bromine 79.904	36 Kr Krypton 83.80									
37 Rb Rubidium 85.4678	38 Sr Strontium 87.62	39 Y Yttrium 88.90585	40 Zr Zirconium 91.224	41 Nb Niobium 92.90638	42 Mo Molybd. 95.94	43 Tc Technet. (97.907216)	44 Ru Ruthen. 101.07	45 Rh Rhodium 102.90550	46 Pd Palladium 106.42	47 Ag Silver 107.8682	48 Cd Cadmium 112.411	49 In Indium 114.818	50 Sn Tin 118.710	51 Sb Antimony 121.760	52 Te Tellurium 127.60	53 I Iodine 126.90447	54 Xe Xenon 131.293									
55 Cs Cesium 132.90545	56 Ba Barium 137.327	57–71 Lantha- nides	72 Hf Hafnium 178.49	73 Ta Tantalum 180.9479	74 W Tungsten 183.84	75 Re Rhenium 186.207	76 Os Osmium 190.23	77 Ir Iridium 192.217	78 Pt Platinum 195.078	79 Au Gold 196.96655	80 Hg Mercury 200.59	81 Tl Thallium 204.3833	82 Pb Lead 207.2	83 Bi Bismuth 208.98038	84 Po Polonium (208.982430)	85 At Astatine (209.987148)	86 Rn Radon (222.017578)									
87 Fr Francium (223.019736)	88 Ra Radium (226.025410)	89–103 Actinides	104 Rf Rutherford. (261.10877)	105 Db Dubnium (262.1141)	106 Sg Seaborg. (263.1221)	107 Bh Bohrium (262.1246)	108 Hs Hassium (277.1498)	109 Mt Meitner. (268.1387)	110 Ds Darmstadt. (271.1461)	111 Rg Roentgen. (272.1536)	112 (277.1639)															

Lanthanide series

57 La Lanthan. 138.9055	58 Ce Cerium 140.116	59 Pr Praseodym. 140.90765	60 Nd Neodym. 144.24	61 Pm Prometh. (144.912749)	62 Sm Samarium 150.36	63 Eu Europium 151.964	64 Gd Gadolin. 157.25	65 Tb Terbium 158.92534	66 Dy Dyspros. 162.50	67 Ho Holmium 164.93032	68 Er Erbium 167.259	69 Tm Thulium 168.93421	70 Yb Ytterbium 173.04	71 Lu Lutetium 174.967
-------------------------------	----------------------------	----------------------------------	----------------------------	-----------------------------------	-----------------------------	------------------------------	-----------------------------	-------------------------------	-----------------------------	-------------------------------	----------------------------	-------------------------------	------------------------------	------------------------------

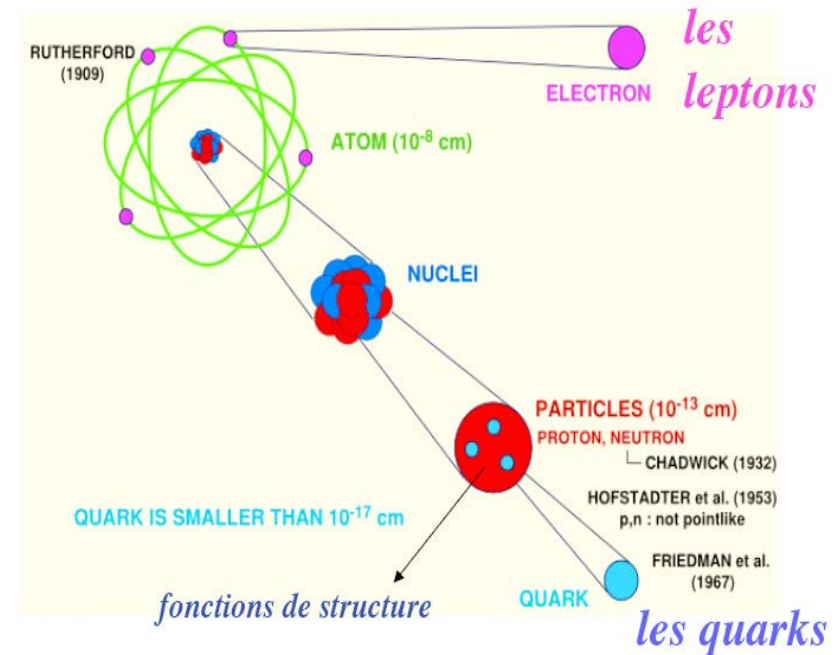
Actinide series

89 Ac Actinium (227.027752)	90 Th Thorium 232.038055	91 Pa Protactin. 231.035884	92 U Uranium 238.02891	93 Np Neptunium (237.048173)	94 Pu Plutonium (244.064204)	95 Am Americ. (243.061381)	96 Cm Curium (247.070354)	97 Bk Berkelium (247.070307)	98 Cf Californ. (251.079587)	99 Es Einstein. (252.08298)	100 Fm Fermium (257.085105)	101 Md Mendelev. (258.098431)	102 No Nobelium (259.1010)	103 Lr Lawrenc. (262.1096)
-----------------------------------	--------------------------------	-----------------------------------	------------------------------	------------------------------------	------------------------------------	----------------------------------	---------------------------------	------------------------------------	------------------------------------	-----------------------------------	-----------------------------------	-------------------------------------	----------------------------------	----------------------------------

Tema 1 EXTRA:

Introducció a la física nuclear i de partícules

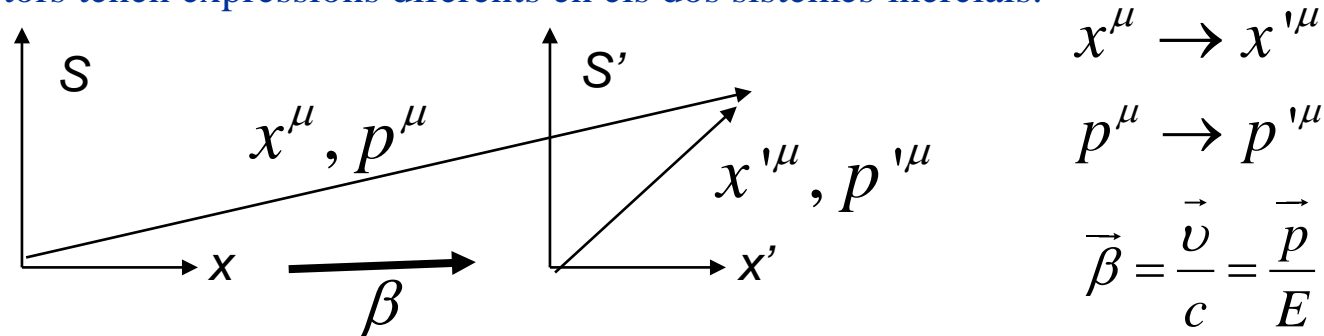
Repàs de cinemàtica relativista
Repàs del moment angular



Repàs de cinemàtica relativista

Boost de Lorentz, quadrivectors

Siguen dos sistemes de referència inercials S i S' tals que el segon es mou a velocitat $\beta=v/c$ (anomenat *boost*) sobre l'eix x respecte del primer i tal que en $t=0$ ambdós orígens coincideixen (figura): els quadrivectors tenen expressions diferents en els dos sistemes inercials.



Un punt espaciotemporal tindrà en aquests dos sistemes les coordenades $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ que vindran relacionades per les transformacions de Lorentz:

$$\begin{aligned}
 t &\rightarrow t' = \gamma(t - \beta x / c) \\
 x &\rightarrow x' = \gamma(x - \beta t c) \\
 y &\rightarrow y' = y \\
 z &\rightarrow z' = z
 \end{aligned}
 \quad
 \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}
 \quad
 \begin{aligned}
 \beta &\rightarrow [0, 1] \\
 \gamma &\rightarrow [0, \infty]
 \end{aligned}$$

En general, una magnitud $A^\mu = (a_0, a_x, a_y, a_z) = (a_0, \vec{a})$ és un quadrivector (contravariant en aquest cas) si sota una transformació d'un "boost" (amb $\mathbf{v} \parallel \mathbf{x}$) es transforma com a:

$$a'_0 = \gamma(a_0 - \beta a_x), \quad a'_x = \gamma(a_x - \beta a_0), \quad a'_y = a_y, \quad a'_z = a_z$$

Les components espacials perpendiculars al *boost* romanen inalterades.

Com per exemple el quadrivector moment-energia $p^\mu \rightarrow p'^\mu$ les components del qual i la seua transformació és:

$$\begin{aligned}
 E &\rightarrow E' = \gamma(E - \beta p_x / c) \\
 p_x &\rightarrow p'_x = \gamma(p_x - \beta E c) \\
 p_y &\rightarrow p'_y = p_y \\
 p_z &\rightarrow p'_z = p_z
 \end{aligned}
 \qquad p^\mu \rightarrow p'^\mu$$

Exemples de quadriectors i les seues components:

$$x^\mu = (ct, \vec{x}), \quad v^\mu = \gamma(c, \vec{v}), \quad p^\mu = (E/c, \vec{p})$$

Observeu que quan la velocitat $v \rightarrow 0$, les transformacions de Lorentz es redueixen a les de Galileo clàssiques. Les transformacions de Lorentz tenen estructura de grup i el producte de transformacions és així mateix una altra transformació de Lorentz.

Producte escalar. Invariants relativistes Lorentz

El tensor mètric $g = g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ és diagonal i és (mètrica de Minkowski):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

... que ens permet definir productes escalars entre els quadrivectors:

$$A^\mu = (a_0, a_x, a_y, a_z) = (a_0, \vec{a}), \quad B^\mu = (b_0, \vec{b}) \quad \text{Quadrivector contravariants}$$

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu = (a_0, -\vec{a}), \quad B_\mu = g_{\mu\nu} B^\nu = (b_0, -\vec{b}) \quad \text{Quadrivector covariants}$$

$$A \cdot B = A^\mu B^\nu g_{\mu\nu} = A^\mu B_\mu = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

On la part espacial del producte escalar és: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab \cos \theta$

Tots els productes escalars de quadrivectors $A^2 = A \cdot A$ són un invariant sota les transformacions relativistes de Lorentz: tenen el mateix valor en **TOTS** els sistemes de referència inercials (LAB, CM,...). Exemples molt útils:

Massa en repòs: $p^2 = p^\mu p_\mu = E^2 / c^2 - \vec{p}^2 \equiv m_0^2 c^2$

Temps propi: $x^2 = x^\mu x_\mu = c^2 t^2 - \vec{x}^2 \equiv c^2 \tau^2 \longrightarrow$

Un 4-vector amb norma L^2 es classifica com a:

Time-like si $L^2 > 0$

Space-like si $L^2 < 0$

Light-like si $L^2 = 0$

Si la partícula està en repòs en un punt espacial, per exemple en $\vec{x} = 0$, el seu temps de vida rep el nom de **temps propi τ** que és un **invariant**.

Exemples

Considerem un protó amb un moment de 10 GeV/c en el sistema del LAB

1) Quina és la seua energia en el sistema LAB? Agafem per senzillesa

$$c = 1$$

$$m_o^2 = E^2 - \vec{p}^2 \quad m_o = 938 \text{ MeV}/c^2$$

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 + m_o^2} = \sqrt{10^2 + 0.938^2} = 10.044 \text{ GeV}$$

Veiem que quan es treballa a altes energies ($E \gg m_o c^2$) $E \approx |\vec{p}|$ el moment i l'energia coincideixen, cosa que no ocorre a baixes energies.

2) Quina és la seua velocitat en el sistema LAB?

$$E_{lab} = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \gamma m_o c^2 \quad p_{lab} = \frac{m_o v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \gamma \beta m_o c \quad \beta = v/c, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$p_{lab} / E_{lab} = \gamma \beta m_o c / \gamma m_o c^2 = \beta = 10 / 10.044 = 0.996$$

$v = 0.996c$ (a prop de la velocitat de la llum!)

El protó de 10 GeV disposa d'una energia 10 vegades la seua massa i per tant és relativista.

Per a un electró de 2 MeV en el LAB, $v=0.969c$, mentre que $v=0.0021c$ per al protó, és a dir, els electrons són relativistes a baixes energies mentre que els protons necessiten altes energies, donat que la massa de l'electró és ~2000 vegades menor que la del protó.

Invariants Lorentz i magnituds conservades

Magnituds invariants Lorentz

Les magnituds que són invariants de Lorentz tenen exactament el mateix valor en dos sistemes de referència inercials diferents (cosa que ocorre per a tots els productes escalars):

- Siga E_{LAB} i \mathbf{p}_{LAB} l'energia i el moment d'una partícula determinats en el sistema LAB.
- Siga E_{CM} i \mathbf{p}_{CM} l'energia i el moment de la dita partícula, ara però determinats en el sistema CM.
- Aleshores $p_{\text{CM}}^2 = E_{\text{CM}}^2 - \mathbf{p}_{\text{CM}}^2 = E_{\text{LAB}}^2 - \mathbf{p}_{\text{LAB}}^2 = p_{\text{LAB}}^2$, ja que $(E, \mathbf{p})^2$ és un invariant de Lorentz:

De fet, $E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m^2 c^4$ on m és la massa en repòs de la partícula.

Magnituds conservades

Es diu que una **magnitud és conservada** si sempre té el mateix valor en el mateix sistema de referència però **en temps diferents**: Siga un sistema de dues partícules que interaccionen:

- Siga $p_{i,\text{LAB}}$ el quadrimoment total inicial en el LAB (abans de la col·lisió)
- Siga $p_{f,\text{LAB}}$ el quadrimoment total final en el LAB (després de la col·lisió)
- Siga $p_{i,\text{CM}}$ el quadrimoment total inicial en el CM: $p_{i,\text{CM}} = (E_{1,\text{CM}} + E_{2,\text{CM}}, \vec{0})$ (abans de la col·lisió)
- Siga $p_{f,\text{CM}}$ el quadrimoment total final del CM (després de la col·lisió): $p_{f,\text{CM}} = (E_{1,\text{CM}} + E_{2,\text{CM}} + \dots, \vec{0})$ (després).
- La conservació del quadri-momentum ens diu que:

$p_{i,\text{LAB}} = p_{f,\text{LAB}}$ i $p_{i,\text{CM}} = p_{f,\text{CM}}$ PERÒ NO $p_{i,\text{LAB}} = p_{f,\text{CM}}$, perquè els quadrimoments es transformen mitjançant les transformacions de Lorentz.

Col·lisió de feixos enfront de col·lisions amb un blanc fix $c = 1$

- La producció de noves partícules en una col·lisió depèn de l'energia disponible en el CM, ja que en el sistema LAB, per exemple, l'energia s'usa en part per a crear partícules i en l'energia cinètica del centre de masses.
- Quina és l'energia disponible en el CM per a una col·lisió d'un antiprotó de 10 GeV/c amb un protó en repòs? Calculem la variable s (de Mandelstam) que dona el quadrat de l'energia en CM:

$$(p_{1,CM} + p_{2,CM})^2 = (E_{1,CM} + E_{2,CM}, \vec{0})^2 = E_{CM}^2 \equiv s$$

- Com que $s = (p_1 + p_2)^2$ és un **invariant Lorentz** el podem calcular en qualsevol sistema de referència. El calculem ara en el sistema LAB:

$$s = (p_{1,LAB} + p_{2,LAB})^2 = (E_{1,LAB} + m_p)^2 - \vec{p}_{1,LAB}^2 = 2m_p^2 + 2m_p E_{1,LAB} = 20.6 \text{ GeV}^2$$

- Per ser s invariant i representar l'energia en CM \rightarrow l'energia total en el CM és 4.54 GeV
- Podríem obtenir la mateixa energia fent col·lidir un feix d'antiprotons de 2.27 GeV amb un feix de protons també de la mateixa energia (2,27 GeV).

$$s = (p_{1,LAB} + p_{2,LAB})^2 = (E_{LAB} + E_{LAB}, \vec{p}_{LAB} - \vec{p}_{LAB})^2 = (2E_{LAB})^2 = 20,6 \text{ GeV}^2$$

- Així doncs, l'energia “útil”, disponible per a la producció de noves partícules s'incrementa com a:

$(2m_{\text{target}}E_{\text{beam}})^{1/2}$ per a experiments amb el blanc fix.
 $2E_{\text{beam}}$ per a experiments de col·lisió de feixos
 (amb $\vec{p}_{\text{tot}} = 0$, és a dir, en CM).

La col·lisió de feixos en CM és molt més eficient per a la producció de noves partícules pesants.

Cinemàtica relativista en les col·lisions entre partícules

- **Consideracions principals:** Per a resoldre problemes en què hem d'usar cinemàtica relativista s'han de fer les consideracions prèvies que puguin simplificar els càlculs, com ara:

- La conservació energia-moment \rightarrow sol ser un ingredient bàsic en els càlculs.
- Els invariants Lorentz \rightarrow solen simplificar el plantejament matemàtic.

Energia al CM, moment transferit...

Cal triar el sistema de referència que simplifiqui els càlculs.

- Siga ara el cas general d'una col·lisió de partícules $a+b \rightarrow c+d+e+f...$. En el cas en què no hi ha forces exteriors al sistema s'ha de conservar l'energia global i el moment. Aquestes **magnituds conservades** vénen definides pel quadrimoment energia-moment p :

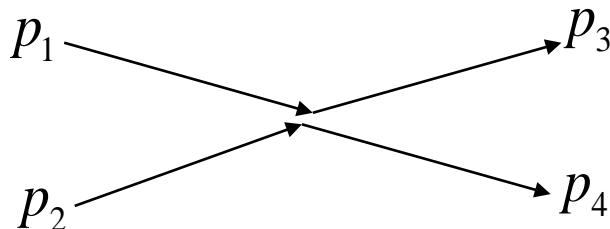
$$p_{tot} = p_a + p_b = p_c + p_d + p_e + p_f + \dots$$

- Magnituds **que es conserven** sempre abans i després de la interacció, però valors que no són iguals en diferents sistemes inercials, com ara el sistema CM i el LAB.

- Podem utilitzar també **magnituds invariants**, és a dir, aquelles que tenen el mateix valor en sistemes inercials distints. En general ho són tots els productes escalars. Així:

$$s = E_{CM}^2 = (p_a + p_b)^2 = (p_c + p_d + p_e + p_f + \dots)^2$$

- Considerem el cas més senzill en què en l'estat final hi ha tan sols dues partícules $2 \rightarrow 2$



$$p_{tot} = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$$

Conservació energia-moment en tot sistema

$$s = E_{CM}^2 = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$$

Magnituds invariants en sistemes distints

- Altres magnituds invariants d'ús habitual són les variables de Mandelstam, s , t i u que es defineixen com a:

$$s = E_{CM}^2 = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2$$

Es pot demostrar que en aquest cas $2 \rightarrow 2$:

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2$$

que són utilitzades per exemple en els càlculs dels diagrames de Feynman (diagrames d'encreuament).

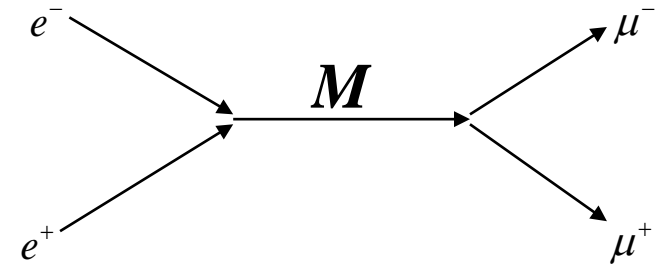
- Exemple:** Considerem per exemple l'aniquilació partícula-antipartícula com es veu en el diagrama.

$$p_{tot} = p_1 + p_2 = p_3 + p_4 = (E/c, \vec{p})_{tot} \quad \text{en LAB}$$

Magnituds conservades en cada sistema (no iguals en sistemes diferents) i que en sistema de CM es podran escriure com:

$$p_{tot} = p_1 + p_2 = (E_1 + E_2, \vec{0}) = (M, \vec{0}) \Rightarrow$$

$$s = E_{CM}^2 = (p_1 + p_2)^2 = M^2 > 0 \quad \text{Time-like vector}$$



On hem aplicat la invariància dels productes escalars. Considerant ara la conservació en el sistema de referència de CM:

$$p_{tot} = (M, \vec{0}) = p_3 + p_4 \Rightarrow \vec{p}_3 = -\vec{p}_4 \quad \text{Per conservació del moment}$$

I si les dues partícules finals tenen la mateixa massa: $E_3 = E_4 = M/2$

Exemple: descobriment de l'antiprotó

- A principis dels anys 1950 molts laboratoris intentaven trobar evidència de l'existència de l'antiprotó.
- Si assumim col·lisions d'un feix de protons amb un blanc fix de protons, quina hauria de ser l'energia mínima del feix per a poder crear antiprotons?
- La reacció més senzilla que conserva totes les quantitats necessàries (energia, moment, càrrega elèctrica, nombre bariònic) és $pp \rightarrow p\bar{p}pp$
- Com que s és un invariant Lorentz i a més p_{total} es conserva en cada sistema, podem escriure

$$s = E_{CM}^2 = (p_{\text{feix}} + p_{\text{blanc}})^2 = (p_1 + p_2 + p_3 + p_4)^2$$

- El primer terme pot ser calculat al sistema laboratori i el segon en el CM per ser invariants:

$$\begin{aligned} s = E_{CM}^2 &= (p_{\text{feix}} + p_{\text{blanc}})^2 = (E_p + m_p, \vec{p}_{p,\text{inc}})^2 = (E_p + m_p)^2 - \vec{p}_{p,\text{inc}}^2 = \\ &= E_p^2 + m_p^2 + 2m_p E_p - \vec{p}_{p,\text{inc}}^2 = 2m_p^2 + 2m_p E_p \\ (p_1 + p_2 + p_3 + p_4)^2 &= (E_1 + E_2 + E_3 + E_4)^2 \geq (4m_p)^2 \end{aligned}$$

- La mínima energia necessària del feix serà aquella per a la qual les 4 partícules finals en el sistema CM estiguen totes en repòs i per tant: $2m_p^2 + 2E_p m_p = (4m_p)^2 \Rightarrow E_p = 7m_p = 6.6 \text{ GeV}$

- L'antiprotó va ser descobert en Berkeley en 1955 (Nobel Prize 1959)

$$\left[E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} = T_c + mc^2 \right]$$

Exercici: A l'històric experiment de Segrè, $p + p \rightarrow \bar{p} + p + p + p$:

- Calcular l'energia **cinètica** T_p **mínima** del protó incident en el sistema laboratori.
- Quin és el valor d'aquesta **energia cinètica** en el centre de masses, $T_p(\text{cm})$, de cada protó?
- En què s'inverteix l'excés d'**energia cinètica** en el sistema del lab? Demostreu-ho.

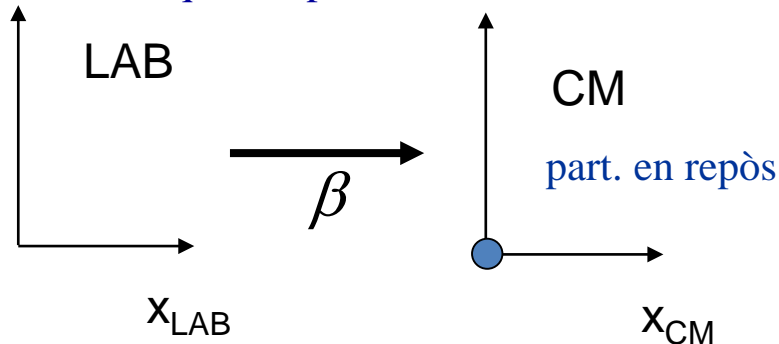
Dilatació del temps

- La major part de les partícules no són estables. Per exemple en els leptons:

Leptó	t : Vida mitjana (s)
electró	estable
muó (μ)	$\approx 2 \times 10^{-6}$
taó (τ)	$\approx 3 \times 10^{-13}$

on la vida mitjana és la que correspon al sistema de referència en repòs de la partícula (temps propi).

- Què ocorre quan la partícula està en moviment respecte del nostre sistema de referència?



$$t_{LAB} = \gamma(t_{CM} + \beta x_{CM} / c)$$

$$x_{LAB} = \gamma(x_{CM} + \beta c t_{CM})$$

Suposem que el μ apareix i es desintegra a l'origen de coordenades del sistema CM: $x_{2,CM} = x_{1,CM} = 0$

En el sistema LAB el temps fins a la desintegració de la partícula seria:

$$\tau_{LAB} = t_{2,LAB} - t_{1,LAB} = \gamma(t_{2,CM} + \beta x_{2,CM} / c) - \gamma(t_{1,CM} + \beta x_{1,CM} / c) = \gamma(t_{2,CM} - t_{1,CM}) = \gamma\tau$$

Per tant, $\tau_{lab} > \tau \Rightarrow$ Dilatació del temps partícules en moviment

- Exemple:** Considerem un muó ($m_0 = 0.106 \text{ GeV}/c^2$) amb energia 1 GeV en el LAB. Quina serà la seua vida mitjana observada en el LAB, i quin serà l'espai recorregut de mitjana?

$$\gamma = E/(m_0 c^2) = 1/0.106 \approx 10, \quad \gamma\beta = p/(m_0 c) \approx 1/0.106 \approx 10$$

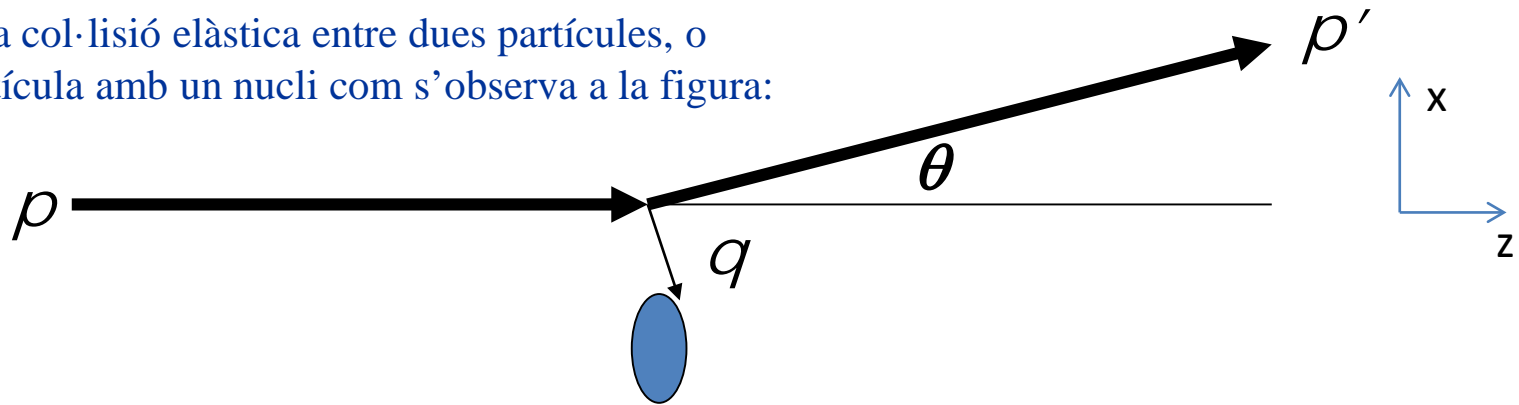
$$\tau_{lab} = \gamma\tau = (10)(2 \text{ } \mu\text{sec}) = 20 \text{ } \mu\text{sec}$$

$$\Delta x_{lab} = \gamma\beta c \tau = 10c \tau = (10)(3 \times 10^8 \text{ m/s})(2 \times 10^{-6} \text{ s}) = 6 \times 10^3 \text{ m}$$

Calculeu la contracció espacial en el sistema en què el μ està en repòs i és l'atmosfera la que està en moviment.

Transferència de moment en la dispersió elàstica

Siga una col·lisió elàstica entre dues partícules, o una partícula amb un nucli com s'observa a la figura:



Representem per q el quadri-momentum transferit al nucli i per p' el quadri-momentum de la partícula difosa elàsticament. Usant les variables de Mandelstam: $t = q^2 = (p' - p)^2$ on a més:

$$p = (E, 0, 0, \vec{p}) = (\sqrt{\vec{p}^2 + m_0^2}, 0, 0, |\vec{p}|) \quad p' = (\sqrt{\vec{p}^2 + m_0^2}, |\vec{p}| \sin \theta, 0, |\vec{p}| \cos \theta)$$

$$q = p' - p = (0, |\vec{p}| \sin \theta, 0, |\vec{p}|(\cos \theta - 1)) \rightarrow$$

$$q^2 = -|\vec{p}|^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 1 - 2 \cos \theta) = 2|\vec{p}|^2 (\cos \theta - 1)$$

$$= -4|\vec{p}|^2 \sin^2(\theta/2)$$

< 0 → Space-like!

El quadrimoment transferit és un vector del tipus espacial.

Repàs de moment angular

Operadors de moment angular

Un operador de moment angular \mathbf{j} es defineix com un conjunt de tres operadors (j_x, j_y, j_z) , que satisfà les relacions cícliques de commutació

$$[j_x, j_y] = ij_z, \quad [j_y, j_z] = ij_x, \quad [j_z, j_x] = ij_y$$

A partir d'aquestes relacions es verifica que $[\mathbf{j}^2, j_z] = 0$ $\mathbf{j}^2 = j_x^2 + j_y^2 + j_z^2$

Per això és possible trobar un conjunt complet de funcions pròpies de \mathbf{j} i j_z . Aquestes autofuncions depenen de l'espai en què els operadors de moment angular actuen, i normalment són autofuncions linealment independents amb el mateix autovalor. La degeneració es trenca introduint observables addicionals, Γ , de manera que les autofuncions de Γ , \mathbf{j} , i j_z estan completament determinades pels corresponents números quàntics.

Utilitzant les relacions de commutació

$$\mathbf{j}^2 |\gamma jm\rangle = j(j+1) |\gamma jm\rangle, \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

$$j_z |\gamma jm\rangle = m |\gamma jm\rangle, \quad m = -j, -j+1, \dots, j$$

$$(j_x \pm ij_y) |\gamma jm\rangle = e^{i\delta} [(j \mp m)(j \pm m + 1)]^{1/2} |\gamma jm \pm 1\rangle$$

$e^{i\delta}$ és una fase arbitrària que normalment s'agafa 1 (convenció de Condon i Shortley)

Moment angular orbital

El moment angular orbital es descriu mitjançant l'operador:

$$\mathbf{l} = -i\mathbf{r} \times \nabla$$

Les autofuncions simultànies de \mathbf{l}^2 i l_z són els harmònics esfèrics

$$Y_{lm_l}(\theta, \phi)$$

$$Y_{lm_l}(\theta, \phi) = (-1)^{m_l} \left[\frac{(2l+1)(l-m_l)!}{4\pi(l+m_l)!} \right]^{1/2} P_l^{m_l}(\cos \theta) e^{im_l \phi}$$

$$Y_{l-m_l}(\theta, \phi) = (-1)^{m_l} Y_{lm_l}(\theta, \phi)$$

$$P_l^{m_l}(\cos \theta) \quad \text{Polinomis associats de Legendre}$$

Perquè els harmònics esfèrics siguin únics, m_l i per tant l han de ser enters, de manera que

$$\mathbf{l}^2 Y_{lm_l}(\theta, \phi) = l(l+1) Y_{lm_l}(\theta, \phi)$$

$$l_z Y_{lm_l}(\theta, \phi) = m_l Y_{lm_l}(\theta, \phi)$$

$$l = 0, 1, 2, \dots \quad m_l = -l, -l+1, \dots, l$$

NOTA: El moment angular orbital s'origina sempre que tenim un sistema de dues o més partícules (elementals, nucleons, nuclis, etc.) independentment del moment angular d'espín que aquestes exhibeixen.

Table: Spherical harmonics

$$Y_{00}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_{1\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}$$

$$Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$$Y_{2\pm 2}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm i2\varphi}$$

$$Y_{2\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\varphi}$$

$$Y_{20}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

Moment angular d'espín

A més del moment angular orbital, les partícules tenen moment angular d'espín. L'espín és un moment angular intrínsec (introduït empíricament en 1925 per Uhlenbeck i Goudsmit i posteriorment demostrat per Dirac com una conseqüència de les propietats relativistes de l'electró) que implica que la partícula no està només caracteritzada per les seues coordenades espacials sinó que té un grau de llibertat més.

Les autofuncions simultànies de s^2 i s_z es denoten $\chi_{m_s}(\sigma)$ σ : coordenada d'espín

$$s^2 \chi_{m_s}(\sigma) = s(s+1) \chi_{m_s}(\sigma) \quad s_z \chi_{m_s}(\sigma) = m_s \chi_{m_s}(\sigma) \quad \chi_{m_s}(\sigma) = \delta_{m_s \sigma}$$

Per a espín $1/2$ (com l'electró), $\sigma = \pm 1/2$, la funció d'ones total serà:

$$\phi(\mathbf{r}, \sigma) = \phi_1(\mathbf{r}) \chi_{1/2}(\sigma) + \phi_2(\mathbf{r}) \chi_{-1/2}(\sigma) \quad \sum_{\sigma=\pm 1/2} |\phi(\mathbf{r}, \sigma)|^2 dr = 1$$

$$|\phi(\mathbf{r}, 1/2)|^2 dr = |\phi_1(\mathbf{r})|^2 dr$$

$$|\phi(\mathbf{r}, -1/2)|^2 dr = |\phi_2(\mathbf{r})|^2 dr$$

Probabilitat de trobar la partícula en l'element de volum dr centrat en \mathbf{r} amb espín up i espín down.

Acoblament de dos moments angulars

Dos moments angulars \mathbf{j}_1 i \mathbf{j}_2 actuant sobre diferents parts d'un sistema, per exemple dos electrons, o la part espacial i d'espí de l'electró, s'acoblen per a formar un:

operador de moment angular total: $\mathbf{j} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2$

Els operadors $\mathbf{J}, \mathbf{j}_1^2, \mathbf{j}_2^2, j_z$ defineixen un conjunt complet d'observables que commuten. Les autofuncions simultànies $|\gamma_1 \gamma_2 j_1 j_2 JM\rangle$ corresponents a aquest conjunt s'obtenen a partir de la combinació lineal

$$|\gamma_1 \gamma_2 j_1 j_2 JM\rangle = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1 + m_2 = M}} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 JM \rangle |\gamma_1 j_1 m_1\rangle |\gamma_2 j_2 m_2\rangle$$

$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 JM \rangle$ són els coeficients de Clebsch-Gordan, i són tremendament importants, ja que ens donen la intensitat de l'acoblament de les diferents components de moment angular.

Amb les convencions de fase habituals, els coeficients de CG són reals i defineixen una matriu unitària. Per tant, es verifiquen les següents relacions d'ortonormalitat:

$$\sum_{m_1, m_2} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 JM \rangle \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J' M' \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'}$$

$$\sum_{J, M} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 JM \rangle \langle j_1 j_2 m'_1 m'_2 | j_1 j_2 JM \rangle = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}$$

A més, els coeficients de CG tenen la següent important propietat de simetria:

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 JM \rangle = (-1)^{j_1 + j_2 - j_3} \langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_1 j_2 JM \rangle$$

Coeficients de Clebsch-Gordan

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

J	J	...
M	M	...
m_1	m_2	
m_1	m_2	Coefficients
.	.	
.	.	

$$1/2 \times 1/2$$

1		
+1	1	0
+1/2 + 1/2	1	0
+1/2 - 1/2	1/2	1/2
-1/2 + 1/2	1/2	-1/2
-1/2 - 1/2	1	

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$$

$$2 \times 1/2$$

5/2		
+5/2	5/2	3/2
+2 + 1/2	1	+3/2 + 3/2
+2 - 1/2	1/5	4/5
+1 + 1/2	4/5 - 1/5	+1/2 + 1/2

$$3/2 \times 1/2$$

2		
+2	2	1
+3/2 + 1/2	1	+1
+3/2 - 1/2	1/4	3/4
+1/2 + 1/2	3/4 - 1/4	0
+1/2 - 1/2	1/2	1/2
-1/2 + 1/2	1/2 - 1/2	-1
-1/2 - 1/2	3/4	1/4
-3/2 + 1/2	1/4 - 3/4	-2
-3/2 - 1/2	1	

$$1 \times 1/2$$

3/2		
+3/2	3/2	1/2
+1 + 1/2	1	+1/2 + 1/2
+1 - 1/2	1/3	2/3
0 + 1/2	2/3 - 1/3	-1/2 - 1/2
0 - 1/2	2/3	1/3
-1 + 1/2	1/3 - 2/3	-3/2
-1 - 1/2	1	

$$2 \times 1$$

3		
+3	3	2
+2 + 1	1	+2
+2 0	1/3	2/3
+1 + 1	2/3 - 1/3	+1
+2 - 1	1/15	1/3
+1 0	8/15	1/6 - 3/10
0 + 1	2/5 - 1/2	1/10
0 - 1	2/5	-1/2
-1 + 1	1	

$$3/2 \times 1$$

5/2		
+5/2	5/2	3/2
+3/2 + 1	1	+3/2 + 3/2
+3/2 0	2/5	3/5
+1/2 + 1	3/5 - 2/5	+1/2 + 1/2
+3/2 - 1	1/10	2/5
+1/2 0	3/5	1/15 - 1/3
-1/2 + 1	3/10 - 8/15	1/6
+1/2 - 1	3/10	8/15
-1/2 0	3/5	-1/15 - 1/3
-3/2 + 1	1/10	-2/5
-1/2 - 1	3/5	-1/2

$$1 \times 1$$

2		
+2	2	1
+1 + 1	1	+1
+1 0	1/2	1/2
0 + 1	1/2 - 1/2	0
+1 - 1	1/6	1/2
0 0	2/3	0 - 1/3
-1 + 1	1/6 - 1/2	1/3
0 - 1	1/2	1/2
-1 0	1/2 - 1/2	-2
-1 - 1	1	

$$Y_{\ell}^{-m} = (-1)^m Y_{\ell}^{m*}$$

$$d_{m,0}^{\ell} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_{\ell}^m e^{-im\phi}$$

$$\begin{aligned} & \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M \rangle \\ &= (-1)^{J-j_1-j_2} \langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M \rangle \end{aligned}$$

Operadors tensorials esfèrics

Els operadors de moment angular no sols s'usen per a classificar funcions d'ona (autofuncions), sinó també són operadors que actuen sobre aquestes funcions.

Si T denota un operador genèric actuant sobre l'espai de les autofuncions de l'operador de moment angular \mathbf{j} , definim un operador tensorial esfèric de rang k , $\mathbf{T}^{(k)}$, com el conjunt de $2k+1$ operadors que satisfan les següents relacions de commutació:

$$\{T_q^{(k)}; q = -k, -k+1, \dots, k\}$$

$$[j_z, T_q^{(k)}] = q T_q^{(k)}$$

$$j_{\pm} = j_x \pm i j_y$$

$$[j_{\pm}, T_q^{(k)}] = [k(k+1) - q(q \pm 1)]^{1/2} T_{q \pm 1}^{(k)}$$

Els harmònics esfèrics renormalitzats $C_q^{(k)}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}} Y_{kq}(\theta, \phi)$ verifiquen aquestes regles

de commutació, i per això són operadors tensorials esfèrics.

Un altre exemple important és l'operador vectorial \mathbf{V} . Per definició, les components cartesianes d'un operador vectorial es transformen com les coordenades espacials x, y, z sota rotacions. A partir d'aquestes propietats de transformació, s'observa que:

$$V_1^{(1)} = -(V_x + iV_y) / \sqrt{2}$$

$$V_0^{(1)} = V_z$$

$$V_{-1}^{(1)} = -(V_x - iV_y) / \sqrt{2}$$

defineix un operador tensorial esfèric de rang 1. Per tant, els operadors de moment angular poden escriure's com a operadors tensorials esfèrics de rang 1.

Operadors escalars

Un operador T que commuta amb totes les components de l'operador de moment angular és un operador escalar, o bé un operador de rang 0.

És fàcil provar que els elements de matriu de T són diagonals en j i m ,

$$\langle \gamma j m | T | \gamma' j' m' \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \langle \gamma j m | T | \gamma' j m \rangle$$

A més, els elements de matriu són independents de m .

Tema 2:

Radiacions, interacció amb matèria i aplicacions

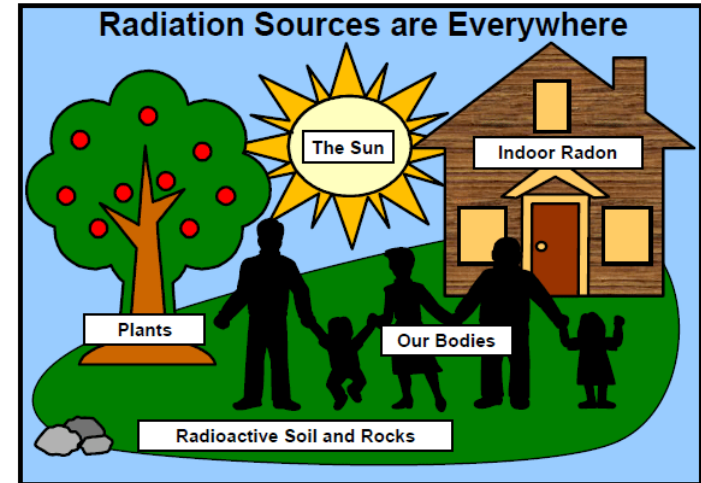
<http://radiationhormesis.com/charts/>

1. Fonts de radiació i els seus tipus

- 1.1 Classificació de les radiacions ionitzants i tipus de fonts
- 1.2 Elements radioactius naturals
- 1.3 Llei de desintegració radioactiva, semivida i activitat
- 1.4 Activitats parcials
- 1.5 Sèries de radioactivitat natural
- 1.6 Desintegració en cadena
- 1.7 Equilibri ideal, secular i transitori
- 1.8 Equacions de Bateman
- 1.9 Radioactivitat artificial. Aplicacions
- 1.10 Fonts de desintegració α , β^+ i β^-
- 1.11 Radiació d'aniquilació i captura electrònica
- 1.12 Fonts de radiació γ i conversió interna
- 1.13 Raigs X
- 1.14 Raigs còsmics

2. Interacció de la radiació amb la matèria

- 2.1 Pèrdua d'energia de les partícules carregades
- 2.2 Poder de frenada
- 2.3 Fórmula de Bethe i Bloch
- 2.4 Poder de frenada en mescles i regles d'escala
- 2.5 Corba de Bragg
- 2.6 Abast i straggling



2.7 Altres processos de pèrdua d'energia:

radiació de Cerenkov i de transició

2.8 Raigs X i fotons: efecte fotoelèctric, Compton i producció de parells

2.9 Atenuació de fotons i coeficients màssics d'atenuació

3. Dosimetria

3.1 Magnituds i unitats metrològiques

3.2 Limitacions de dosi

4. Datació radioactiva

4.1 Datació arqueològica per ^{14}C

4.3 Datació geològica

1. Fonts de radiació i els seus tipus

Classificació de les radiacions ionitzants

Segons les característiques específiques del comportament de les partícules/nuclis quan travessen els medis materials i en conseqüència les seues característiques en interaccionar amb els materials/detectors, podem fer els següents grups i subgrups:

Partícules carregades	Electrons ràpids, μ Ions pesants: p, D, T, α , C, O, etc.
Partícules neutres	Radiació electromagnètica: raigs X, γ Neutrons

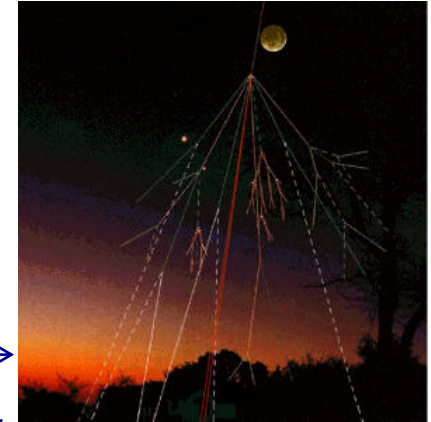
El concepte de “ió pesant” per al pas de la radiació a través de la matèria inclou fins i tot els protons. Aquest grup obeeix la llei de Bethe i Bloch per a la seua pèrdua d’energia en travessar un medi material.

Tipus de fonts

■ Fonts naturals

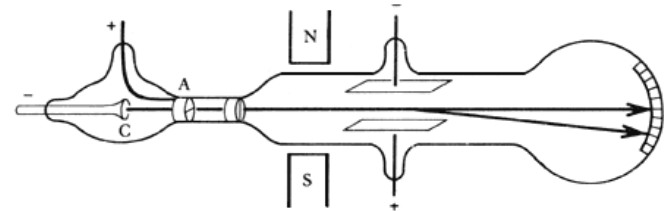
- Elements radioactius naturals. Són bàsicament:
 - Partícules α fins a ~ 8 MeV.
 - Partícules β (electrons o positrons) i γ fins a ~ 10 MeV.
- Rajos còsmics.

Cascada de radiació còsmica →



■ Fonts d'electrons

- Requeriments: alta intensitat de corrent, col·limació i llarga vida mitjana.
- Emissió termoiònica en metalls (usualment wolframí), seguida d'acceleració i empaquetatge per mitjà d'un parell d'elèctrodes (ànode i càtode).
 - Exemple: tub de rajos catòdics:



■ Fonts de ions

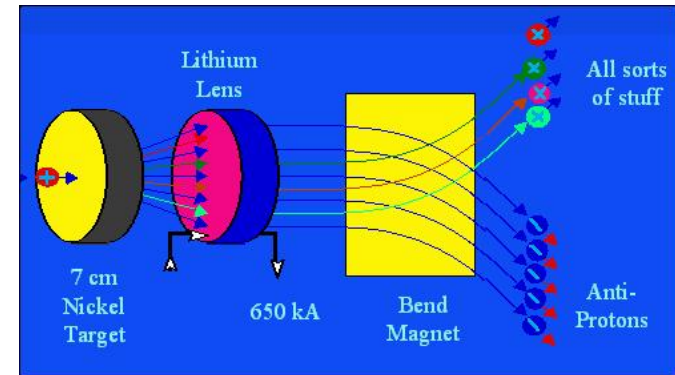
- Ionització d'un gas a molt baixa pressió (per a reduir i evitar recombinació) per col·lisions d'electrons en descàrregues gasoses. Corrent iònic + d'electrons primaris.
- També, ionització per arc en un gas a alta pressió. Corrent iònic + d'electrons de la ionització.
 - Plasmatró o duoplasmatró: alta densitat de corrent iònic (i electrònica) a causa de la creació d'un plasma d'alta densitat.
- Acceleració i empaquetatge, i camp magnètic per a separar els electrons de la descàrrega.
- **Protons** (hidrogen).

■ Fonts de positrons (antimatèria)

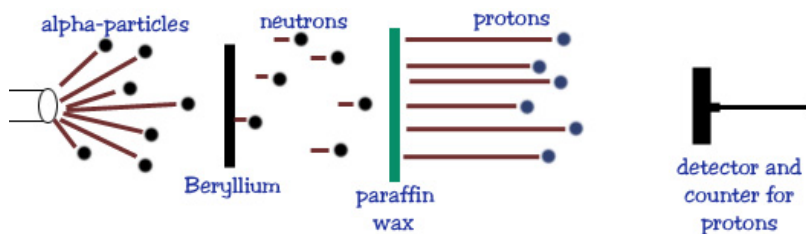
- Bombardeig d'un blanc (normalment wolframí) amb electrons \Rightarrow radiació de frenada \Rightarrow producció de parelles $e^+e^- \Rightarrow$ separació electrostàtica, preacceleració i acumulació.

■ Fonts d'antiprotons (antimatèria)

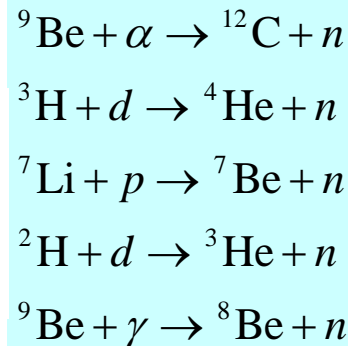
- Bombardeig d'un blanc (per exemple níquel) amb protons \Rightarrow separació, preacceleració i acumulació.
- Complexes i poc eficients (#antiprotons/#protons).
 - Exemple (Fermilab) = 20 anti - p/10⁶ p.



■ Fonts de neutrons:



*Experiment de Chadwick:
Descobrimet del neutró*



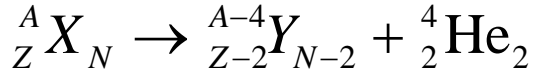
■ Reactors nuclears

- Producció de nuclis radioactius, emissors α , β , γ .
- Producció d'altres intensitats de neutrons i neutrins.



Elements radioactius naturals

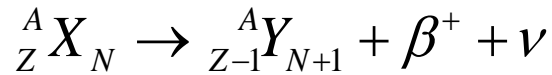
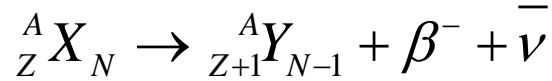
α



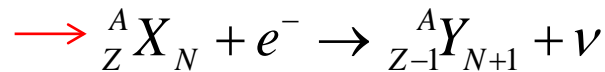
Processos que competeixen

Electrons que ja existeixen en l'àtom, abans de la desintegració

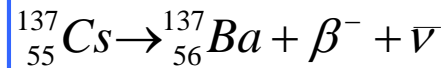
β



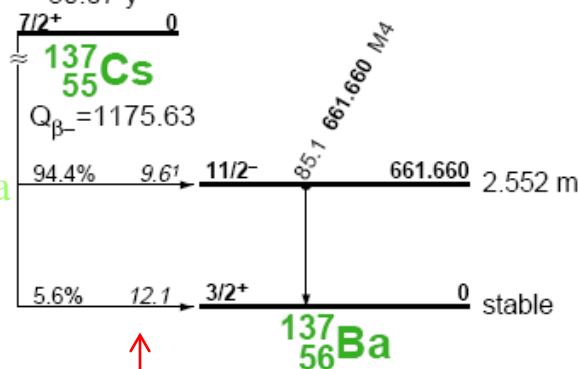
→ **Captura Electrónica (CE)**



Diagrames de nivells

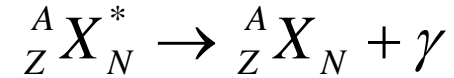


Semivida, a veure

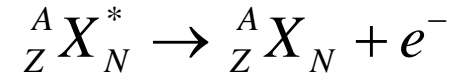


ft , model de Fermi, a veure

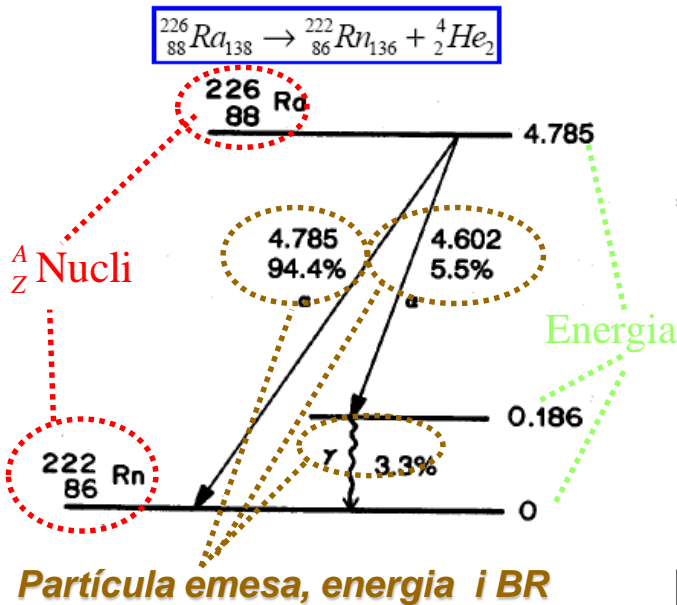
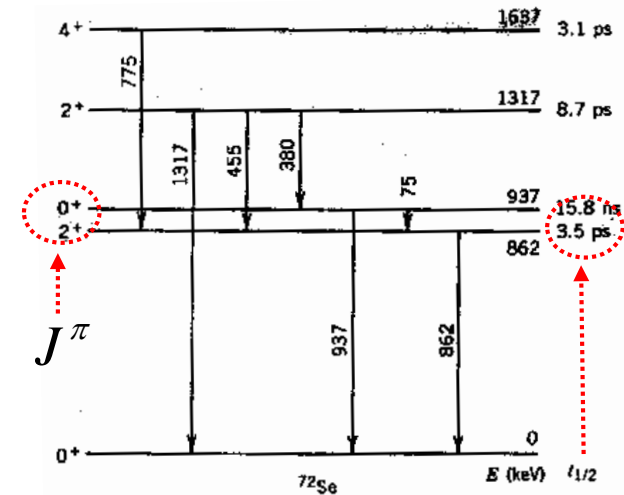
γ



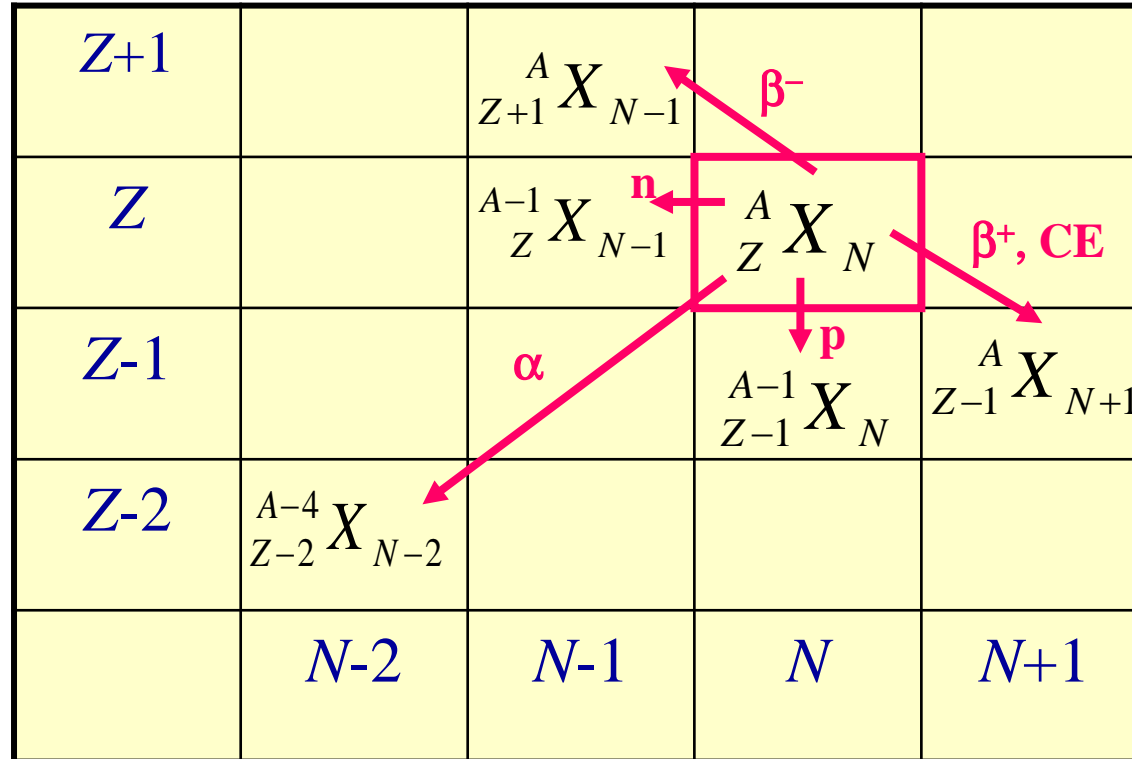
Conversió interna (CI)



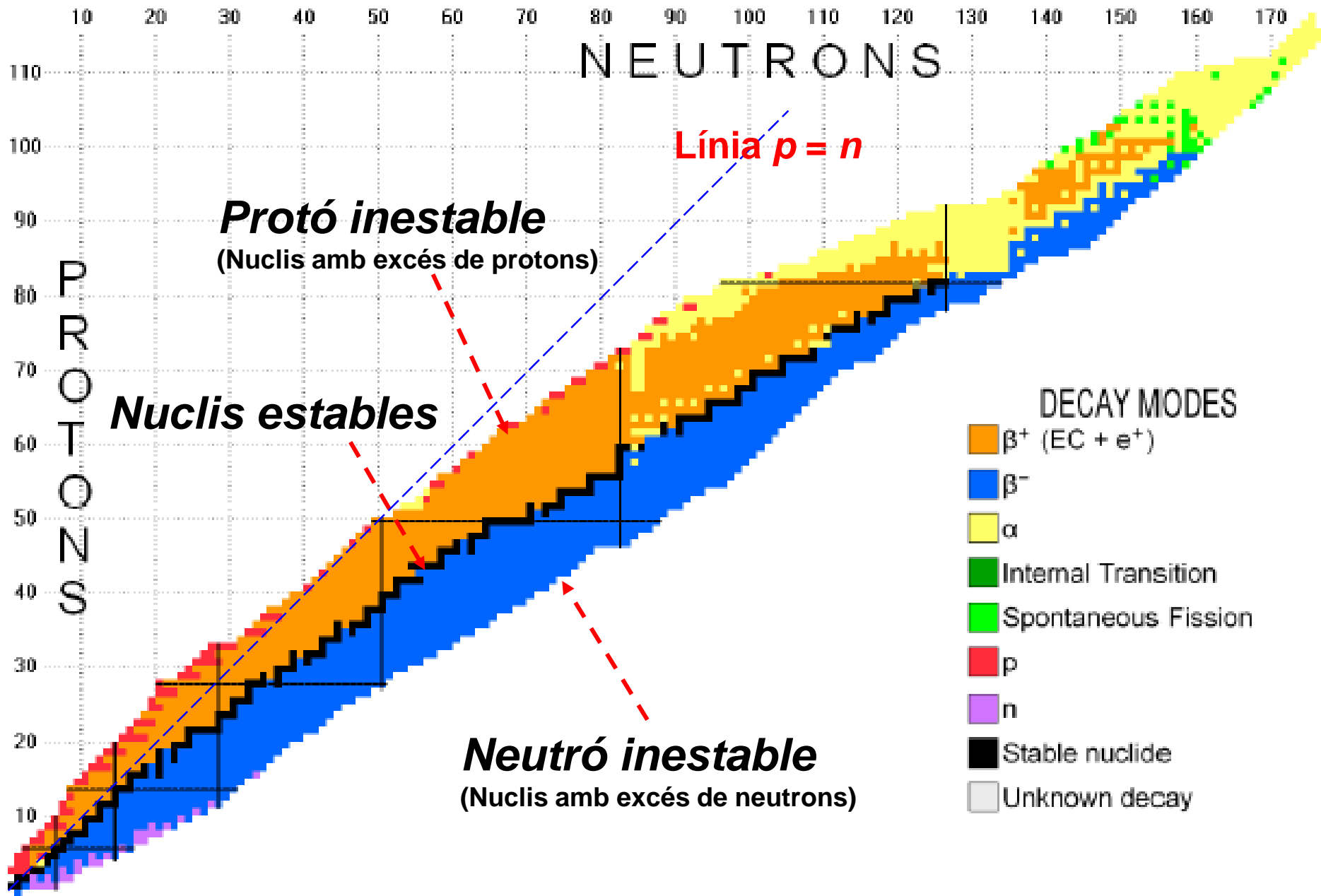
Alguns dels nivells del ${}^{72}\text{Se}$
(energies de les gamma en keV)

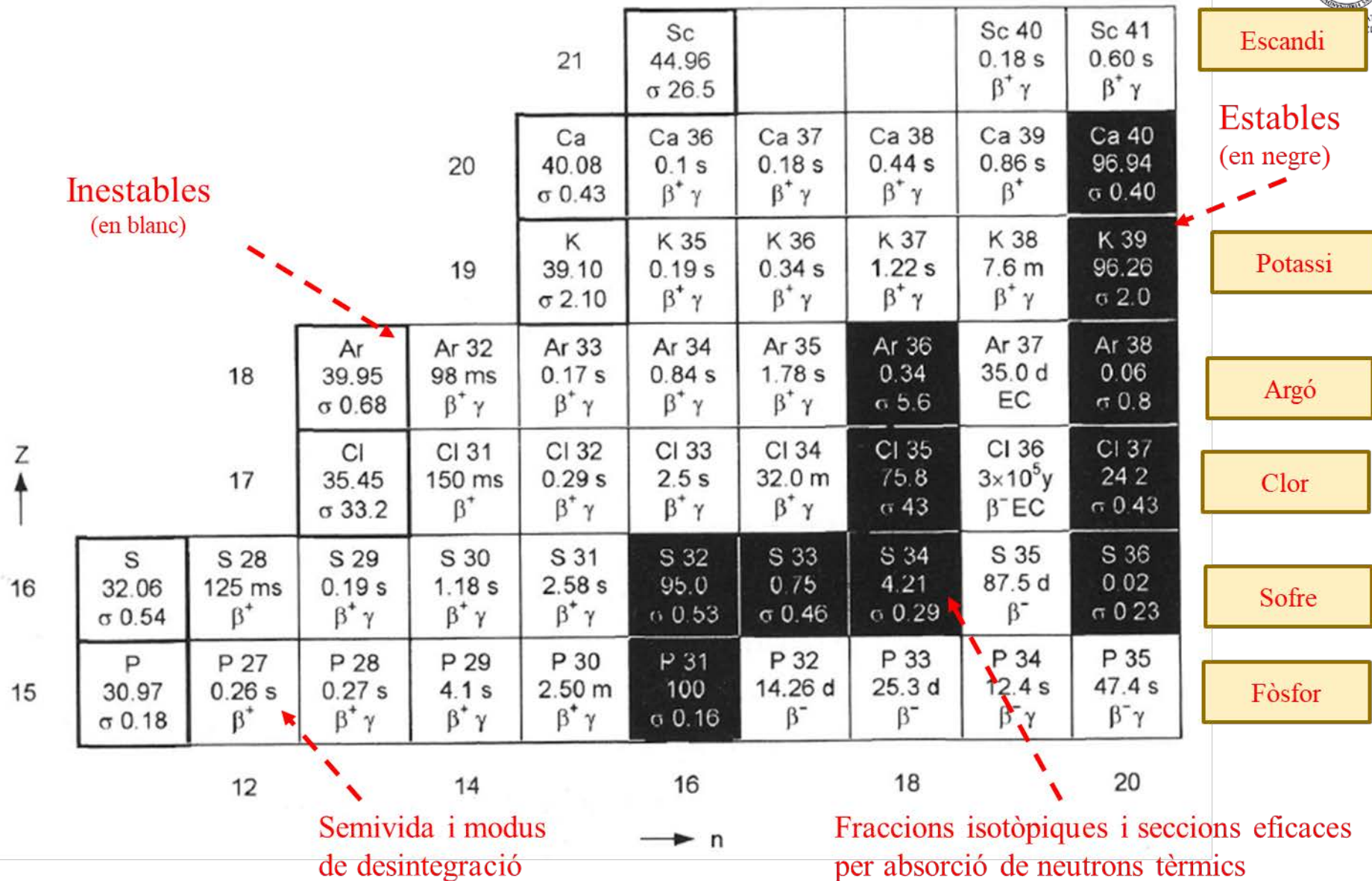


Carta dels nuclis



+ fissió espontània (${}^{254}\text{Cf}$, ${}^{256}\text{Fm}$), que ocorre de manera normal per a $A > 300$.





Exemples de fonts radioactives

Emissors α

Isòtop	$T_{1/2}$	Energies (MeV)	Fracció (%)
^{241}Am	433 dies	5.486; 5.443	85; 12.8
^{210}Po	138 dies	5,305	100
^{242}Cm	163 dies	6.113; 6.070	74; 26

Fonts γ i de CI

Isòtop	Energies (MeV)
^{113}Sn	0.365
^{133}Ba	0.266; 0.319
^{137}Cs	0.624
^{207}Bi	0.480; 0.967; 1.047

The 8th Edition of the Table of Isotopes

R.B. Firestone *et al.*, John-Wiley & Sons Inc., 1996.

The 1999 Update to the 8th Edition of the Table of Isotopes

R.B. Firestone *et al.*, John-Wiley & Sons Inc., 1999.

Emissors β^- purs

Isòtop	$T_{1/2}$	T_{max} (MeV)
^3H	12.33 anys	0.0186
^{14}C	5730 anys	0.156
^{32}P	14.3 dies	1.710
^{33}P	24.4 dies	0.248
^{35}S	87.9 dies	0.167
^{36}Cl	3.08×10^5 anys	0.714
^{45}Ca	165 dies	0.252
^{63}Ni	92 anys	0.067
^{90}Sr	27.7 anys	0.546
^{90}Y	64 hores	2.27
^{99}Tc	2.12×10^5 anys	0.292
^{147}Pm	2.62 anys	0.224
^{204}Tl	3.81 anys	0.766

Compareu amb l'energia de la desintegració γ

Llei de la desintegració radioactiva

- N : Nombre de radionúclids o partícules presents (que no s'han desintegrat) en l'instant t .
- λ (constant de desintegració): Probabilitat de desintegració d'un nucli o partícula per unitat de t :
 - És independent de t (no es fan vells).
 - No podem predir quan un nucli es desintegrarà.
 - Descripció **macroscòpica** de la probabilitat de desintegració d'un gran nombre de nuclis idèntics:

$$\frac{dN}{dt} \underset{\Delta t \ll \frac{1}{\lambda}}{=} -\lambda N \xrightarrow{t=0 \rightarrow N=N_0} \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t \Rightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Probabilitat de supervivència:
no és una f.d.p

- A (Activitat): Nombre de nuclis que es desintegren per unitat de temps

Unitats

$$\begin{aligned} 1 \text{ Bq} &= 1 \text{ s}^{-1} \\ 1 \text{ Ci} &= 3.7 \times 10^{10} \text{ Bq} \end{aligned}$$

$$A(t) = \lambda N(t) = A_0 e^{-\lambda t}$$

$$\frac{N(t)}{N_0} = \frac{A(t)}{A_0} = e^{-\lambda t}$$

- λdt : Probabilitat de desintegració d'un nucli en un dt (independent de t).
- $p(t)dt$: Probabilitat de desintegració d'un nucli en $(t, t+dt)$: es calcula com:

$$P_{\text{no desintegració}}(0,t)(t) = e^{-\lambda t} \Rightarrow p(t)dt = P_{\text{no desintegració}}(0,t)(t) \lambda dt = e^{-\lambda t} \lambda dt \quad \left(\int_0^\infty p(t)dt = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 \right)$$

- n : Nombre de desintegracions d'una mostra de nuclis en l'interval $(t, t+dt)$:

$$P(n; \mu) = \frac{e^{-\mu}}{n!} \mu^n$$

$$\left(P(0; \lambda t) = \frac{e^{-\lambda t}}{0!} (\lambda t)^0 = e^{-\lambda t} \right)$$

Funció de distribució de probabilitat (normalitzada)

Distribució de Poisson: μ és el valor mitjà de desintegracions

Semivida, vida mitjana i activitat específica

- Semivida (*half lifetime*):** temps en què els elements radioactius s'han reduït a la meitat:

$$A(T_{1/2}) = \frac{A_0}{2} \rightarrow \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\lambda T_{1/2}} \Rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \ln 2$$

Altres formes de calcular la vida mitjana

$$\tau = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} t_i = \int_{t=0}^{t=\infty} t [\lambda e^{-\lambda t}] dt$$

↑

Funció de distribució de probabilitat

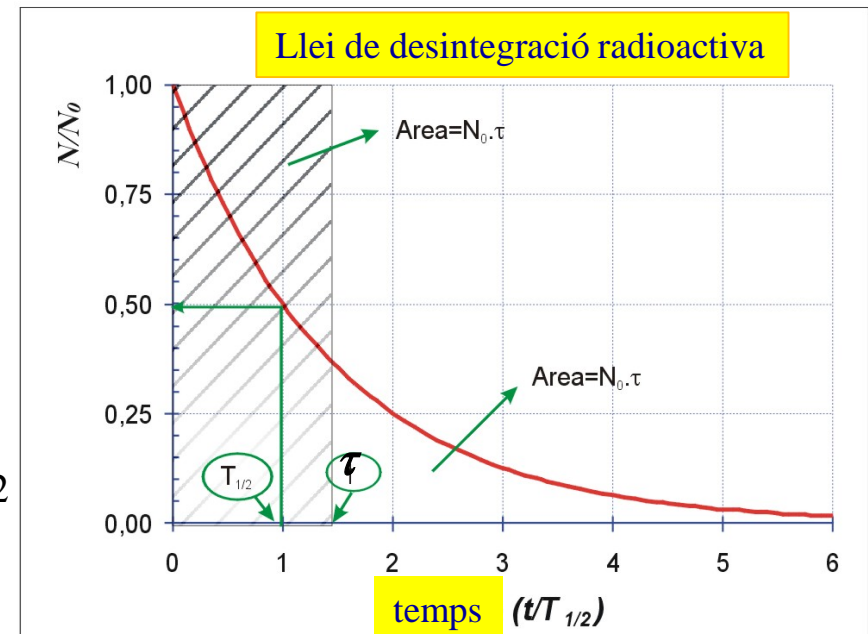
- Vida mitjana (*mean lifetime*):** temps mitjà de vida:

$$\tau = \int_0^{\infty} t p(t) dt = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2}$$

- Activitat específica:** activitat per gram

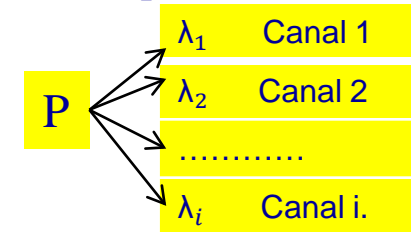
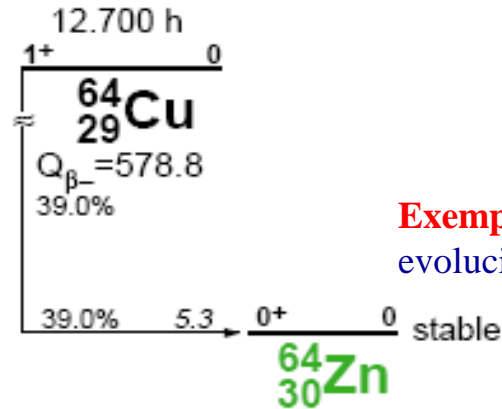
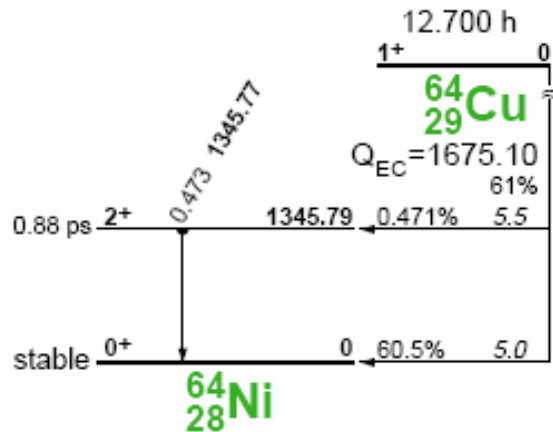
$$A' = \frac{A}{m} = \frac{\lambda N}{m} = \frac{\lambda N_A}{P_{\text{atòmic}}}$$

$$\text{Àrea} = \int_0^t N(t) dt = \frac{N_0}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \Rightarrow \begin{cases} t = T_{1/2} \Rightarrow \text{Àrea} = N_0 \tau / 2 \\ t = \infty \Rightarrow \text{Àrea} = N_0 \tau \end{cases}$$



Activitats parcials

- Els nuclis i partícules (P) poden desintegrar-se a diferents estats (canals) amb probabilitats de desintegració distintes (λ_i):



Exemple: un estat idèntic (Λ^0)
evolucionava a dos canals diferents:

$$\Lambda^0 \begin{cases} p\pi^- & (64\%) \\ n\pi^0 & (36\%) \end{cases}$$

- Per a cada canal de desintegració es verifica per definició de probabilitat:

$$\lambda_i = -\left(\frac{dN_1}{dt}\right)_i \Rightarrow -\left(\frac{dN_1}{dt}\right) = -\sum_i \left(\frac{dN_1}{dt}\right)_i = N_1 \sum_i \lambda_i = N_1 \lambda$$

- La constant de desintegració total (probabilitat total de desintegració és la suma):

$$\lambda = \sum_i \lambda_i \quad N_1 = N_{10} e^{-\lambda t}$$

N_1 són els elements originals N_{10} que no s'han desintegrat en t

- Els elements desintegrats en t seran:
 $N_2 = N_{10}(1 - e^{-\lambda t})$ i en cada canal:

$$N_{2_i} = N_{10} \frac{\lambda_i}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t})$$

$$\frac{1}{T_{1/2}} = \sum_i \frac{1}{(T_{1/2})_i}$$

- La **fracció de desintegració** (*branching ratio*):

$$f_i = \lambda_i / \lambda$$

Probabilitat de desintegració al canal i , dividida per la probabilitat total

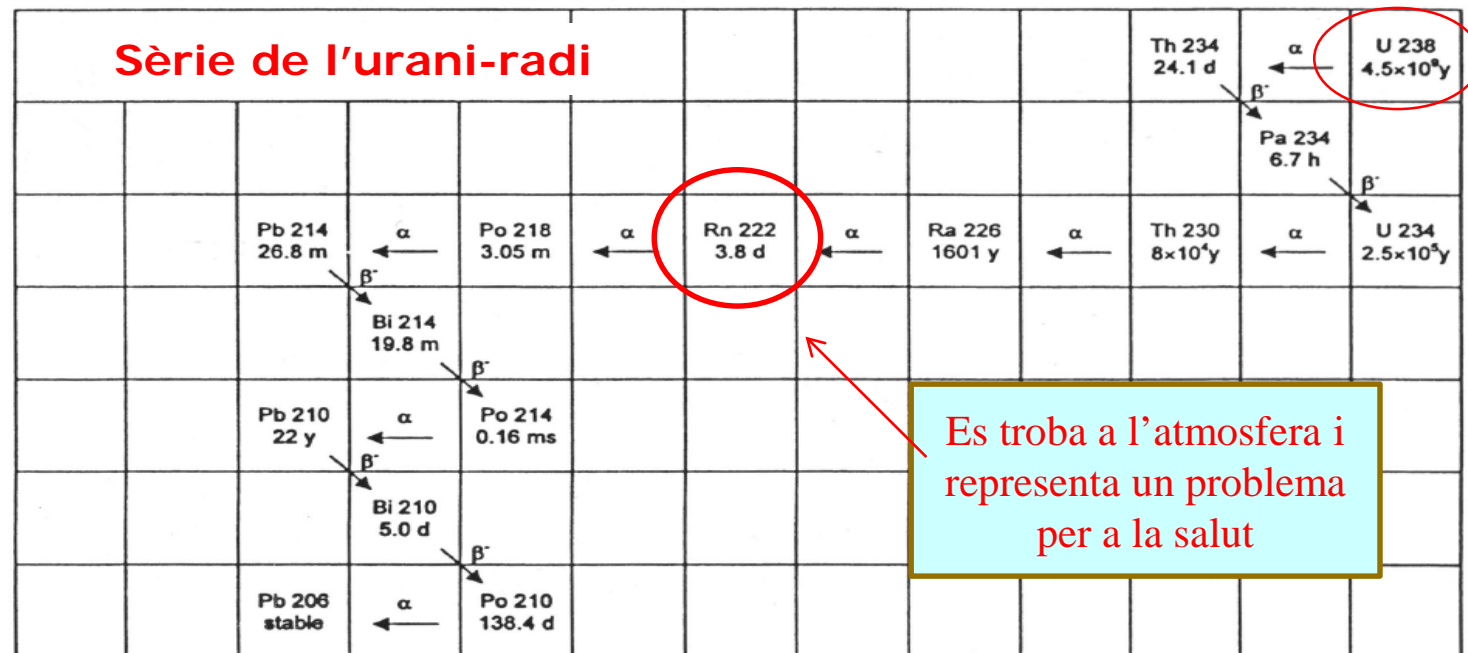
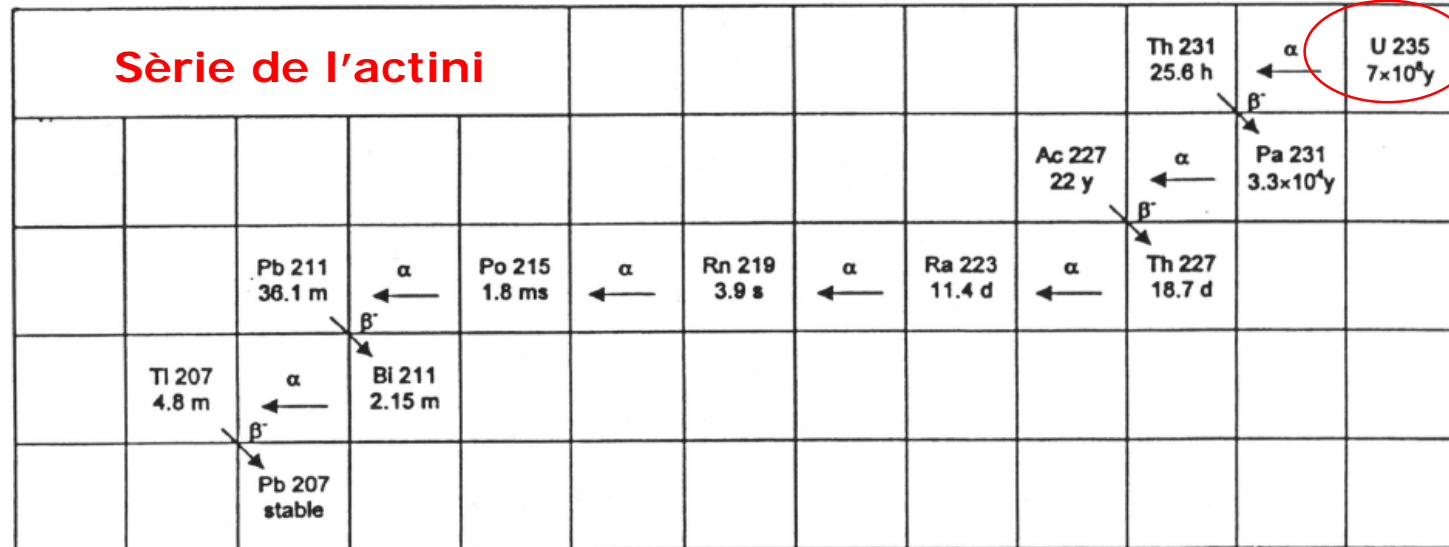
Sèries de radioactivitat natural

- Molts dels elements naturals que constitueixen l'escorça terrestre són radioactius (uns 40).
- La radioactivitat natural d'origen terrestre és deguda sobretot a les desintegracions de les cadenes d'elements pesants (transurànids, $Z > 83$), més enllà del ${}_{82}\text{Pb}$.
- Només el Rn suposa un problema seriós per a la salut → ventilació.
- Els processos químics i biològics no distingeixen els isòtops.

Nucli	Període (anys)	Tipus
${}^{40}\text{K}$	1.3×10^9	β^+ , EC
${}^{50}\text{V}$	1.4×10^{17}	β^+ , EC
${}^{87}\text{Rb}$	4.8×10^{10}	β^-
${}^{113}\text{Cd}$	9.3×10^{15}	β^-
${}^{11}\text{In}$	4.4×10^{14}	β^-
${}^{138}\text{La}$	1.0×10^{11}	β^+ , EC
${}^{144}\text{Nd}$	2.3×10^{15}	α
${}^{147}\text{Sm}$	1.1×10^{11}	α
${}^{176}\text{Lu}$	3.8×10^{10}	β^+ , EC
${}^{187}\text{Re}$	1.4×10^{10}	β^-

Família			Tipus	Denominació
Primer	Període (anys)	Últim		
${}^{232}\text{Th}$	14.1×10^9	${}^{208}\text{Pb}$	$4n$	Tori
${}^{241}\text{Np}$	2.1×10^6	${}^{209}\text{Bi}$	$4n + 1$	Neptuni
${}^{238}\text{U}$	4.5×10^9	${}^{206}\text{Pb}$	$4n + 2$	Urani-Radi
${}^{235}\text{U}$	7×10^8	${}^{207}\text{Pb}$	$4n + 3$	Actini

Les diferents famílies
no es mesclen.



Es troba a l'atmosfera i
representa un problema
per a la salut

- Només el Rn, produït en les cadenes de l'urani-radi (Rn-222, $T_{1/2}=3.82$ d), actini (Rn-219, $T_{1/2}=3.96$ a) i tori (Rn-220, $T_{1/2}=55.6$ s), suposa un problema seriós per a la salut. En qualsevol atmosfera, l'isòtop dominant és el Rn-222.

- Altres elements són produïts en col·lisions de rajos còsmics amb els nuclis de l'aire de l'atmosfera:

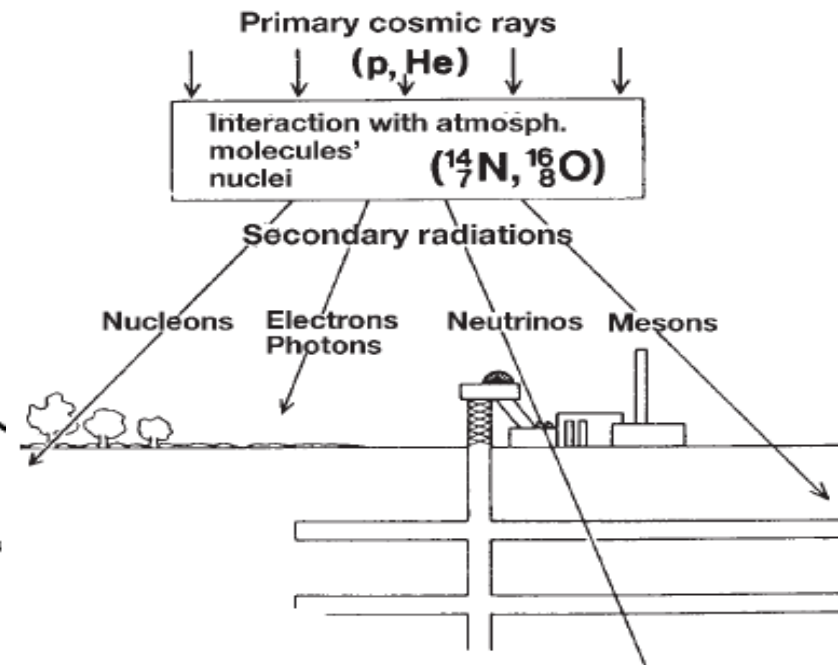
Triti ($T_{1/2} = 12.33$ anys)



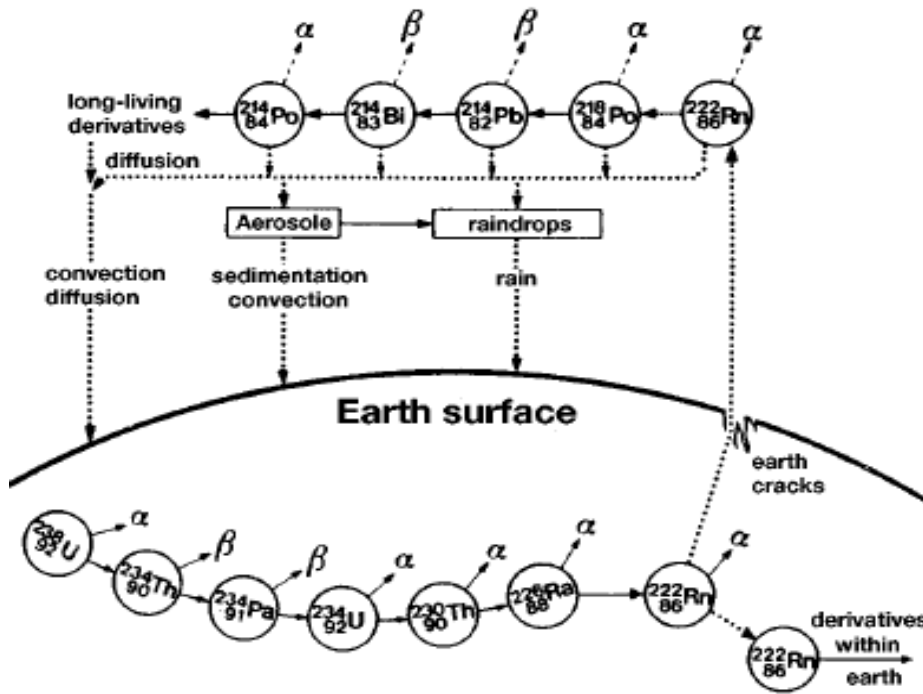
Carboni-14 ($T_{1/2} = 5730$ anys)



Components of secondary cosmic rays

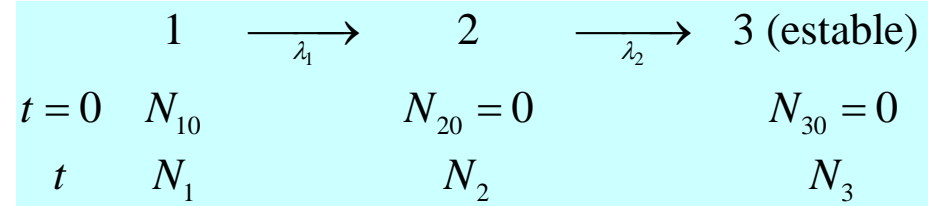


Production of Rn-222 and derivatives in the low atmosphere layer



Desintegració en cadena

- Esquema de desintegració: \longrightarrow
Imaginem tres substàncies en cadena i que l'última no es desintegra. En l'instant inicial només es troba la substància pare:



- La variació del nombre de nuclis (pare) 1, només depèn de la seua constant λ_1 de desintegració:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 \xrightarrow{t=0 \ N_1=N_{10}} N_1 = N_{10} e^{-\lambda_1 t}$$

- La variació del nombre de nuclis (fill) 2 inclou dos termes: els que es desintegren i els que apareixen per la desintegració del pare \rightarrow (Equació diferencial lineal no homogènia):

$$\begin{aligned}
 \frac{dN_2}{dt} &= +\lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 N_2 \rightarrow \\
 &\xrightarrow{t=0 \ N_2=0} N_2 = N_{10} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})
 \end{aligned}$$

Observeu que l'activitat del radionúclid 2, no és dN_2/dt sinó $\lambda_2 N_2$

- La variació del nombre de nuclis 3 depèn del nombre d'elements 2 presents en cada instant:

$$\frac{dN_3}{dt} = +\lambda_2 N_2$$

- Activitats dels radionúclids 1 i 2:

$$N_3 = N_{10} \left\{ 1 + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_1 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{-\lambda_1 t}) \right\}$$

$$A = \lambda N \rightarrow \begin{cases} A_1 = \lambda_1 N_1 = A_{10} e^{-\lambda_1 t} \\ A_2 = \lambda_2 N_2 = A_{10} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \end{cases}$$

Exercici

Equilibri ideal

- **L'equilibri ideal** (definició) s'abasta quan l'activitat del radionúclid 2 és màxima. El temps t_m és:

$$\left. \frac{dA_2}{dt} \right|_{t=t_m} = 0 \rightarrow -\lambda_1 e^{-\lambda_1 t_m} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_m} = 0 \Rightarrow t_m = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \ln \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{1}{\ln 2} \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \ln \frac{T_1}{T_2}$$

- Es verifica: $T_1 > T_2 \rightarrow t_m > 0$
 $T_1 < T_2 \rightarrow t_m > 0$

S'abasta **sempre** l'equilibri ideal, independentment dels valors relatius de les semivides: a més $A_1 = A_2$ en l'equilibri ideal.

- Activitat màxima del radionúclid 2 (quan està en equilibri ideal):

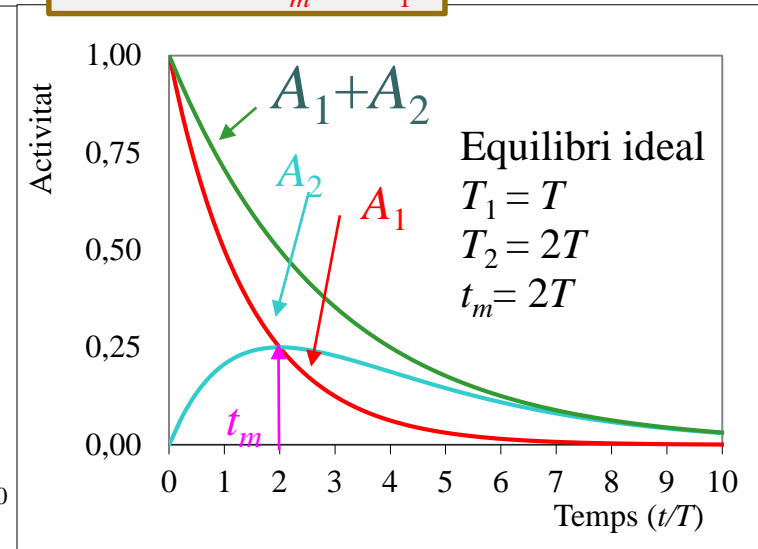
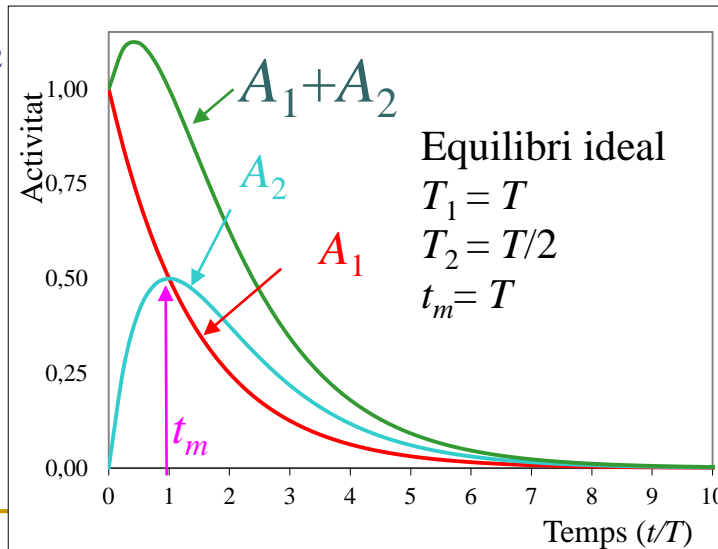
Equilibri ideal

$$\left. \frac{dA_2}{dt} \right|_{t=t_m} = \lambda_2 \left. \frac{dN_2}{dt} \right|_{t=t_m} = 0 \Rightarrow \lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 \Rightarrow A_1(t_m) = A_2(t_m) = \lambda_1 N_{10} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}} = \lambda_1 N_{10} \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{T_2}{T_1 - T_2}}$$

- En l'equilibri ideal les dues substàncies tenen la mateixa activitat: $A_1 = A_2$

Substituint t_m en A_1

- Exemples:
 $(A_{10} = 1)$



Equilibri secular ($\lambda_2 \gg \lambda_1$)

L'equilibri secular s'abasta quan la substància 2 es desintegra **molt més ràpidament** que la substància 1

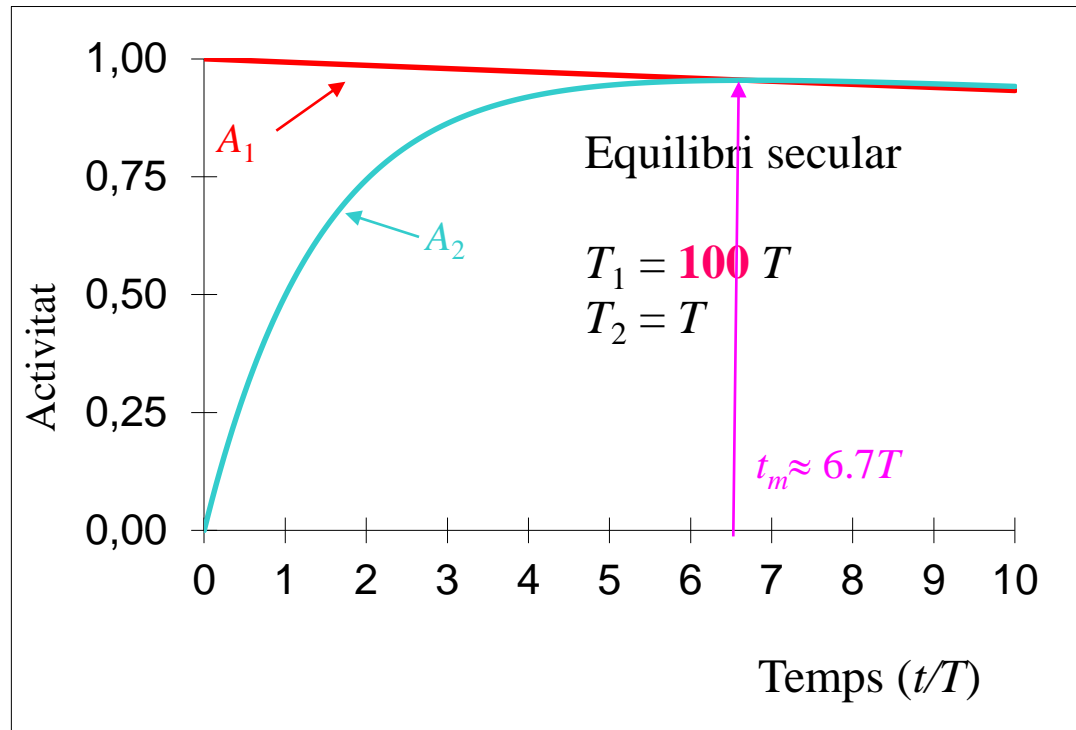
$$\begin{cases} A_1 = \lambda_1 N_1 = A_{10} e^{-\lambda_1 t} \\ A_2 = \lambda_2 N_2 = A_{10} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) = A_{10} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} (1 - e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t}) \end{cases}$$

Com es comporta el quocient d'activitats 1 i 2 a temps grans?

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (1 - e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t})$$

L'activitat de la substància 2 va augmentant gradualment.

$$\lambda_1 \ll \lambda_2$$



$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (1 - e^{-\lambda_2 t}) \xrightarrow{t \gg T_2} A_2 = A_1$$

Equilibri secular: les activitats del pare i fill s'igualen després d'un temps $t \gg T_2$

Equilibri transitori o transient ($\lambda_2 > \lambda_1$)

$$\begin{cases} A_1 = \lambda_1 N_1 = A_{10} e^{-\lambda_1 t} \\ A_2 = \lambda_2 N_2 = A_{10} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} (1 - e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t}) \end{cases}$$

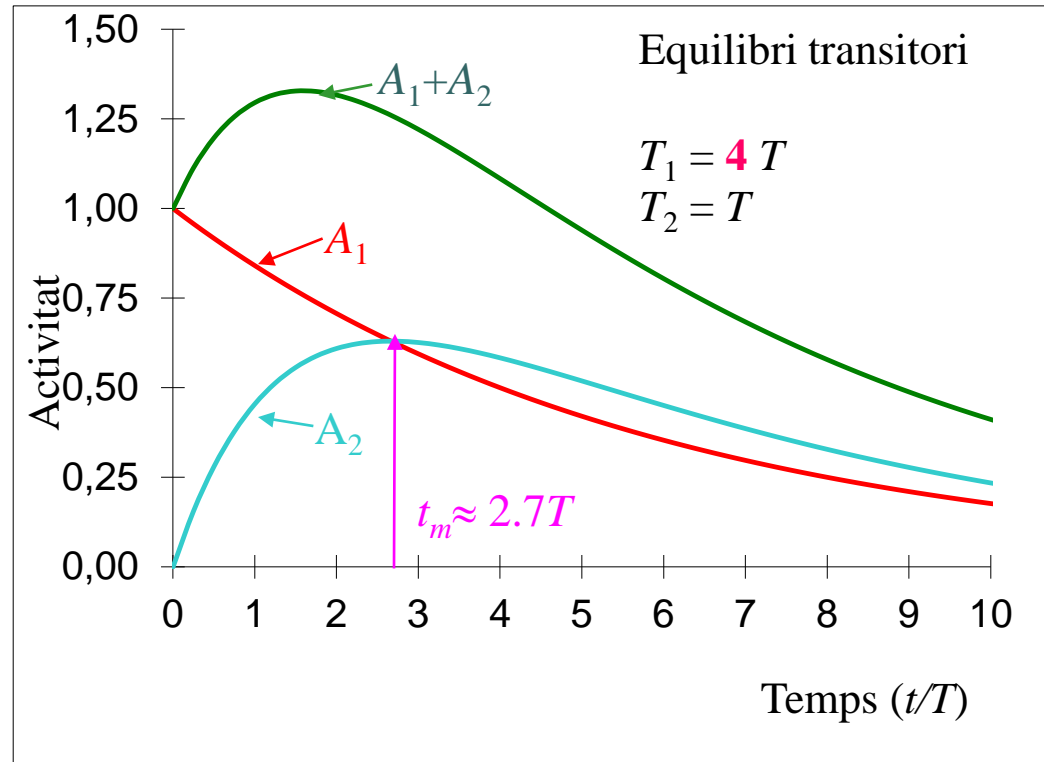
L'equilibri transitori s'abasta quan la substància 2 es desintegra un **poc més ràpidament** que la substància 1

Com es comporta el quocient d'activitats 1 i 2?

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (1 - e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t})$$

$$\lambda_1 < \lambda_2$$

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$



$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} \left(1 - e^{-\frac{(T_1 - T_2)t}{T_1 \tau_2}} \right) \xrightarrow{t \gg \tau_2 \frac{T_1}{T_1 - T_2}} \frac{A_2}{A_1} \cong \frac{T_1}{T_1 - T_2}$$

En l'**equilibri transitori** s'arriba a una relació constant de les activitats que perdura en el temps

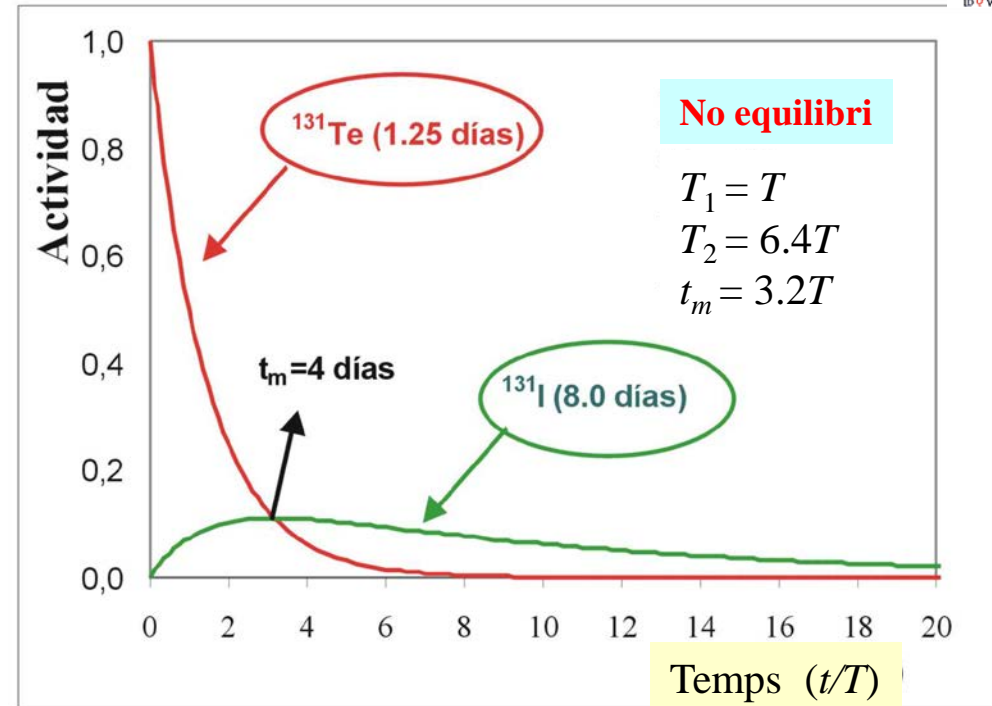
No equilibri ($\lambda_2 < \lambda_1$)

En aquest cas, en què la substància 2 es desintegra més lentament que la 1, no s'abasta cap mena d'equilibri, exceptuant l'equilibri l'ideal:

$$A_2 = A_{10} \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t})$$

Després d'un temps $t \gg T_1$

$$A_2 \approx A_{10} \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t}$$



el radionúclid 2 es desintegra segons la seua constant de desintegració λ_2

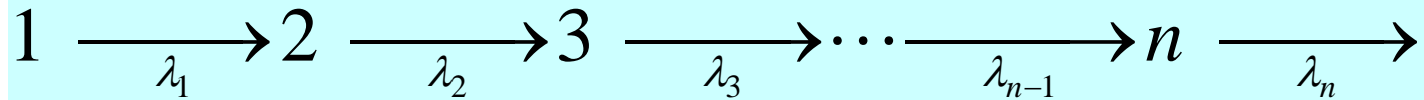
En el cas extrem $T_1 \ll T_2$ ($\lambda_2 \ll \lambda_1$)

$$A_2 \approx A_{10} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{-\lambda_2 t} = N_{10} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \approx N_{20} e^{-\lambda_2 t}; \text{ on } N_{20} \approx N_{10} \lambda_2$$

En el cas de no equilibri extrem, pràcticament tota la substància 1 s'ha desintegrat en la 2, abans que comence la desintegració de la segona

Equacions de Bateman

- Les expressions anteriors es poden estendre al cas general de sèries o cadenes amb diverses generacions de radionúclids:



- L'activitat del nucli n -èsim de la sèrie és:

$$A_n = N_{10} \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right) \left[\sum_{k=1}^n \frac{e^{-\lambda_k t}}{\prod_{j=1(j \neq k)}^n (\lambda_j - \lambda_k)} \right]$$

Per al segon descendent de la sèrie:

$$\begin{aligned} A_2 &= N_{10} \lambda_1 \lambda_2 \left[\frac{e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right] \\ &= \frac{N_{10} \lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \end{aligned}$$

- Exemple: per al tercer descendent de la sèrie:

$$A_3 = N_{10} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \left[\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} + \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)} + \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right]$$

- En el cas que s'aconsegueixca l'equilibri secular:

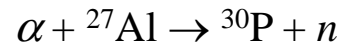
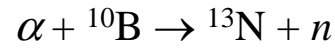
$(\lambda_1 \ll \lambda_i, i=2,3..n)$ les activitats de tota la cadena s'igualen:

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 = \lambda_3 N_3 = \dots = \lambda_n N_n$$

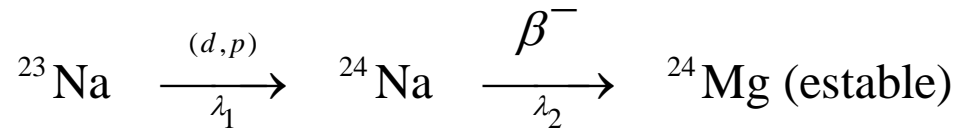
↑
L'activitat de la substància n no ve afectada per les activitats de les substàncies $n+1$, $n+2$, etc.

Radioactivitat artificial

- És la producció de radionúclids per bombardeig nuclear (que rep el nom **d'activació**).
- Primera transmutació nuclear a un nucli inestable (I. i F. Joliot-Curie, 1934, Premi Nobel de Química, 1935):



- Exemple: ${}^{23}\text{Na} + {}^2\text{H} \rightarrow {}^1\text{H} + {}^{24}\text{Na}$



$$t = 0: \quad N_{10} \qquad 0 \qquad 0$$

- Es tracta **d'optimitzar** la producció del ${}^{24}\text{Na}$. La taxa de producció del nucli ${}^{24}\text{Na}$ serà:

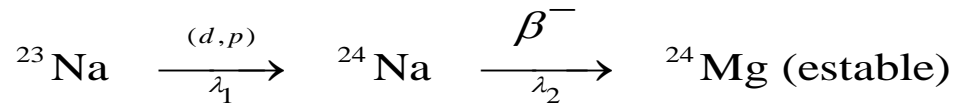
$$\left| \frac{dN_1}{dt} \right| = N_1 \sigma \varphi = \lambda_1 N_1 \Rightarrow \lambda_1 = \sigma \varphi \quad \begin{cases} \varphi \text{ és el flux de partícules } [\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}] \\ \sigma \text{ és la secció eficaç de la reacció} \\ \lambda_1 \text{ mesura el ritme (taxa) de producció de la substància } ({}^{24}\text{Na}) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Es pot resoldre l'equació:} \\ dN_2/dt = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \end{array}$$

- **Condicions:** $\begin{cases} N_1 \cong \text{Constant} = N_{10} \text{ (doncs } N_{10} \text{ molt gran)} \\ \lambda_1 \ll \lambda_2 \text{ (Equilibri secular)} \end{cases} \quad A_2 \approx A_1 (1 - e^{-\lambda_2 t}) = R (1 - e^{-\lambda_2 t})$

$R = A_1 = \lambda_1 N_1$ representa el ritme d'activació de la substància que es vol produir

- **Rendiment:** $r = \left[\frac{dA_2}{dt} \right]_{t=0} = [R \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}]_{t=0} = R \lambda_2 \rightarrow A_2 = R (1 - e^{-\lambda_2 t}) = \frac{r}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 t}) = r \tau_2 (1 - e^{-\lambda_2 t})$

Cas típic



$$t = 0: \quad N_{10} \qquad 0 \qquad 0$$

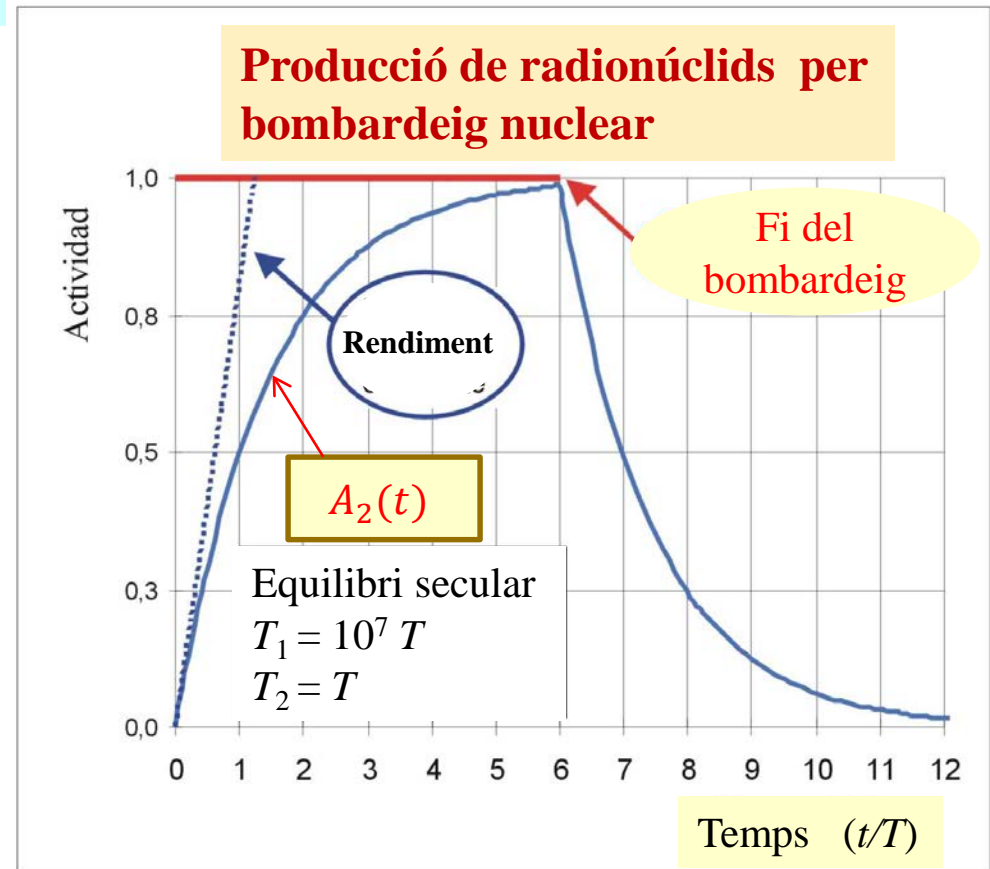
$$\left. \begin{array}{l} \phi \approx 10^{10} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \\ \sigma \approx 10^{-22} \text{ cm}^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_1 = \phi \sigma \approx 10^{-12} \text{ s}^{-1} \ll \lambda_2 \approx 10^{-5} \text{ s}^{-1} \quad 1 \text{ b} = 10^{-24} \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 = N_1 \sigma \phi = R = r \tau_2 \\ A_2 = r \tau_2 (1 - e^{-\lambda_2 t}) \end{cases}$$

$$T_{1/2}({}^{24}\text{Na}) = 15.0 \text{ h}$$

$$\Rightarrow \lambda({}^{24}\text{Na}) = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = 1.28 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

Arriba un moment en què ja no cal continuar la irradiació de la mostra perquè no s'incrementa perceptiblement l'activitat A_2 .



Aplicacions

- Gràcies a la radioactivitat artificial es van descobrir elements que fins llavors faltaven en la taula de Mendeléeiev, com per exemple el tecneci ($_{43}\text{Tc}$), el prometi ($_{61}\text{Pm}$), l'àstat ($_{85}\text{At}$) i tanmateix el franci ($_{87}\text{Fr}$).
- Per a ús en investigació i la indústria.
- Producció en reactors (~60%) i ciclotrons (~40%).
 - Avui s'han sintetitzat prop de 2000 radionúclids artificials.
- Per a usos mèdics:
 - Diagnòstic i tractament mèdic.
 - Estudi de les funcions orgàniques.
 - 170 radionúclids de 85 elements.

^{77}Br	57,0 hores (β^+)	Farmacologia
^{123}I	13,3 hores (β^+)	
^{127}Xe	36,4 dies (CE)	Oncologia (pulmó)
^{67}Ga	3,3 dies (CE)	Oncologia
^{111}In	2,8 dies (CE)	
^{167}Tm	9,3 dies (CE)	
^{82}Sr	25,6 dies (CE)	Dinàmica de la sang
^{52}Fe	8,3 hores (β^+)	Estudi medul·la de l'os
^{131}I	8,0 dies (β^-)	Tiroides i ronyó

Massa dels nuclis

- La unitat de **massa atòmica**, u (o u.m.a.), es defineix en relació a la **massa d'un àtom** de ^{12}C :

$$1 \text{ u} = \frac{1}{12} M(^{12}\text{C}) = 931.494043 \text{ MeV}/c^2$$

Equivalent MeV a u.m.a.

- La relació entre la massa **atòmica** i massa **nuclear**:

$$M_n(^A_Z\text{X}) = M(^A_Z\text{X}) - Zm_e + \sum_{i=1}^Z B_i / c^2$$

Massa nuclear i massa atòmica

Energia de lligadura dels electrons

- B_i són les **energies de lligadura dels electrons**

- Negligibles en general enfront de la resta de valors ($\sim 10 \text{ eV}$ - 100 keV).

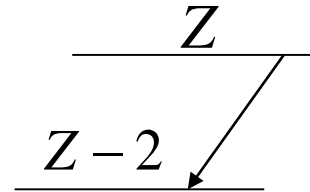
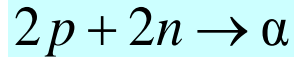
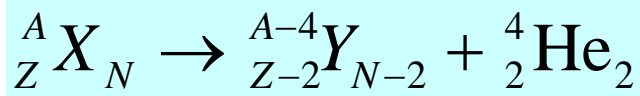
- Expressió empírica:
$$\sum_{i=1}^Z B_i = 14.33 \times Z^{2.39} \text{ eV}$$

- Els valors tabulats són sempre masses atòmiques** \Rightarrow Com que els càlculs nuclears requereixen masses nuclears, cal considerar de manera explícita les masses dels electrons corticals, pot però negligir-se'n l'energia de lligadura (en general, no sempre, per exemple en CE i CI o en qüestions com l'efecte Mossbauer en què es considera l'energia de retrocés del nucli).

- El defecte de massa nuclear Δ** es defineix com a:
$$\Delta = M(^A_Z\text{X}) - Au$$

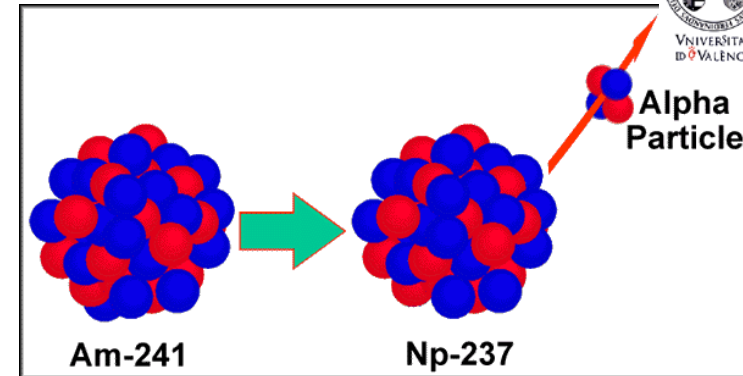
- Inclou la massa dels electrons corticals en la seua definició.
- El defecte de massa de l'**àtom** de ^{12}C és zero per definició.

Fonts de partícules α



Massa Atòmica (+2 m_e) ↓

$$m_\alpha = 3727.378 \text{ MeV}/c^2 \quad M({}^4\text{He}) = 3728.433 \text{ MeV}/c^2$$



- Conservació de l'energia: $M_n({}^A_ZX_N) = M_n({}^{A-4}_{Z-2}Y_{N-2}) + m_\alpha + T_\alpha + T_Y$
- Conservació del moment: $\vec{0} = \vec{p}_\alpha + \vec{p}_Y \Rightarrow 2m_\alpha T_\alpha = 2M_n({}^{A-4}_{Z-2}Y_{N-2})T_Y \quad [2mT = p^2]$

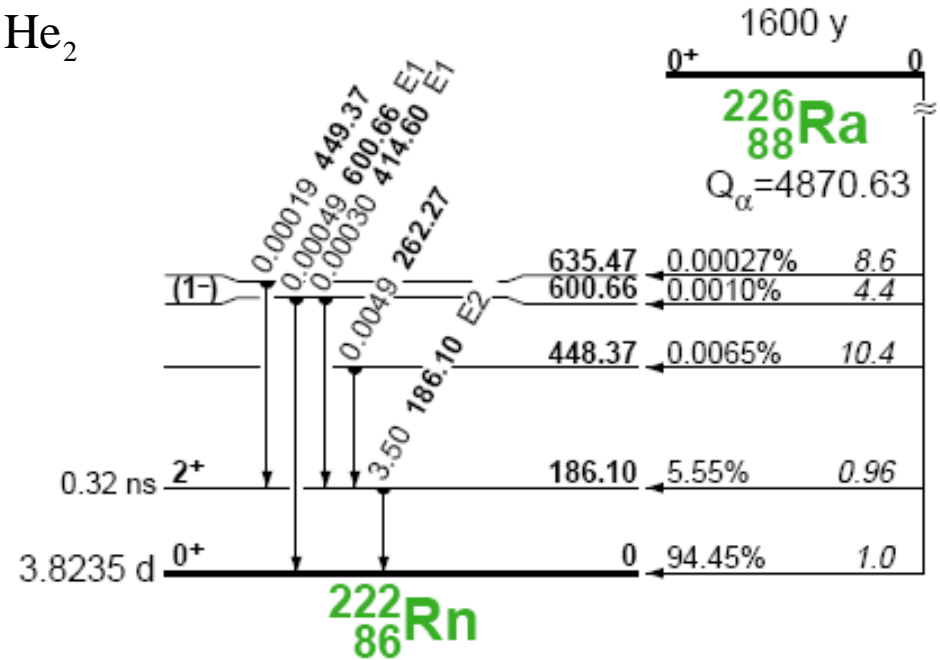
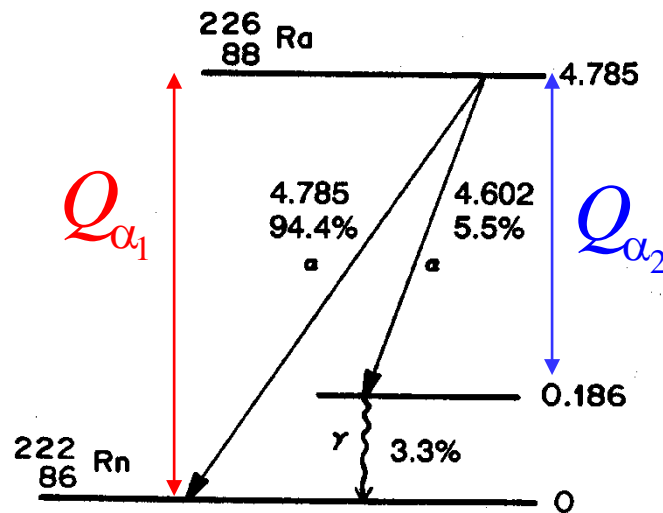
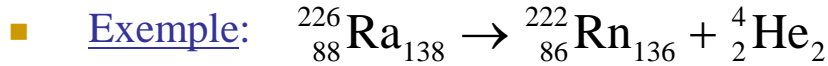
- Energia (o calor) de reacció:

$$Q_\alpha = \boxed{M_n({}^A_ZY_N) - M_n({}^{A-4}_{Z-2}Y_{N-2}) - m_\alpha} \approx \boxed{M({}^A_ZY_N) - M({}^{A-4}_{Z-2}Y_{N-2}) - M({}^4_2\text{He}_2)}$$

$$= T_\alpha + T_Y = T_\alpha \left(1 + \frac{m_\alpha}{M_n({}^{A-4}_{Z-2}Y_{N-2})} \right) \quad \sim 5 \text{ MeV}$$

Les partícules α són monoenergètiques

- ❑ Per a $A \sim 200 \Rightarrow T_\alpha \approx 98\% Q$
- ❑ Energia de retrocés del nucli fill $\sim 100 \text{ keV}$, suficient per a arrancar-lo de la seua posició.
- ❑ La mesura de T_α permet de determinar Q , i llavors les masses atòmiques.



$$\begin{aligned}
 Q_{\alpha_1} &= M({}^{226}_{88}\text{Ra}) - M({}^{222}_{86}\text{Rn}) - M({}^4_2\text{He}) = \\
 &= {}^{226}_{88}\Delta + 226 - {}^{222}_{86}\Delta - 222 - {}^4_2\Delta - 4 = \\
 &= {}^{226}_{88}\Delta - {}^{222}_{86}\Delta - {}^4_2\Delta = 23.662 - 16.366 - 2.424 = 4.872 \text{ MeV}
 \end{aligned}$$

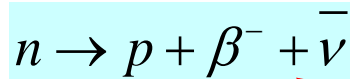
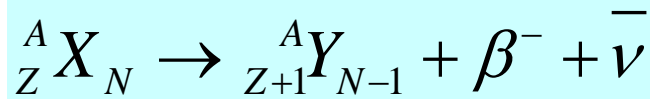
$$Q_{\alpha_2} = Q_{\alpha_1} - 0.186 = 4.686 \text{ MeV}$$

L'energia de la partícula α i del nucli estan unívocament definides (per ser un procés a dos cossos).

$$T_{\alpha_1} = Q_{\alpha_1} \frac{M_Y}{m_{\alpha} + M_Y} \cong 4.872 \frac{222}{4 + 222} = 4.786 \text{ MeV} \quad T_{\alpha_2} = Q_{\alpha_2} \frac{M_Y}{m_{\alpha} + M_Y} \cong 4.686 \frac{222}{4 + 222} = 4.603 \text{ MeV}$$

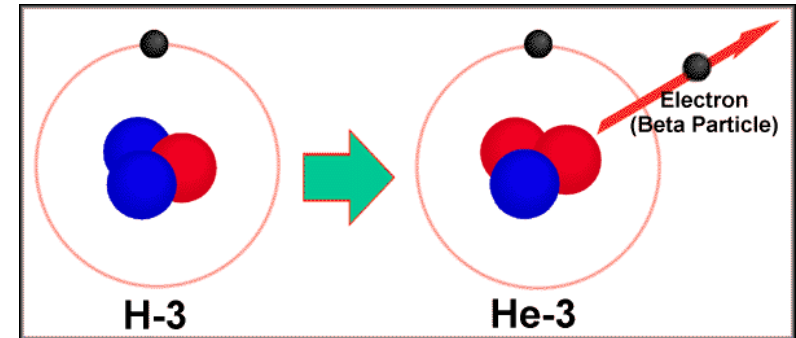
Fonts d'electrons ràpids: desintegració β^-

La desintegració β^- augmenta en una unitat el nombre atòmic Z del nucli



Ocorre a l'interior del nucli. La partícula beta és un electró!!

Masses nuclears, ja que és un procés nuclear



■ Conservació de l'energia: $M_n({}_Z^A X_N) = M_n({}_{Z+1}^A X_N) + m_{e^-} + T_{\beta^-} + T_{\bar{\nu}} + T_Y$

■ Conservació del momentum: $\vec{0} = \vec{p}_Y + \vec{p}_{\beta^-} + \vec{p}_{\bar{\nu}}$

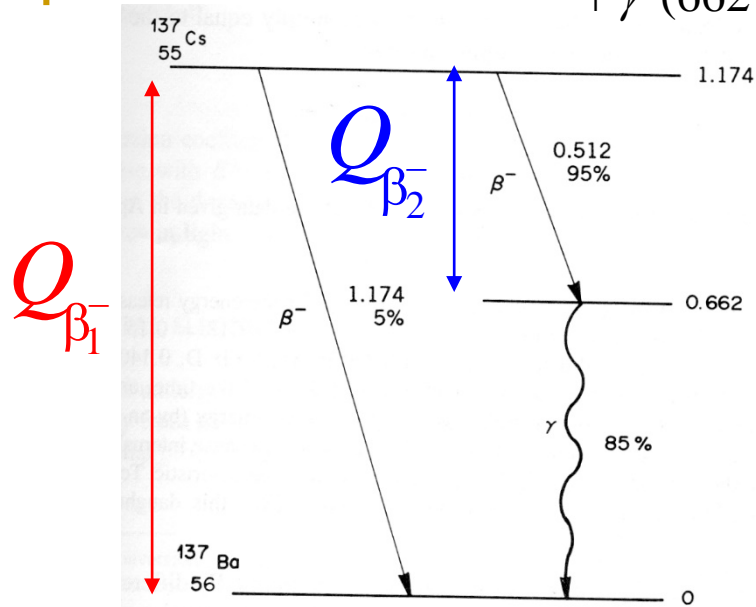
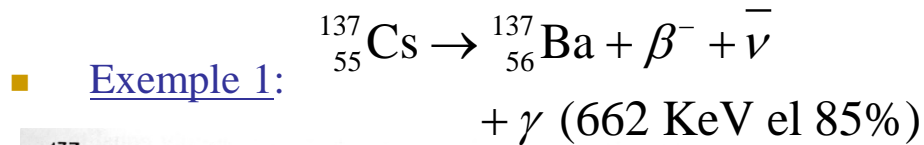
Les partícules β^- NO són monoenergètiques: ja que és un procés a tres cossos

■ Energia (o calor) de reacció:

$$Q_{\beta^-} = M_n({}_Z^A X_N) - [M_n({}_{Z+1}^A X_{N-1}) + m_{e^-}] = M({}_Z^A X_N) - M({}_{Z+1}^A X_{N-1}) = T_{\beta^-} + T_{\bar{\nu}} + T_Y$$

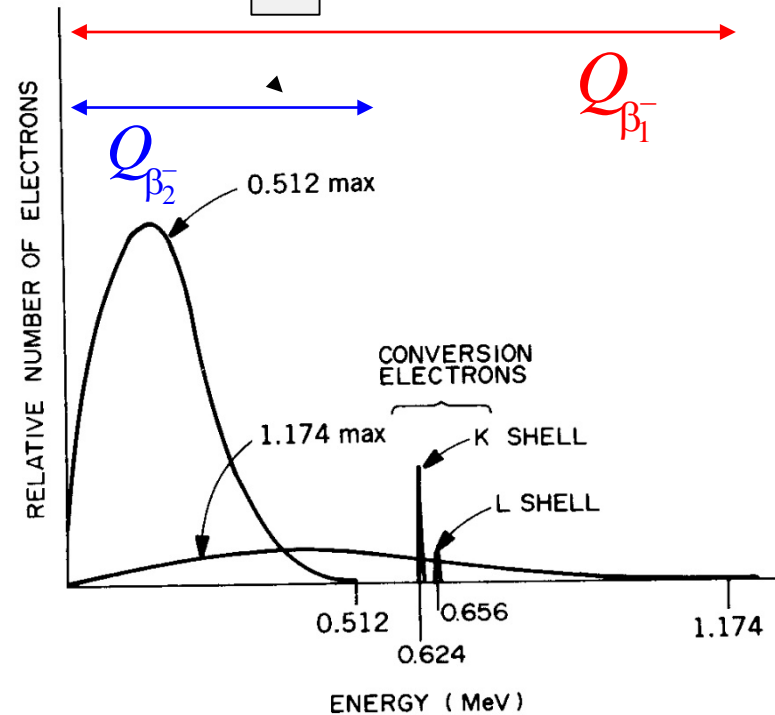
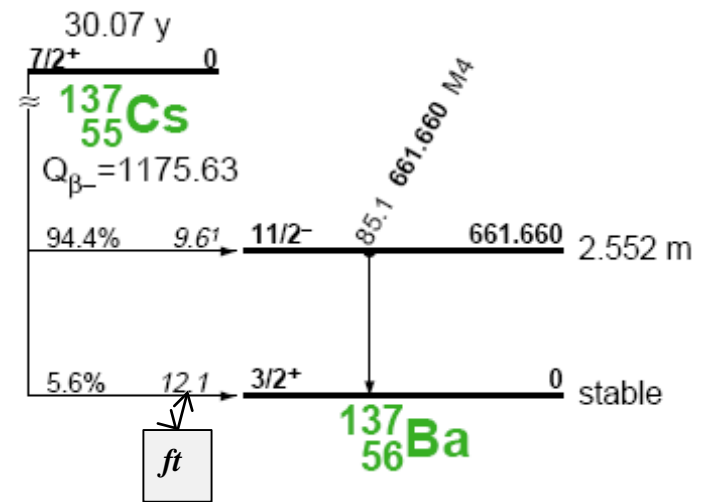
Masses nuclears

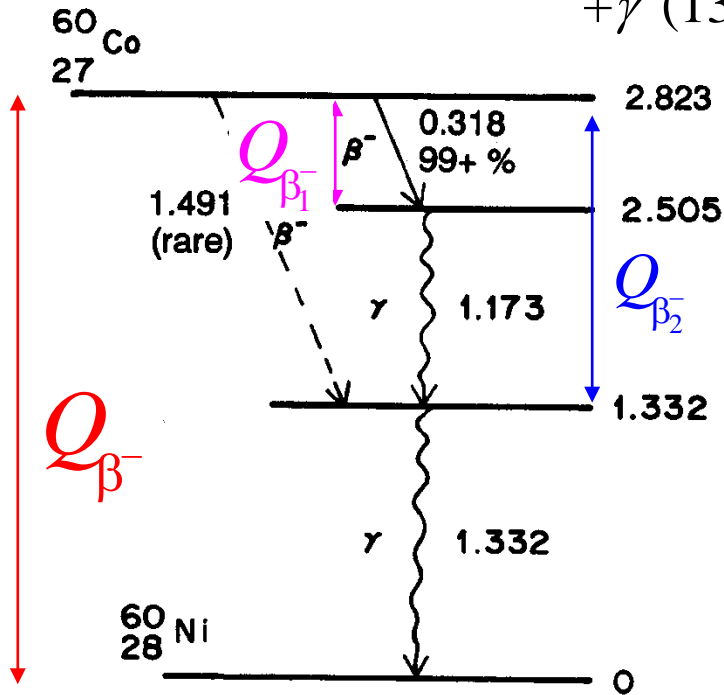
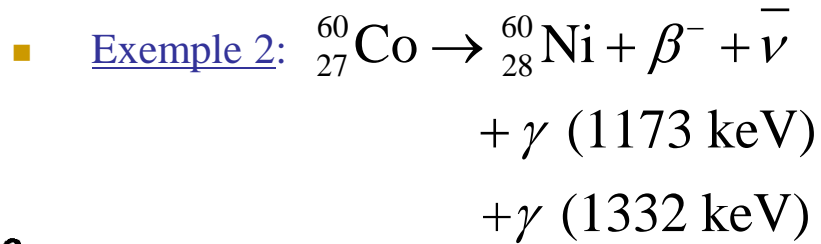
Masses atòmiques que inclouen els electrons



$$\begin{aligned} Q_{\beta_1} &= M(^{137}_{55}\text{Cs}) - M(^{137}_{56}\text{Ba}) = \\ &= {}^{137}_{55}\Delta - {}^{137}_{56}\Delta = \\ &= -86.551 + 87.726 = 1.175 \text{ MeV} \end{aligned}$$

$$Q_{\beta_2} = Q_{\beta_1} - 0.662 \text{ MeV} = 0.513 \text{ MeV}$$

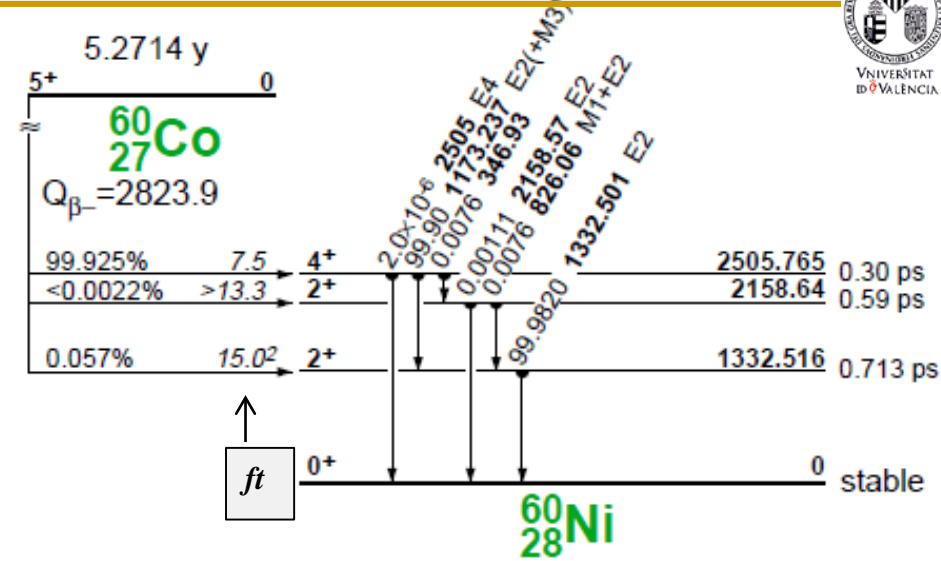




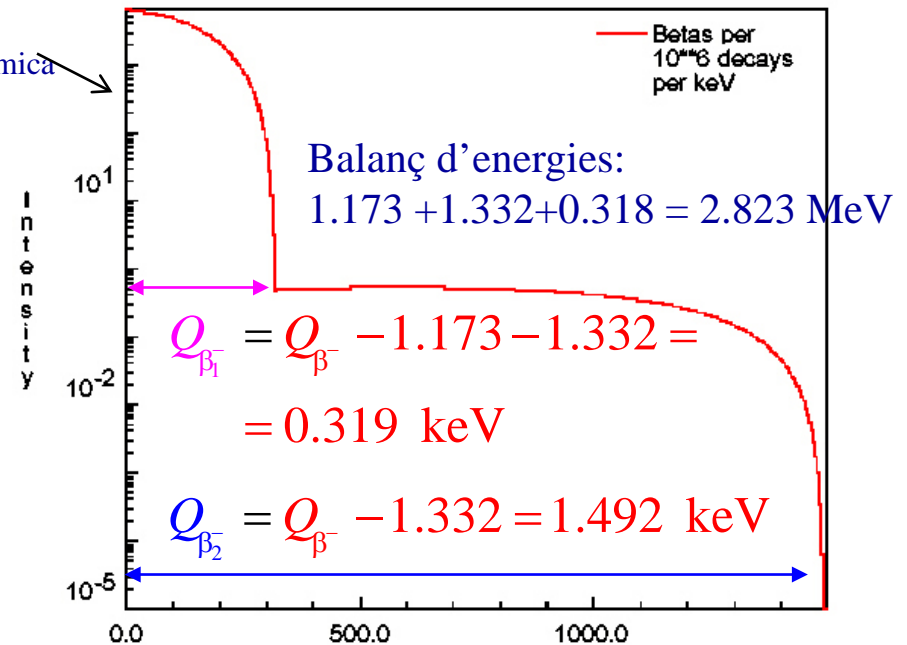
$$Q_{\beta^-} = M({}_{27}^{60}\text{Co}) - M({}_{28}^{60}\text{Ni}) =$$

$$= {}_{27}^{60}\Delta - {}_{28}^{60}\Delta =$$

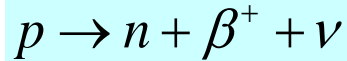
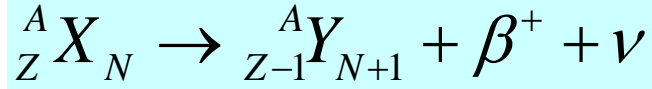
$$= -61.644 + 64.468 = 2.824 \text{ MeV}$$



Escala
logarítmica

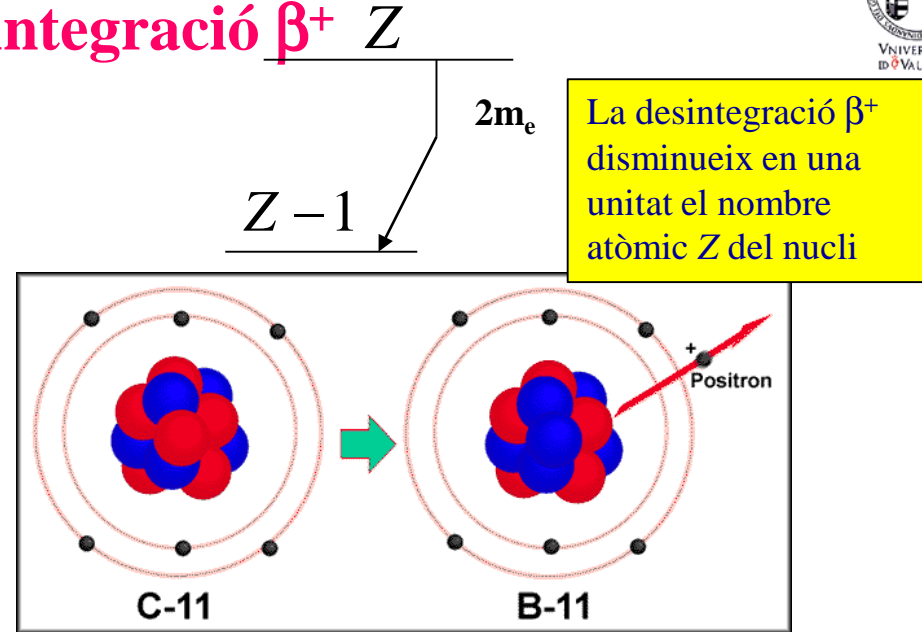


Fonts de positrons ràpids: desintegració β^+



Ocorre a l'interior del nucli

Masses nuclears, ja que és un procés nuclear



■ Conservació de l'energia: $M_n({}^A_Z X_N) = M_n({}^A_{Z-1} Y_{N+1}) + m_{e^+} + T_{\beta^+} + T_\nu + T_Y$

■ Conservació del moment: $\vec{0} = \vec{p}_Y + \vec{p}_{\beta^+} + \vec{p}_\nu$

■ Energia (o calor) de reacció:

Passem a masses atòmiques

$$Q_{\beta^+} = M_n({}^A_Z X_N) - [M_n({}^A_{Z-1} Y_{N+1}) + m_{e^+}] = M({}^A_Z X_N) - M({}^A_{Z-1} Y_{N+1}) - 2m_e = T_{\beta^+} + T_\nu + T_Y$$

Les partícules β^+ **NO** són monoenergètiques:
Procés a tres cossos

Observeu que la disimetria aparent entre la desintegració β^+ i β^- s'origina per haver usat masses atòmiques.

Valor llindar

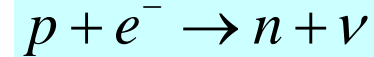
Si $Q_{\beta^+} < 0$ ó $Q_{EC} < 2m_e c^2$
 β^+ no es produeix

Radiació d'aniquilació i captura electrònica (CE)

- La desintegració β^+ ve acompanyada de dos fotons d'aniquilació de 511 keV, que s'origina quan el positró s'atura i captura un electró del medi per a formar el positroni (estat lligat e^+e^-) que s'aniquila en dos fotons:

$$\beta^+ \Rightarrow e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma \quad (E_\gamma = 0.511 \text{ MeV})$$

- La desintegració β^+ competeix amb el procés de captura electrònica:



Electró de la capa atòmica
(que preexisteix com a estat
lligat a l'àtom)

$$M_n({}_Z^AX_N) + m_{e^-} = M_n({}_{Z-1}^AX_{N+1}) + T_\nu + T_Y + \underbrace{B_{e^-}}_{>0} \quad \text{Conservació de l'energia}$$

$$\vec{p}_X + \vec{p}_{e^-} = \vec{p}_\nu + \vec{p}_Y \quad \text{Conservació del moment}$$

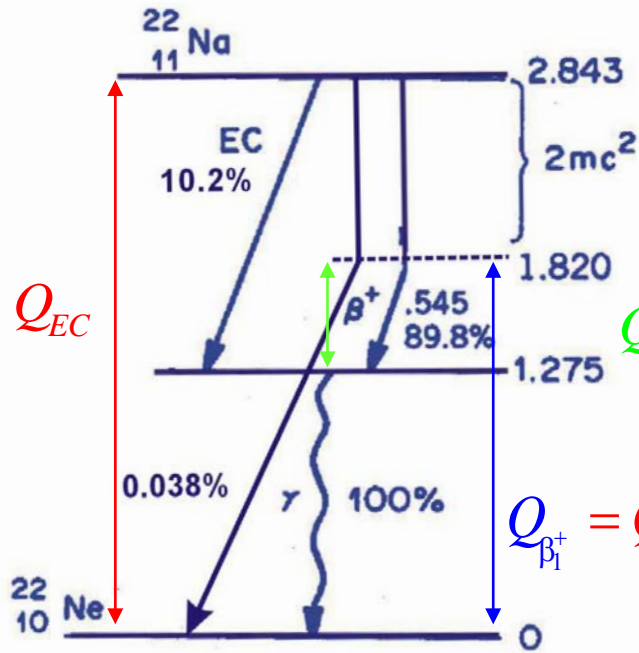
$$\begin{aligned} Q_{CE} &= M_n({}_Z^AX_N) + m_{e^-} - M_n({}_{Z-1}^AX_{N+1}) - B_e \\ &= \underbrace{M({}_Z^AX_N) - M({}_{Z-1}^AX_{N+1})}_{\text{Si } Q_{EC} > 2m_e c^2 \text{ CE i } \beta^+ \text{ competeixen}} \\ &= T_\nu + T_Y \end{aligned}$$

Si $Q_{EC} > 2m_e c^2$
CE i β^+ competeixen

$$Q_{\beta^+} = Q_{CE} - 2m_e c^2$$

- La CE va acompanyada de raigs X característics, conseqüència de l'absorció de l'electró atòmic per part del nucli que desestabilitza la capa atòmica i la subsegüent reordenació atòmica.

- Exemple 1: $^{22}_{11}\text{Na} \rightarrow ^{22}_{10}\text{Ne} + \beta^+ + \nu$
 $^{22}_{11}\text{Na} + e^- \rightarrow ^{22}_{10}\text{Ne} + \nu$



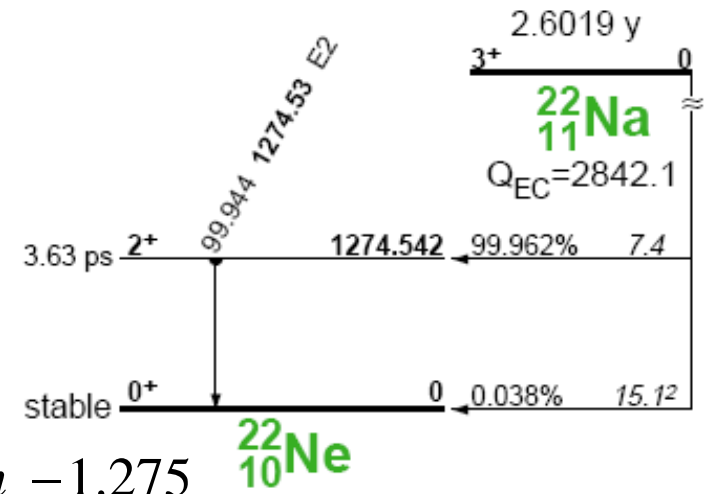
$$Q_{\beta_2^+} = Q_{EC} - 2m_e - 1.275$$

$$Q_{\beta_1^+} = Q_{EC} - 2m_e$$

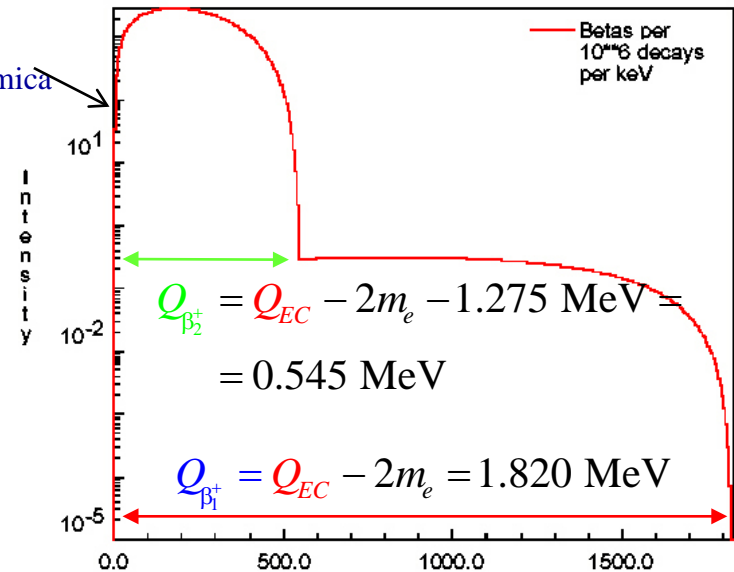
$$Q_{EC} = M(^{22}_{11}\text{Na}) - M(^{22}_{10}\text{Ne}) =$$

$$= ^{22}_{11}\Delta - ^{22}_{10}\Delta = -5.182 + 8.024 = 2.842 \text{ MeV}$$

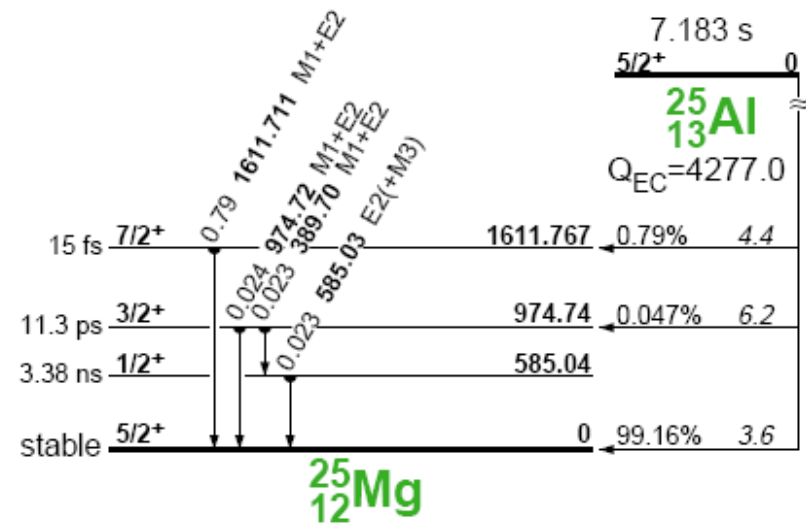
- EC → Raigs X del ^{22}Ne .
- Emissió d'un γ de 1.275 MeV.
- El ν és molt difícil de detectar.



Escala
logarítmica



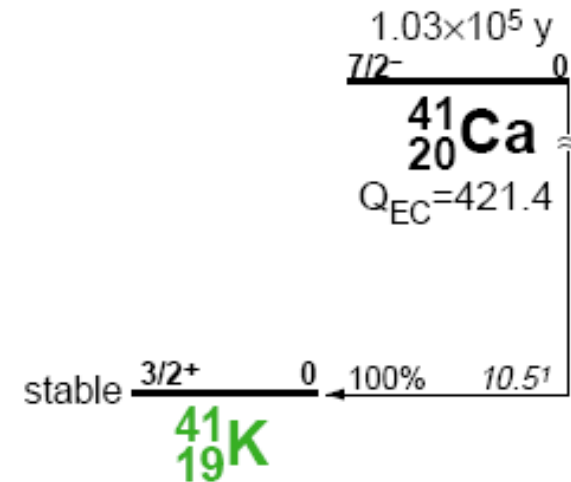
- Exemple 2: ${}_{13}^{25}\text{Al} \rightarrow {}_{12}^{25}\text{Mg} + \beta^+ + \nu$
 ${}_{13}^{25}\text{Al} + e^- \rightarrow {}_{12}^{25}\text{Mg} + \nu$



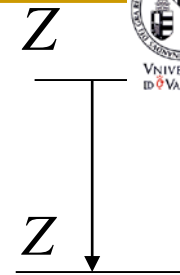
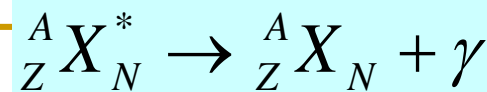
- Exemple 3: ${}_{20}^{41}\text{Ca} + e^- \rightarrow {}_{19}^{41}\text{K} + \nu$

- Com que $Q_{EC} < 1022 \text{ keV} \Rightarrow$ sols és possible la

Com que no se supera el valor llindar de la desintegració β^+ aquest procés queda prohibit en aquest nucli. La transició ocorre per CE



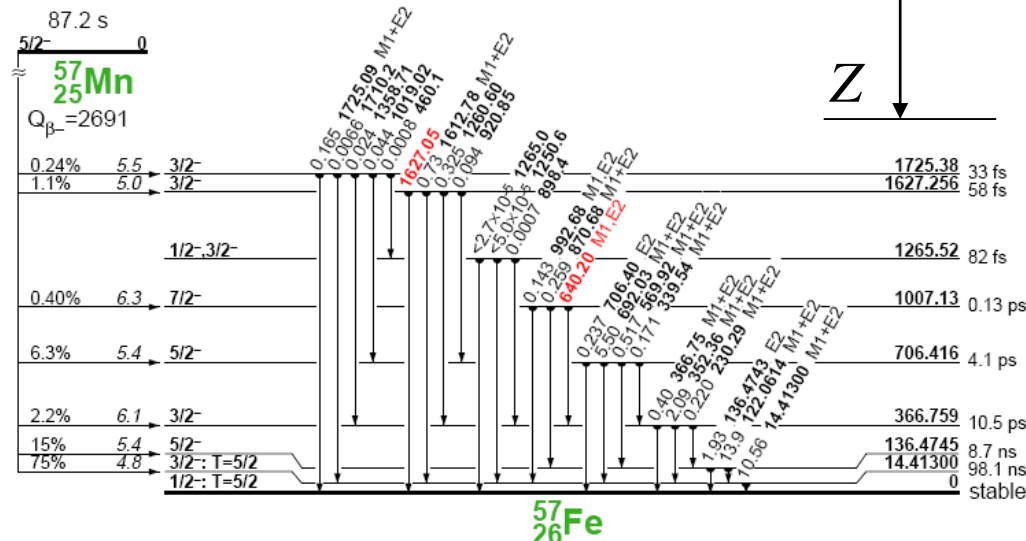
Fonts de radiació γ



- La radiació γ ocorre com a resultat de la desexcitació nuclear.
- Sol aparèixer:
 - Després de la desintegració β^\pm .
 - Després de la desintegració α .
- Conservació d'energia i moment:

$$\left. \begin{aligned} \Delta E &= M^* - M = E_\gamma + T_R \\ \vec{p}_R &= -\vec{p}_\gamma, \quad E_\gamma = p_R c \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[p_R^2 = 2mT_R \right]$$

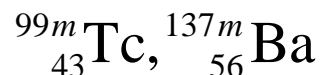
$$\Delta E = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2}$$



$$E_\gamma = Mc^2 \left[-1 \pm \sqrt{1 + 2 \frac{\Delta E}{Mc^2}} \right] \xrightarrow{\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2} E_\gamma \approx \Delta E - \frac{\Delta E^2}{2Mc^2}$$

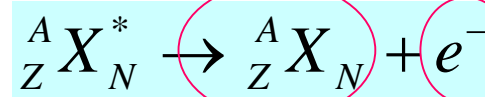
Els fotons són monoenergètics

- Usualment el retrocés del nucli és negligible: $E_\gamma \approx \Delta E \equiv Q = M^*({}^A_Z X_N) - M({}^A_Z X_N)$
- ...excepte en el cas de l'absorció ressonant nuclear i de l'efecte Mössbauer.
- $E_\gamma \sim 0.1-10$ MeV (raigs X \sim desenes de keV, fotons visibles \sim eV).
- Els estats isòmers ($T_{1/2} > 1$ ms) es representen amb una "m" en l'exponent de l'esquerra:



Fonts d'electrons ràpids per conversió interna (CI)

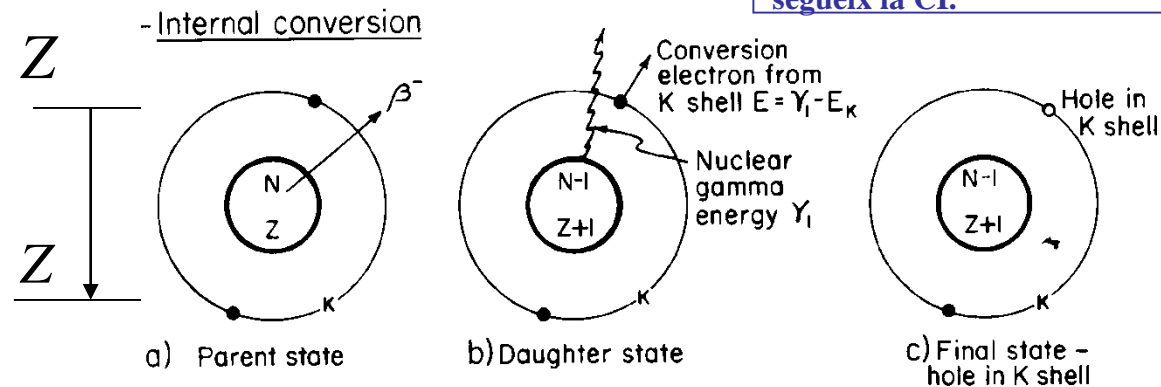
- La desexcitació nuclear amb emissió de fotons (radiativa) competeix amb l'emissió d'electrons de conversió interna.



Electró atòmic (monoenergètic) que transporta l'energia d'excitació del nucli (procés CI)

Emissió de raigs X característics en la reordenació atòmica que segueix la CI.

És un procés que competeix amb la desexcitació γ nuclear



- Balanç d'energies

Energia d'enllaç de l'electró atòmic

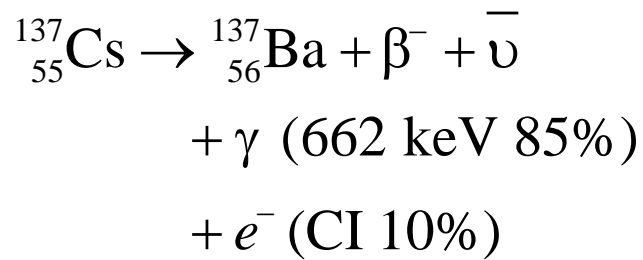
$$Q_{IT} = M^*({}^A_Z X_N) - M({}^A_Z X_N) = T_i + B_i$$

La CI presenta: un espectre discret d'energia T_i amb pics associats a les capes atòmiques (K,L,M,...)

Capa K	$T_K = Q_{IT} - B_K$	Energia en què ix el e^- en capa K
Capa L	$T_L = Q_{IT} - B_L$	Energia en què ix el e^- en capa L

- No s'ha de confondre aquest procés amb l'efecte fotoelèctric intern, que seria un procés en dos passos (emissió radiativa + efecte fotoelèctric).

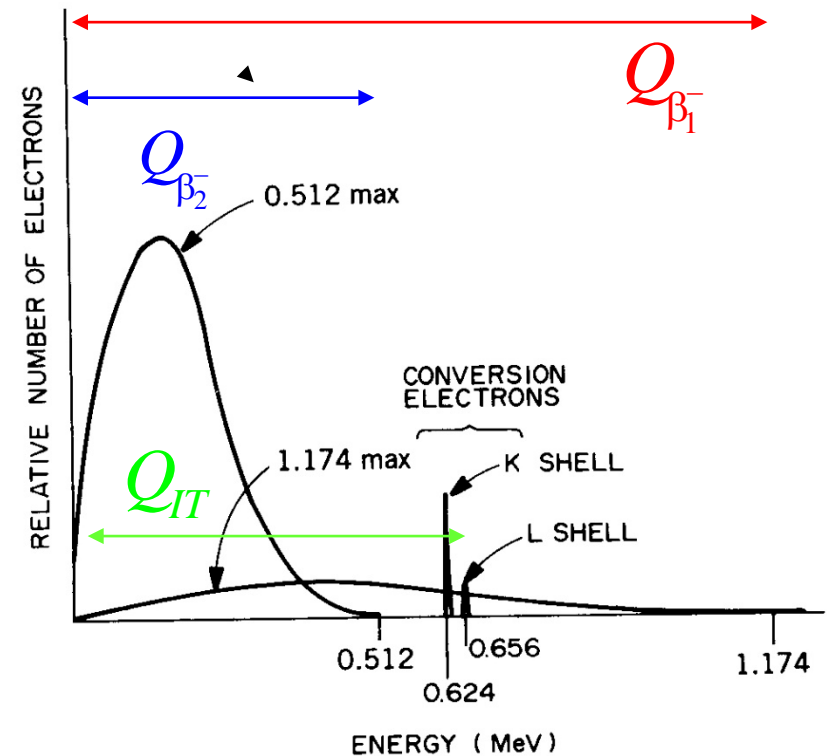
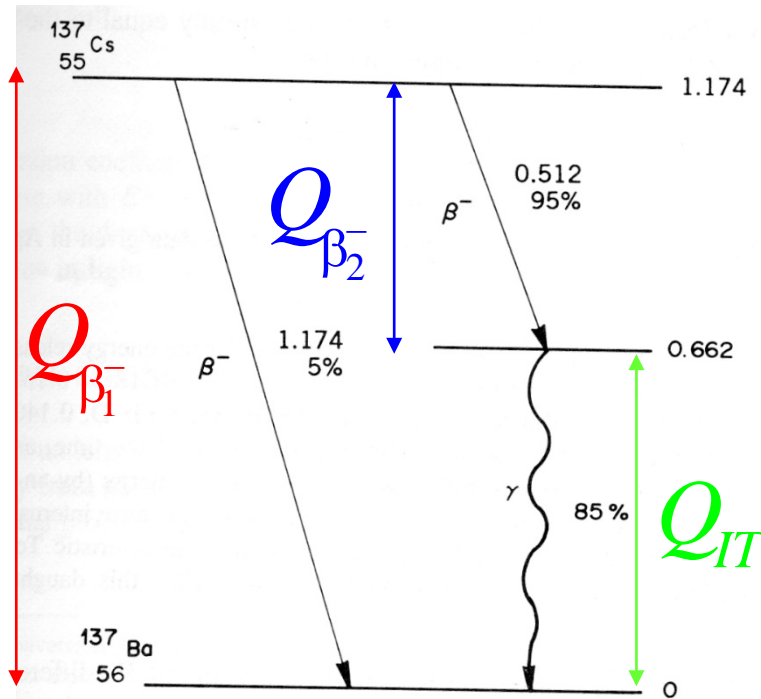
■ Exemple 1:



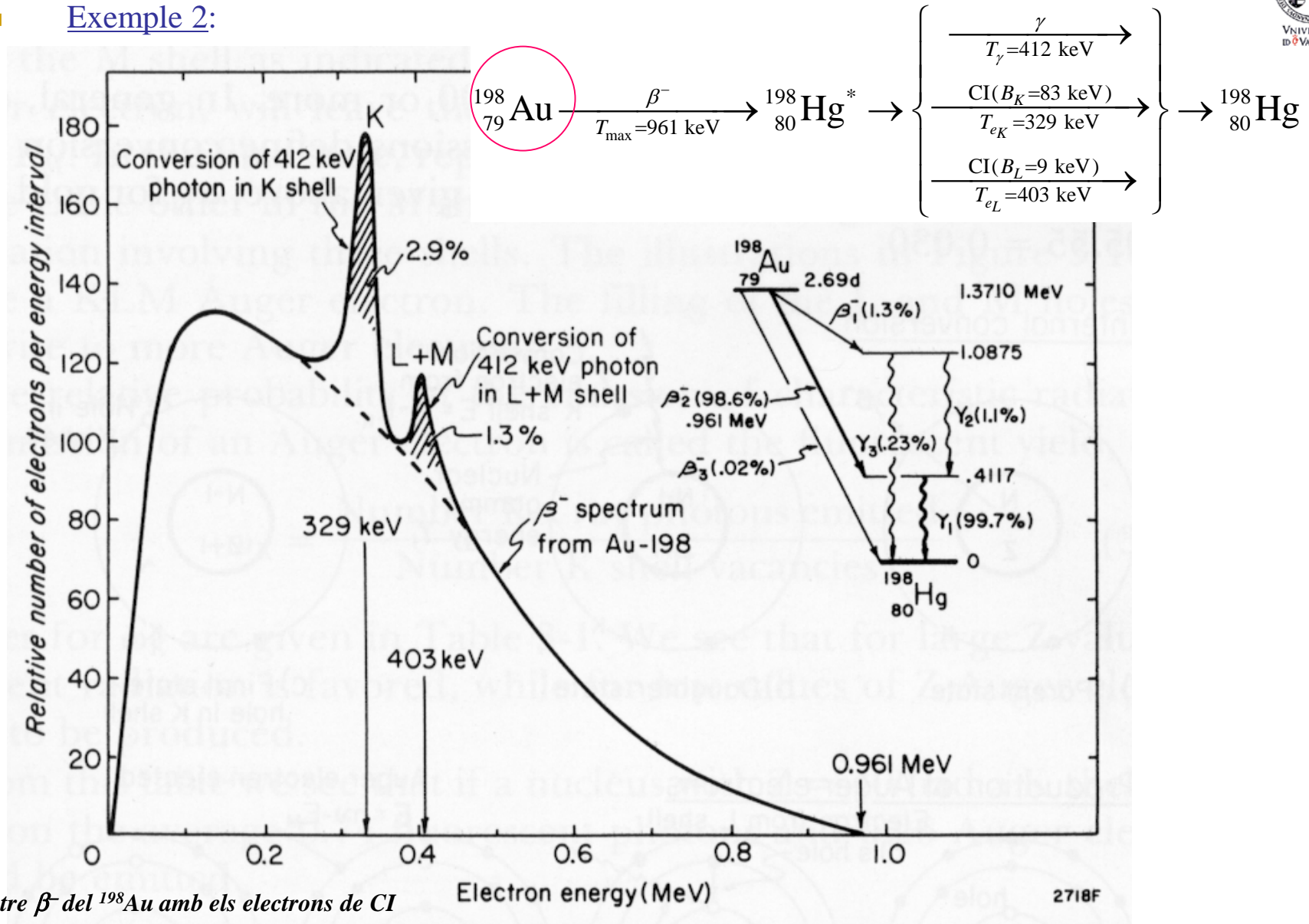
$$T_K = Q_{IT} - B_K = 0.662 - 0.038 = 0.624 \text{ MeV}$$

$$T_L = Q_{IT} - B_L = 0.662 - 0.008 = 0.654 \text{ MeV}$$

Observeu que els electrons de CI tenen energies semblants (encara que menors) a la del procés γ amb el qual competeixen.



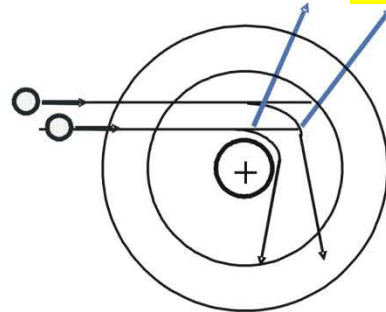
Exemple 2:



Espectre β^- del ^{198}Au amb els electrons de CI

Fonts de raigs X

Electrons
de filament



Raigs X (Bremstrahlung)

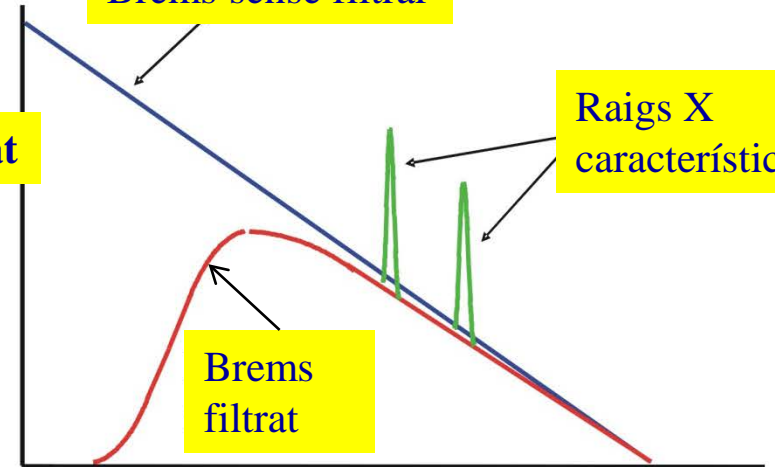
Intensitat

Brems sense filtrar

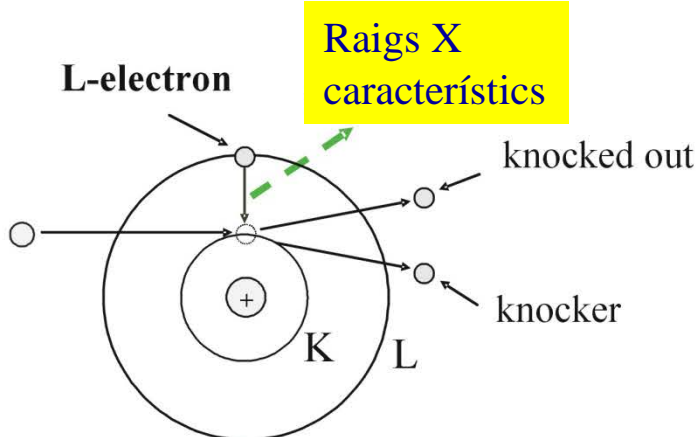
Raigs X
característics

Brems
filtrat

Energia dels raigs X



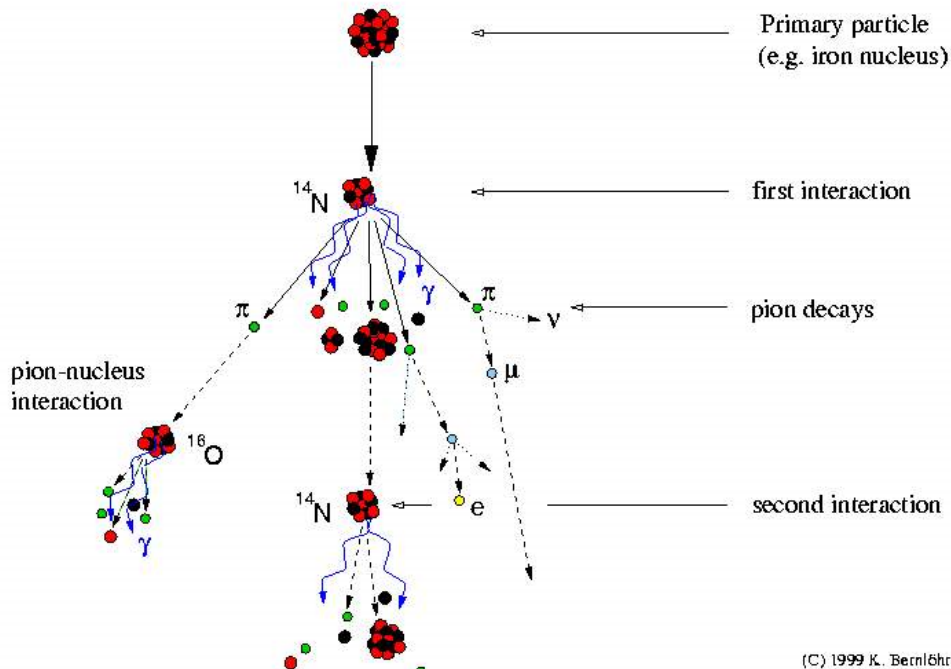
Electrons
de filament



Raigs X
característics

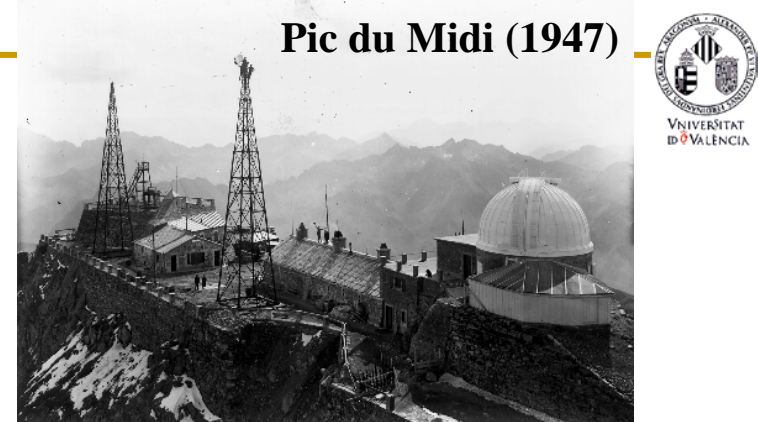
Raigs còsmics

Desenvolupament de pluges de raigs còsmics en l'aire:



- Partícules de molt alta energia (fins a 10^{15} MeV), principalment protons.
- Les col·lisions amb els nuclis de l'atmosfera produeixen cascades de partícules secundàries, principalment pions, muons i neutrinos.
- Els successos interessants ocorren molt rarament, i resulta molt difícil 'caçar-los' amb detectors de partícules.
- Les taxes disminueixen molt ràpidament amb l'energia.

Pic du Midi (1947)



*Grans descobriments en els anys 30, 40 i 50.
Avui torna a ser un camp molt actiu.*

2. Interacció de la radiació amb la matèria

- Quan les partícules travessen un medi material:
 - Interaccionen amb els àtoms, electrons i/o nuclis del medi, interacció que depèn del tipus de partícula i de la seua energia.
 - Depenent del tipus de partícula aquesta interacció pot ser electromagnètica, força o dèbil o poden intervenir-hi diverses forces, encara que una és la dominant.
 - Com que no totes interaccionen de la mateixa manera, cal tractar-les per grups de classificació.
- **Partícules neutres** diferents dels fotons poden ser detectades a través de la seua interacció força o dèbil, fins que originen partícules carregades o fotons:
 - Exemple 1: Neutrons, a través de procés elàstic fort: $n + p \rightarrow n + p$ (amb parafina: experiment de Chadwick en el descobriment del neutró).
 - Exemple 2: Neutrinos, a través del procés dèbil: $\nu_e + n \rightarrow e^- + p$
 - Els fotons interactuen amb el medi material per tres processos electromagnètics que estudiarem. Com que les partícules neutres no ionitzen el medi material, la seua trajectòria no és detectable directament.
- La **interacció electromagnètica** és la que en última instància produeix **el senyal** necessari per a la detecció de les partícules a través fonamentalment dels processos de **ionització i excitació** dels àtoms i molècules de la matèria del detector.

Pèrdua d'energia de partícules carregades

- **Les partícules carregades** perden la seua energia per col·lisió a través de la **interacció coulombiana** amb els àtoms de la matèria (fonamentalment en col·lidir amb els electrons perdent energia, degradació de la seua energia):
 - Col·lisions amb els àtoms/molècules \Rightarrow **excitació atòmica o molecular** \Rightarrow posterior desexcitació i emissió de fotons, que poden ser detectats per les interaccions que realitzen.
 - Col·lisions amb els electrons \Rightarrow **ionització** (rajos δ) (fórmula de Bethe-Bloch) \Rightarrow els electrons ejectats dels àtoms indueixen un senyal elèctric detectable (càrrega generada).
 - Col·lisions amb els nuclis (**difusió múltiple**) \Rightarrow xicoteta pèrdua d'energia (excepte per a ions molt pesants i fragments), però originen canvis de direcció (Rutherford). Són poc probables perquè predominen els processos atòmics.
- **Les partícules carregades lleugeres** (electrons i positrons), cal estudiar-les a part atès que:
 - Poden perdre una fracció considerable de la seua energia en cada col·lisió amb els electrons de la matèria (per ser masses idèntiques).
 - Segueixen una trajectòria erràtica (donada la seua petita massa, exemple dels raigs δ).
 - L'electró incident és idèntic a l'electró dispersat (indistingibilitat de partícules, MQ)
 - També perden energia per emissió de radiació γ (*bremsstrahlung*), quan la partícula pateix una acceleració \Rightarrow l'efecte augmenta amb la quarta potència **del quocient energia/massa**.
- **Les partícules carregades pesants**
 - Només perden una molt petita fracció de la seua energia en cada col·lisió.
 - Segueixen una trajectòria rectilínia (excepte quan pateixen difusió múltiple).

Pèrdua d'energia per a partícules carregades:

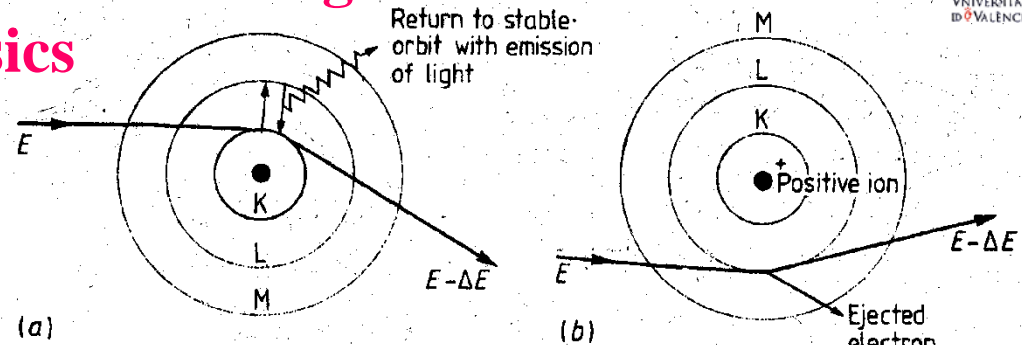
Esquema dels processos bàsics

$$E = T + M$$

$$\Delta E = \Delta T$$

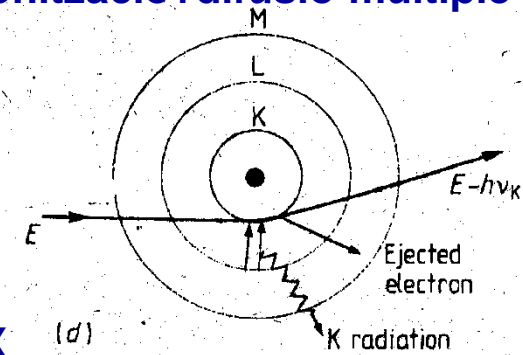
$$S = S_{col} + S_{rad}$$

En tots aquests processos la partícula incident va perdent part de la seua energia fins a aturar-se.

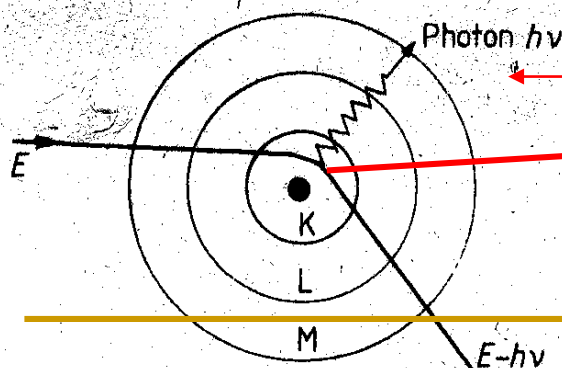


S_{col}

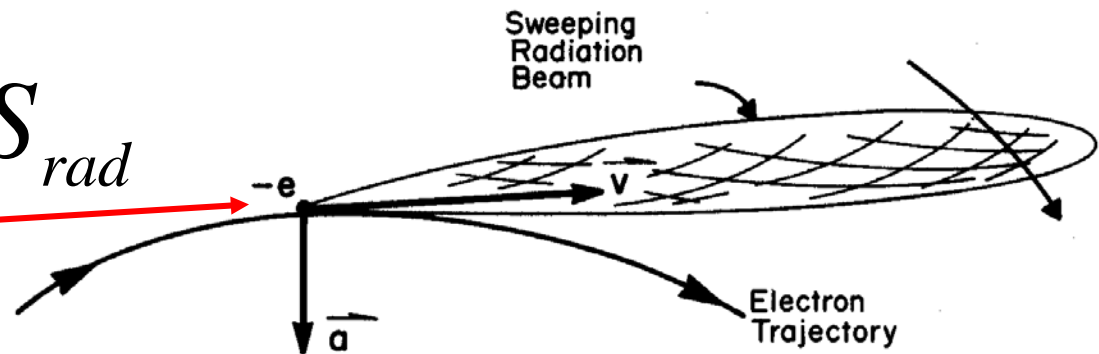
Raigs X



Radiació de frenada (Brems)



S_{rad}



En els acceleradors d'electrons

Poder de frenada

- La taxa de pèrdua d'energia per unitat de recorregut d'una partícula carregada en un medi es denomina **poder de frenada lineal del medi**:

$$-\frac{dT}{dx} = -\frac{dE}{dx}$$

Poder de frenada lineal
(Linear stopping power)

- O també **pèrdua d'energia específica**, si la dividim per la densitat del medi:

$$S = -\frac{dE}{\rho dx}$$

Pèrdua d'energia específica
(Specific energy loss)

- El poder de frenada és una propietat del medi en el qual es propaga la partícula carregada, i només depèn de la seua z i β
- Per a partícules lleugeres:

Quan una **partícula carregada** travessa un medi material són dos els termes que contribueixen a la pèrdua d'energia: l'energia que radia per **brems** (important per a partícules lleugeres) i la que transfereix als electrons atòmics **per ionització i excitació** (col·lisió)

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{total} = \left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad} + \left(\frac{dE}{dx}\right)_{col} \quad -\left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad} \propto Z^2 E_0 \quad \left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad} \approx \frac{EZ}{800} \left(\frac{dE}{dx}\right)_{col}$$

Número atòmic del medi

- Ara en veurem esquemàticament el significat.

- Pèrdua d'energia per **unitat de longitud** o poder de frenada (**màssic**) per a partícules carregades i més massives que l'electró (Fórmula de **Bethe-Bloch**):

$$S_{col} = \frac{1}{\rho} \left(-\frac{dE}{dx} \right)_{col} = K \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \left\{ \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 E_{max}}{I^2} \right) - 2\beta^2 - \delta - 2\frac{C}{Z} \right\} \text{ MeV} \cdot \text{cm}^2/\text{g}$$

$$K = 2\pi N_A r_e^2 m_e c^2 = 0.1535 \text{ MeVcm}^2/\text{g}$$

$$\rho \left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right] \times \Delta x [\text{cm}] \equiv \Delta \sigma \left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^2} \right] \quad \text{Gruix màssic}$$

Dona els valors mitjans de pèrdua d'energia...

$$-\frac{dE}{\rho dx} = \frac{z^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} f(\beta, I)$$

Permet comparar i combinar el poder de frenada (màssic) en distints materials.

r_e : radi clàssic de l'electró

m_e : massa de l'electró

N_A : nombre d'Avogadro

I : potencial mitjà d'excitació

$$I \approx \begin{cases} 12Z + 7 \text{ [eV]}, & Z < 13 \\ 9.76Z + \frac{58.8}{Z^{0.19}} \text{ [eV]}, & Z \geq 13 \end{cases} \quad \text{o} \quad I \approx 16Z^{0.9} \text{ [eV]}$$

Z : nombre atòmic del material

A : pes atòmic del material

ρ : densitat del material

z : càrrega de la partícula incident

E_{max} : màxima energia transferida ($M \gg m_e$)

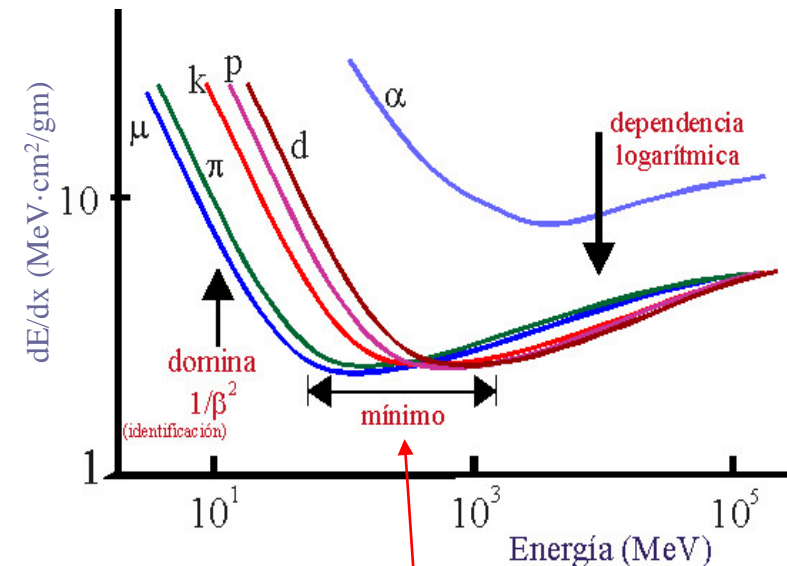
$$E_{max} \approx 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$$

δ : correcció per densitat (efecte d'apantallament, partícules ultrarelativistes en medis densos).

C : correcció de capa (velocitat de la partícula \approx velocitat orbital electrons atòmics).

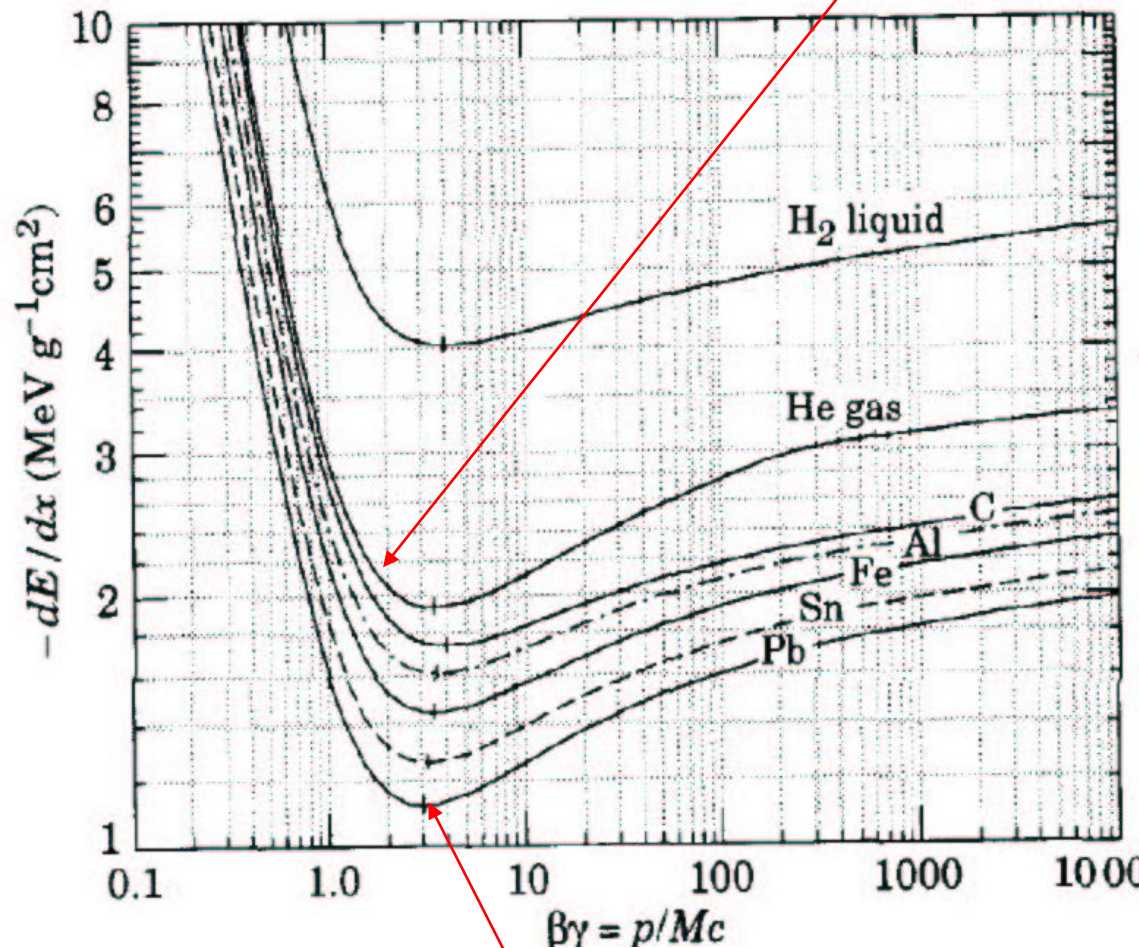
Propietats de la ionització

- Per a un medi determinat, depèn només de la velocitat β de la partícula i la seua càrrega z .
- dE/dx decreix com $1/\beta^2$, factor cinemàtic. Mínim de ionització per a $\beta\gamma \sim 3 \rightarrow$ partícula amb ionització al mínim (**m.i.p**): $dE/dx \sim 2 \text{ MeV g}^{-1} \text{ cm}^{-2}$ Exercici
- Per davall del mínim (partícules lentes) hi ha una elevada pèrdua d'energia i les corbes són distintes per a diferents partícules \rightarrow **identificació**
 - A molt baixes energies (velocitats \sim de la de l'electró orbital), Bethe-Bloch no funciona; apareixen efectes com ara la tendència a captar electrons, la qual cosa fa que disminuïska la seua càrrega efectiva i el poder de frenada
- Per damunt del mínim, augment relativista (terme **$\ln\gamma^2$**). Atribuït a l'expansió relativista del camp elèctric \rightarrow contribució de col·lisions més distants.
- *Plateau*: augment relativista cancel·lat per “l'efecte densitat”. Apantallament d'àtoms distants per polarització del medi: parametritzat per δ (major efecte en sòlids i líquids).
- Depèn de $z^2 \rightarrow$ augmenta molt per a ions.



El mínim està en $\beta\gamma \sim 3$
 \rightarrow partícules
 relativistes, $\beta \sim 0.95c$

Z/A no difereix molt per als diversos elements excepte per al H
 → Es poden plantejar lleis d'escala



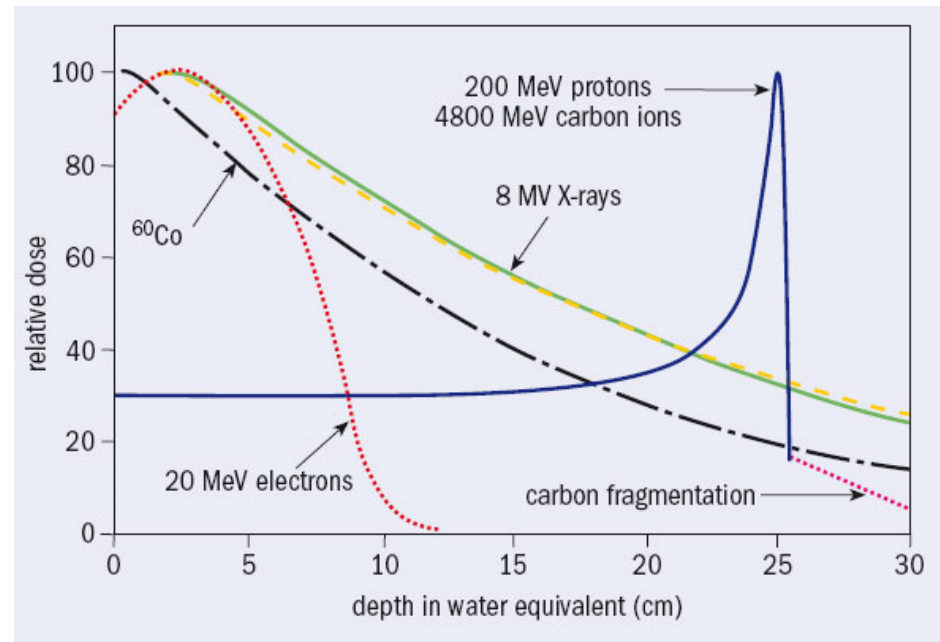
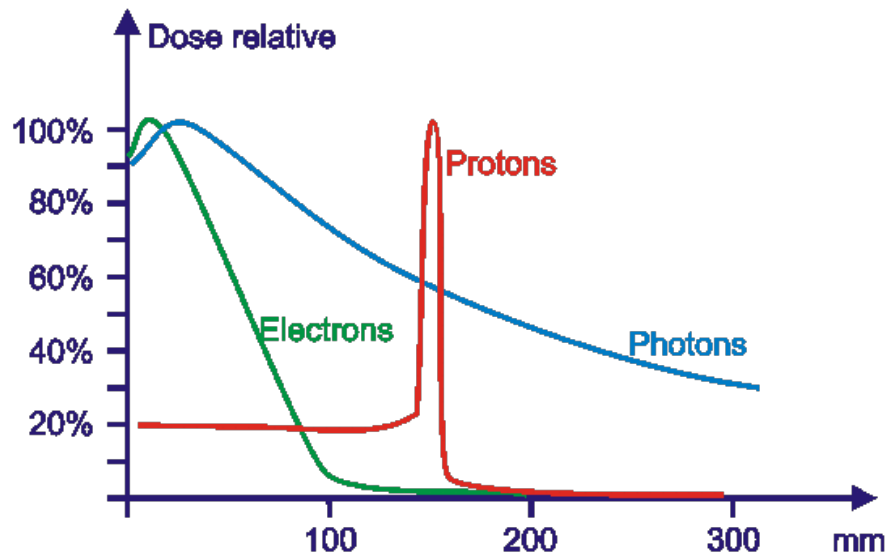
Dependència en Z/A del medi material per a la pèrdua d'energia de partícules i ions. No s'inclou els efectes de frens.

$\beta\gamma \sim 3$

L'única dependència amb la partícula és amb $\beta\gamma$, per z fixada (1 en aquest cas).

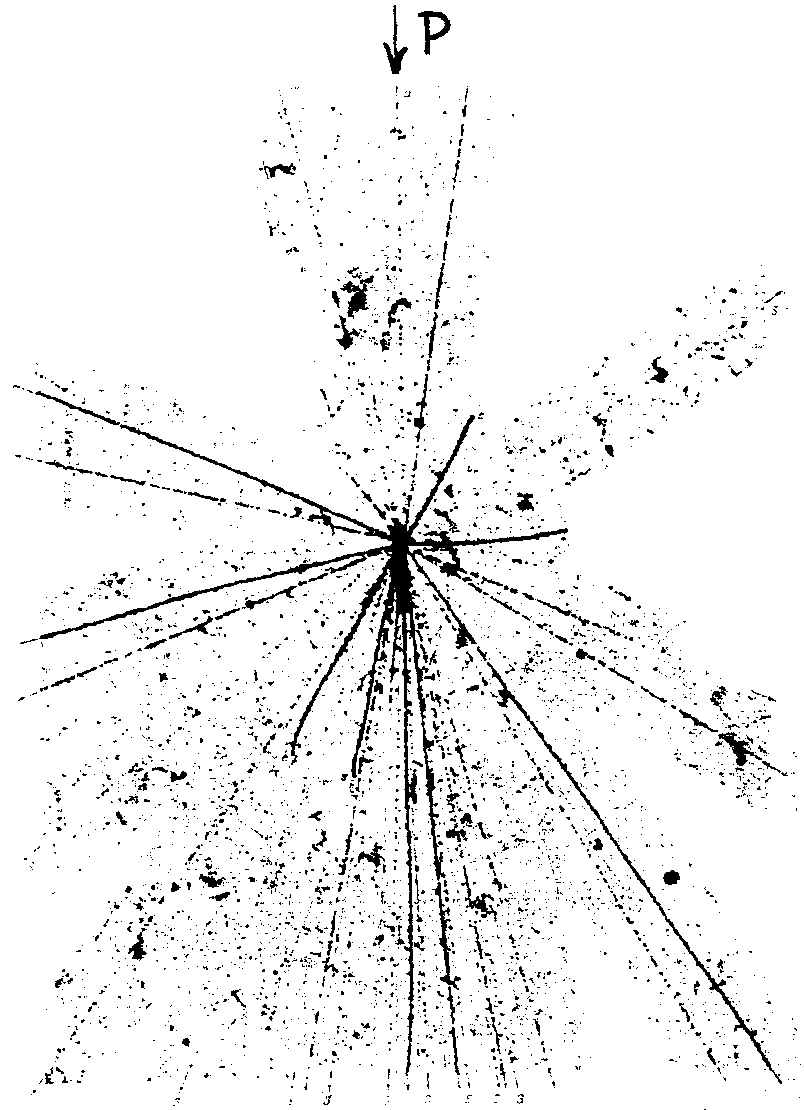
Corba de Bragg

- A mesura que l'energia decreix, el poder de frenada augmenta d'acord amb la fórmula de Bethe-Bloch.
- Per davall d'un cert llindar, els electrons del medi es recombinen amb la partícula carregada (positivament), i el poder de frenada cau bruscament.
- En el cas dels electrons, el poder de frenada augmenta més lentament amb la distància de penetració a causa dels canvis de direcció, de manera que no hi ha increment d'energia depositada prop del final del recorregut de l'electró.
- La corba de Bragg és la base de les aplicacions mèdiques d'irradiació per a tractament de tumors: ions pesants és el millor.



Interacció nuclear d'un protó d'alta energia (amb emulsió fotogràfica)

Exemple de la ionització produïda per partícules i ions: ionitzen menys les més energètiques i les de menor z .



Poder de frenada en mescles, compostos i regles d'escala

- **Regla de Bragg-Kleeman** (*hipòtesi*): el poder de frenada de mescles i compostos és additiu ($Z/A \approx \text{constant}$):

$$\frac{1}{\rho_c} \left(-\frac{dE}{dx} \right)_c = \sum_i a_i \frac{A_i}{A_c} \frac{1}{\rho_i} \left(-\frac{dE}{dx} \right)_i = \sum_i \omega_i \frac{1}{\rho_i} \left(-\frac{dE}{dx} \right)_i$$

sent a_i el nombre d'àtoms de l'element i-èsim, A_i el seu pes atòmic i $A_c = \sum_i a_i A_i$ el pes molecular del compost ($\frac{a_i A_i}{A_c} = \omega_i$) és la **fracció en pes** de l'element i-èsim) .

Regla d'escala: per a diferents partícules en un mateix medi.

$$-\frac{dE}{dx} = z^2 f'(\beta^2) \Rightarrow -\frac{dE_2}{dx}(T_2) = -\left(\frac{z_2}{z_1} \right)^2 \frac{dE_1}{dx}(T_2 \frac{M_1}{M_2})$$

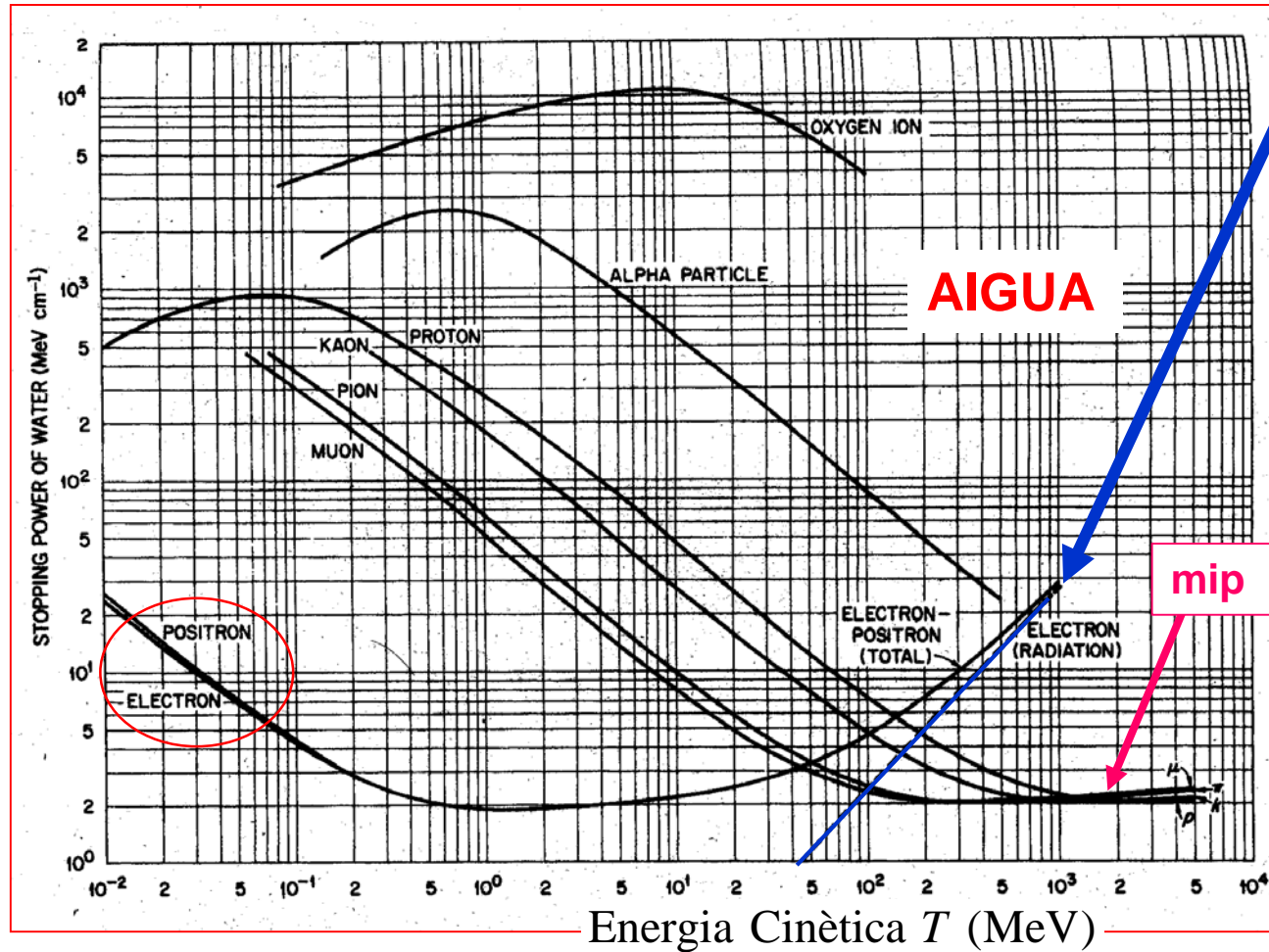
Exercici

La partícula 2 amb energia T_2 tindrà la mateixa pèrdua d'energia que la partícula 1 quan aquesta tinga $T_1 = T_2 \left(\frac{M_1}{M_2} \right)$, en què les dues tenen la mateixa velocitat.

Poder de frenada de l'aigua

$$\left(-\frac{dE}{dx}\right)^{\pm} = \left(-\frac{dE}{dx}\right)_{Col}^{\pm} + \left(-\frac{dE}{dx}\right)_{rad}^{\pm}$$

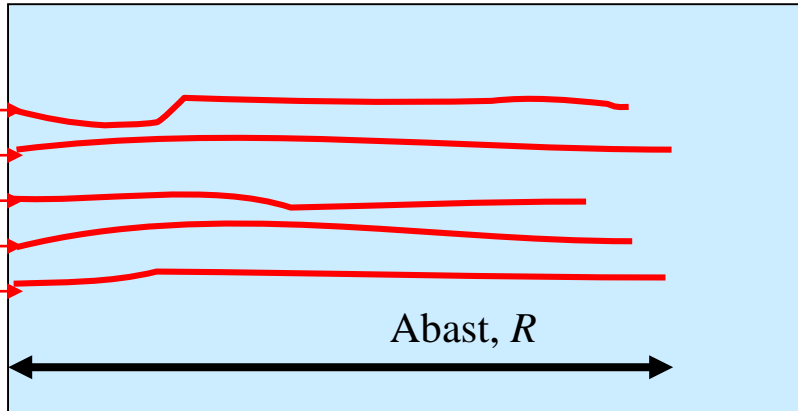
$$-\frac{dE}{dx} \left[\frac{\text{Mev}}{\text{cm}^{-1}} \right]$$



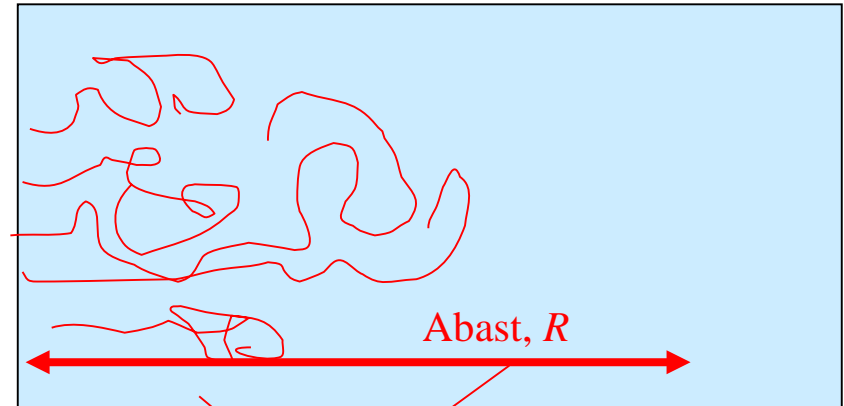
Observeu que per als electrons el terme de *brem*s domina la pèrdua d'energia a energies cinètiques relativament baixes.

Conceptes d'abast i *straggling* de les partícules

Partícules pesants



Electrons i positrons (lleugers)

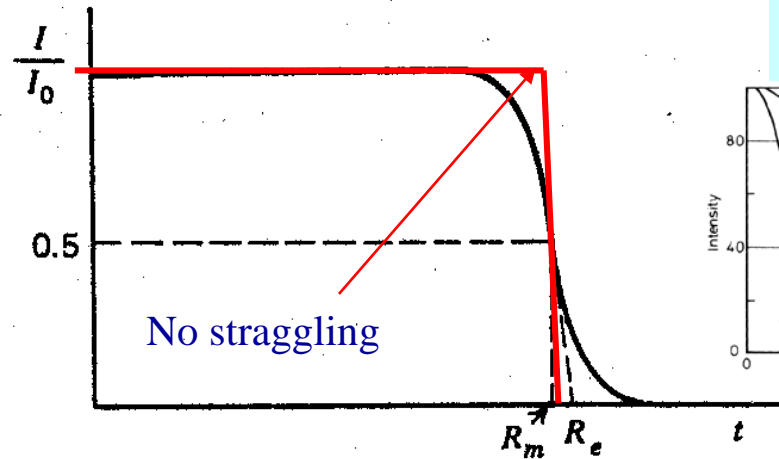
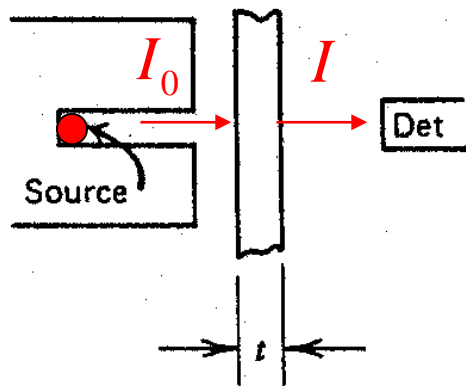


Es pot calcular l'abast dels ions fent la integral de la pèrdua d'energia

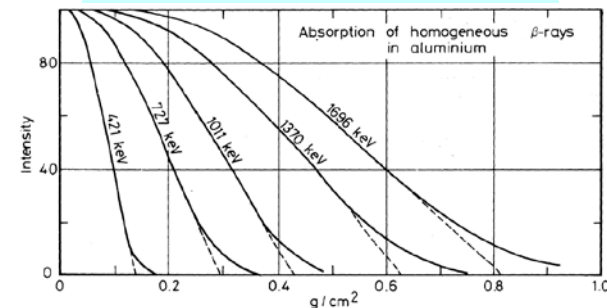
$$R(T) \approx \int_0^T \left(-\frac{dT}{dx} \right)^{-1} dT$$

~~$$R_{CSDA} \approx \int_0^T \left(-\frac{dT}{dx} \right)^{-1} dT$$~~

No aplicable per als electrons



$$I(x) \approx I_0 \exp(-\mu x)$$



En el cas dels electrons usarem els coeficients d'absorció lineals o massics

Altres processos de pèrdua d'energia de partícules carregades

- **Radiació de Cerenkov**, quan la velocitat de la partícula en el medi material és superior a la de la llum, s'emet una radiació lluminosa que pot ser detectada \Rightarrow la quantitat de llum emesa i l'angle d'emissió depenen de la velocitat de la partícula \Rightarrow identificació de partícules (si es coneix el moment).

$$v_{\text{llum}} = c / n, \quad v > c / n$$

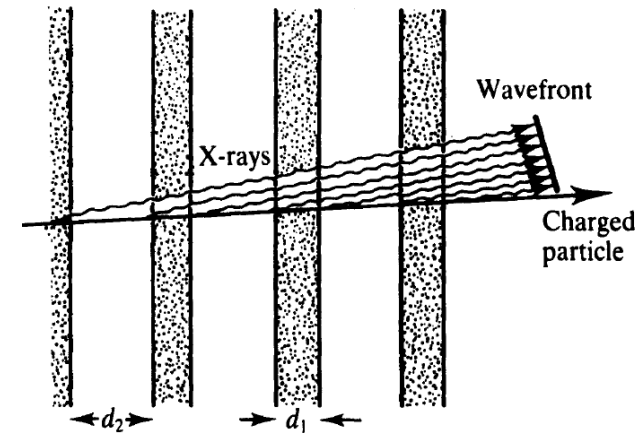
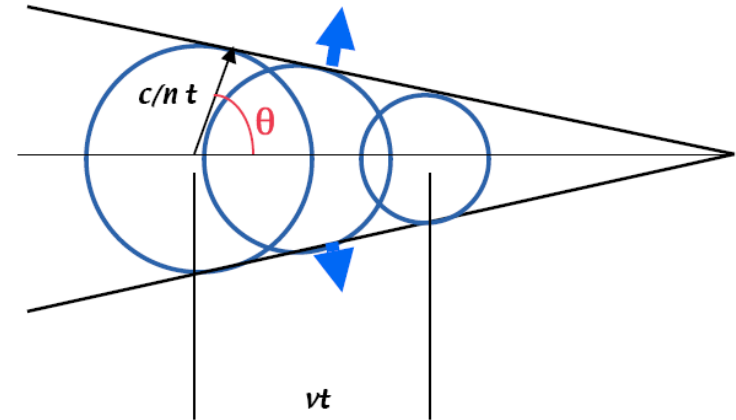
Angle d'emissió dels fotons:

$$\cos \theta = \frac{ct/n}{vt} = \frac{1}{\beta n} \quad \text{amb } n = n(\lambda) \geq 1$$

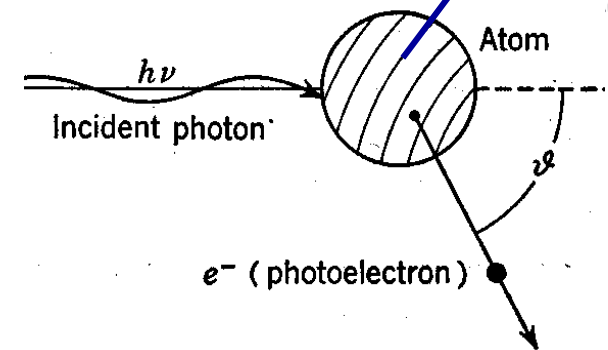
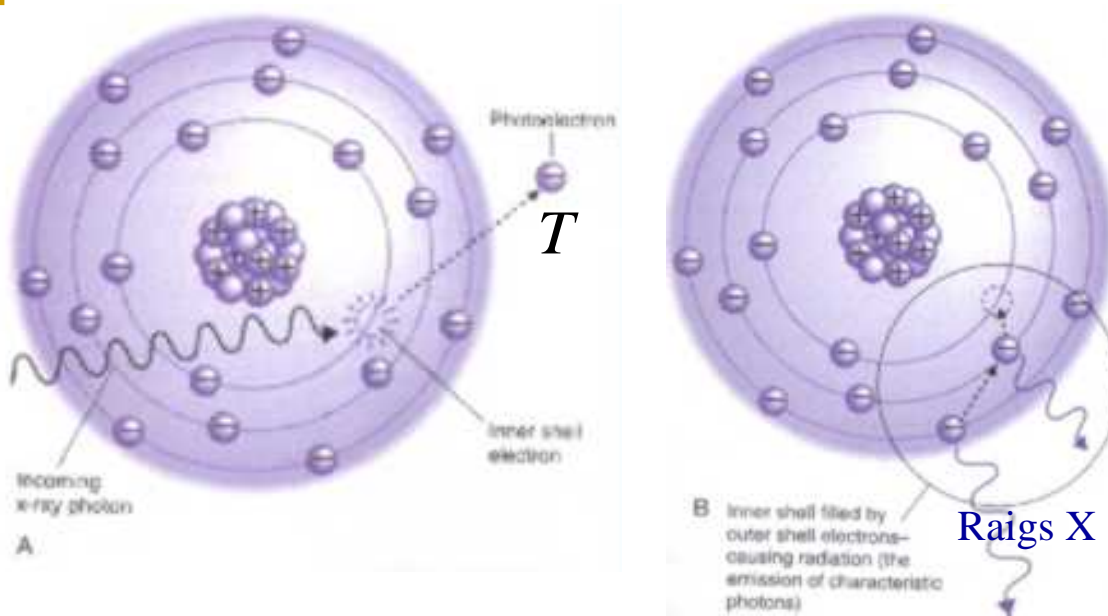
L'espectre energètic dels fotons Cerenkov ($E = N\hbar\omega$)

$$\frac{d^2 N}{dE dx} = \frac{\alpha z^2}{\hbar c} \sin^2 \theta_c = \frac{\alpha^2 z^2}{r_e m_e c^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(E)} \right)$$

- **Radiació de transició**, quan una partícula carregada travessa el límit de separació entre dos mitjans amb índexs de refracció distints s'emet aquesta radiació que:
 - Resol la saturació dels detectors Cerenkov per a partícules ultrarelativistes.
 - Radiació extremadament dèbil \Rightarrow seqüència de làmines les contribucions de les quals sumen coherentment.
 - La radiació emesa creix amb el quocient (energia/massa) de la partícula.



Partícules neutres. Raigs X i fotons: efecte fotoelèctric



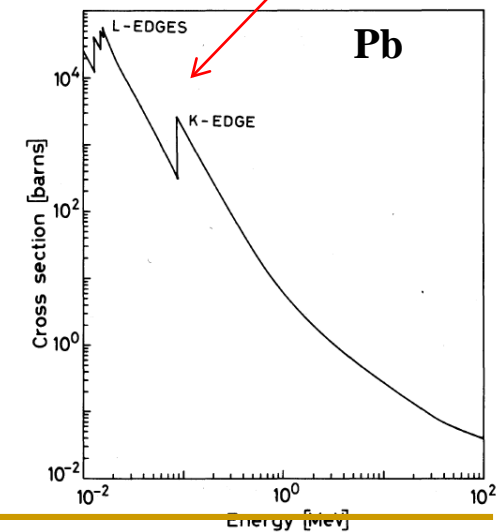
$$T = h\nu - B_e$$

Raigs X del plom
visibles al laboratori

- El fotó interacciona amb un electró lligat dins de l'àtom.
- El fotó és absorbit i desapareix: dóna l'energia a l'electró.
- La probabilitat d'absorció és màxima quan l'energia del fotó és igual a l'energia de l'electró en la capa (ressonància).
- Després, l'àtom emet raigs X reequilibrant-se.

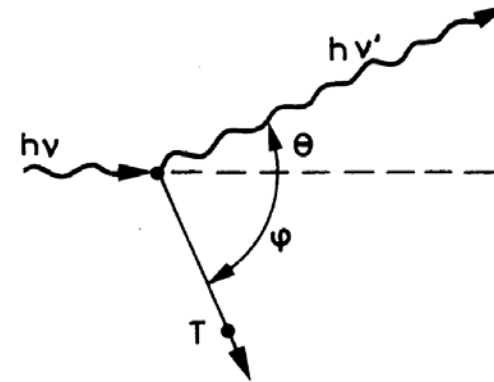
Secció eficaç
fotoelèctrica per àtom

$$\sigma_{foto} \propto Z^5 E_{\gamma}^{-7/2}$$



Raigs X i fotons: dispersió incoherent Compton

- Procés de difusió de fotons sobre electrons que considerem “quasi”-lliures.



Definició del paràmetre γ

$$\gamma = \frac{E_\gamma}{m_e c^2}$$

- Per conservació d'energia i moment:

Energia d'eixida del fotó dispersat

$$E_\gamma' = \frac{E_\gamma}{1 + \gamma(1 - \cos \theta)}$$

Energia d'eixida de l'electró dispersat

$$T_e = E_\gamma - E_\gamma' = E_\gamma \frac{\gamma(1 - \cos \theta)}{1 + \gamma(1 - \cos \theta)}$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{2}{(1 + \gamma)^2 \tan^2 \varphi + 1}$$

$$\cot \varphi = (1 + \gamma) \tan \frac{\theta}{2}$$

Corriment de longitud d'ona del fotó

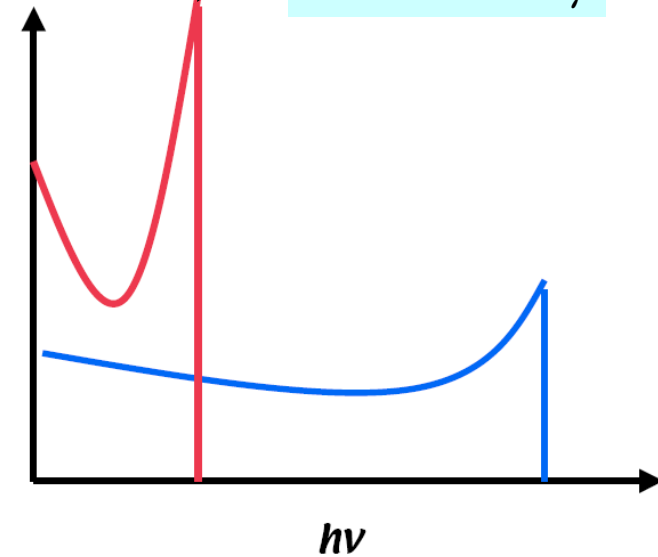
$$\Delta \lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta)$$

Secció eficaz Compton per àtom

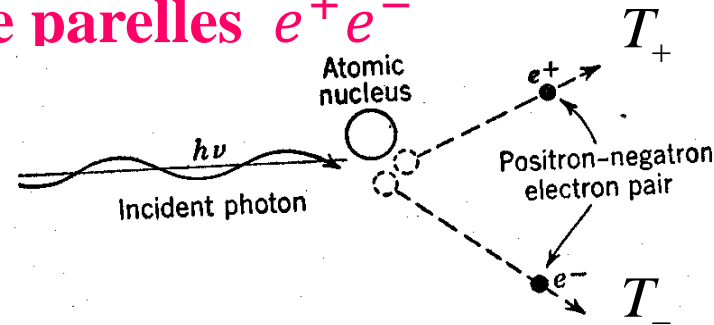
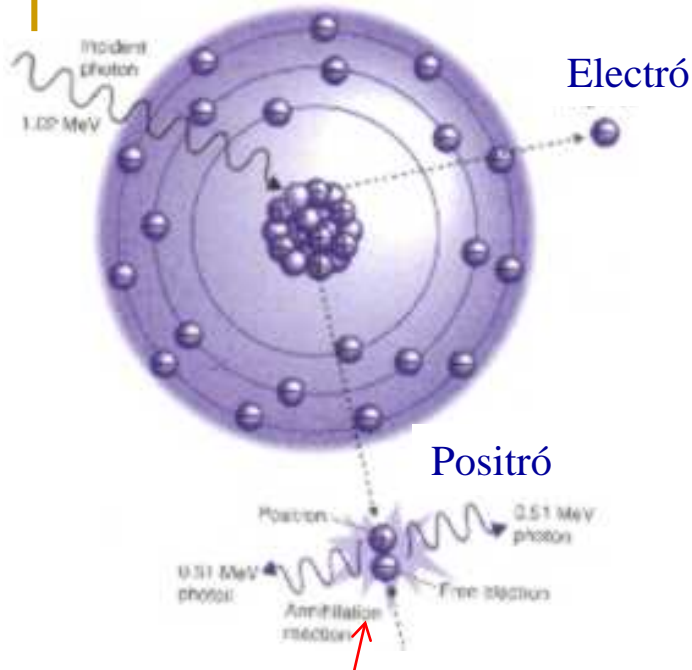
$$\sigma_{\text{Compton}} \propto Z E_\gamma^{-2}$$

“Compton edge”

$$T_{e,\text{max}} = E_\gamma \frac{2\gamma}{1 + 2\gamma}$$



Raigs X i fotons: producció de parelles e^+e^-



- Conseqüència de la interacció amb el camp e.m. del nucli, encara que també dels electrons atòmics. Balanç energètic:

$$h\nu = (T_- + mc^2) + (T_+ + mc^2)$$

- Valor llindar** de l'energia del fotó per a la producció:

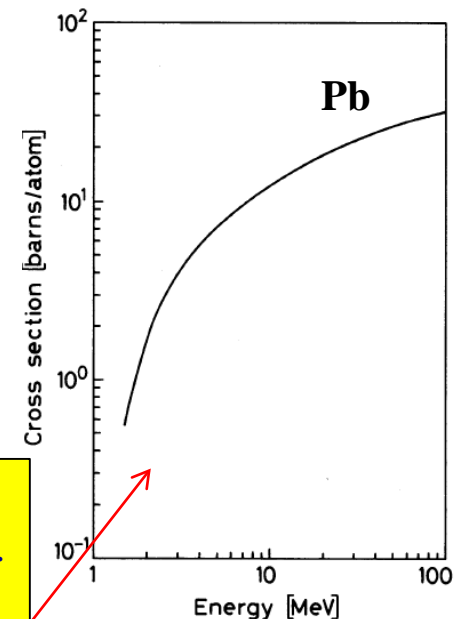
$$h\nu = 2m_e c^2 = 1.022 \text{ MeV}$$

S'observa que el positró creat s'aniquila amb un electró del medi generant dos raigs X de 511 MeV

Secció eficaç de producció de parelles per àtom

$$\sigma_{\text{parelles}} \propto Z^2 \ln E_\gamma$$

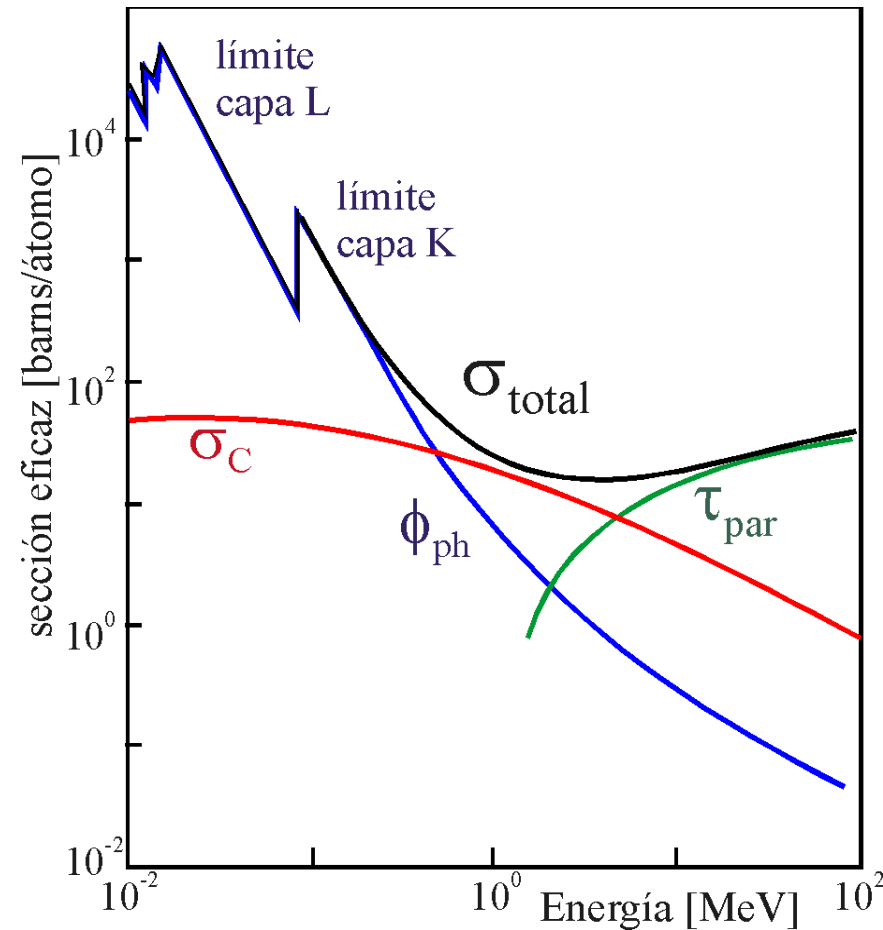
Compareu la dependència dels tres processos en funció de l'energia i del Z del material. El procés fotoelèctric domina a baixa energia i elements pesants. L'efecte Compton domina a energia intermèdia dels fotons i el procés de producció de parelles domina a altes energies



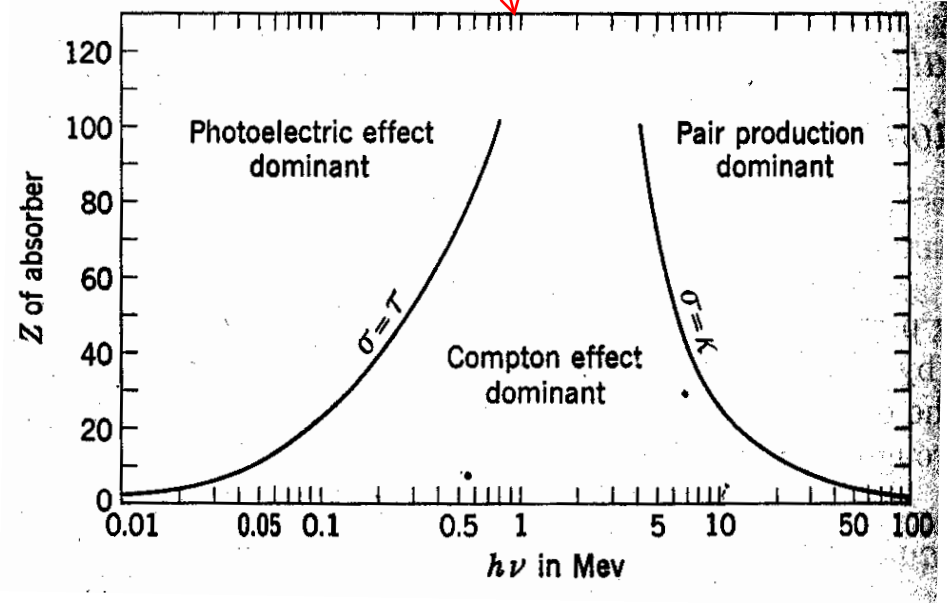
Atenuació total de fotons

$$\sigma_{total} = \sigma_{foto} + \sigma_{Compton} + \sigma_{pares}$$

Els símbols τ , σ , κ representen les seccions eficaces dels tres processos, fotoelèctric, Compton i de producció de parelles respectivament



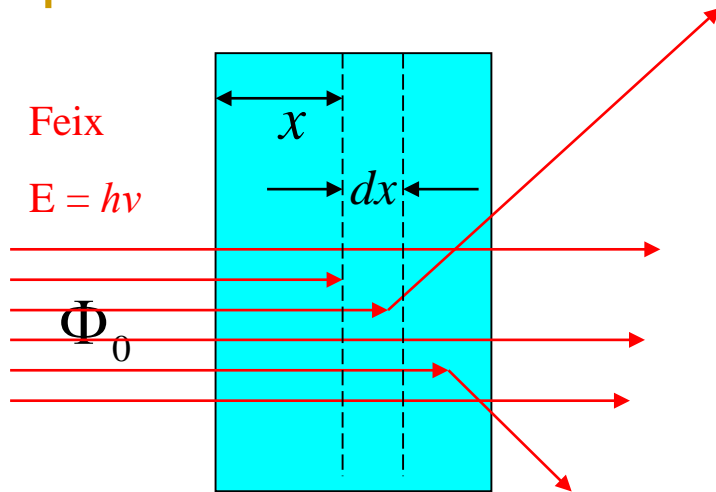
Secció eficaz total d'absorció en plom



+Absorció fotonuclear, en la que s'arranquen neutrons (ressonàncies gegants, 10-25 MeV)

El procés fotoelèctric domina a baixa energia i elements pesants. L'efecte Compton domina a energia intermèdia dels fotons i el procés de producció de parelles domina a altes energies

Coeficients màssics d'atenuació



Vegeu tema 1

$$\frac{\Phi(x)}{\Phi_0} = \frac{I(x)}{I_0} = e^{-x/\lambda} = e^{-\mu x} = e^{-\frac{\mu}{\rho} \rho x}$$

$$\mu_m = \frac{\mu}{\rho} = \frac{N_A}{A} \sigma_{tot} ; [\mu_m] = \text{g}^{-1} \text{cm}^2$$

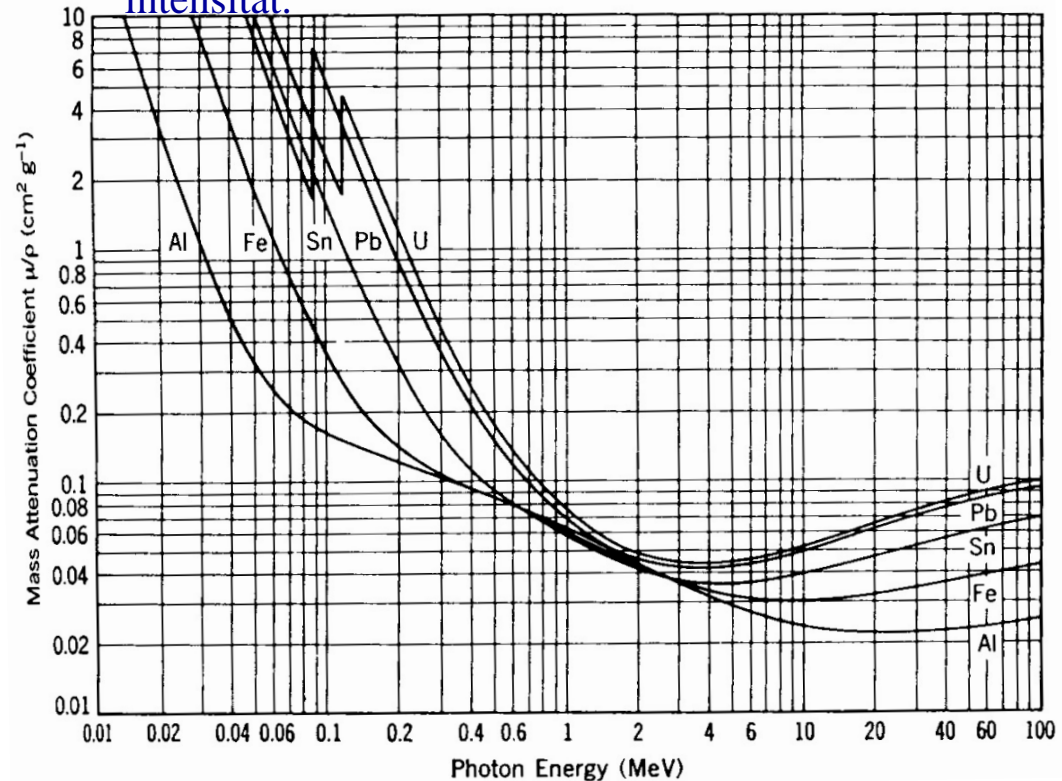
Permet definir:

- μ_m : coeficient d'absorció màssic total
- μ : coeficient d'absorció lineal total

$$x_m = \rho x \left[\text{g cm}^{-2} \right]$$

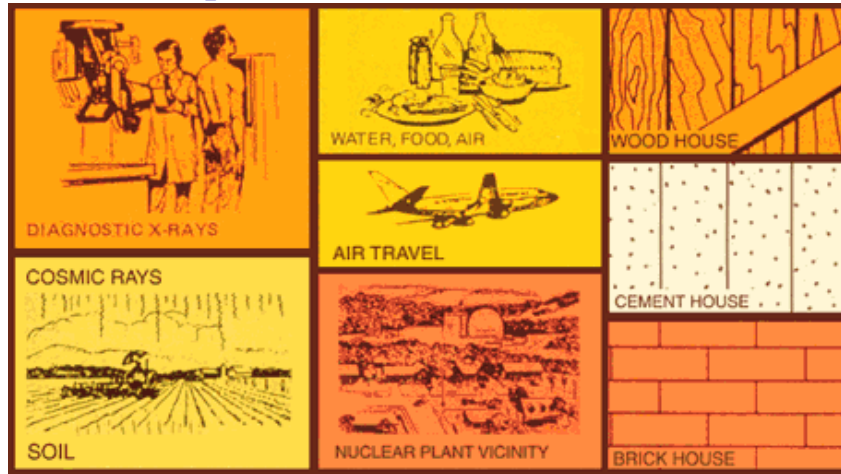
- En general, comptant tots aquests processos, ocorre que els fotons són més penetrants que les partícules carregades.

- El fotó bé s'absorbeix, bé es difon i desapareix del feix \Rightarrow els fotons **no es degraden** en energia, sinó en intensitat.



3. Dosimetria

- L'home està exposat contínuament a fonts radioactives naturals de radiacions ionitzants:



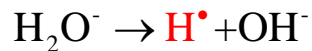
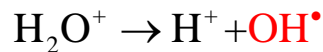
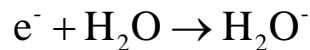
Les radiacions poden fins i tot provenir del nostre cos, que emmagatzema substàncies radioactives com ara els (^{40}K , ^{14}C , ^{131}I ,...).



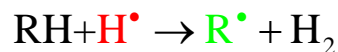
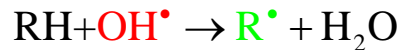
- Els efectes nocius per a la salut van començar a identificar-se molt prompte, i a partir de 1928 s'inicia l'elaboració de normes de protecció radioactiva. Des de 1950 la comissió encarregada d'establir la normativa s'anomena Comissió Internacional de Protecció Radiològica (ICRP).
- Les radiacions produeixen **dos tipus d'efectes**:
 - ❑ **Estocàstics (dosi baixa)**: la mort d'alguna cèl·lula no és un problema, però la modificació genètica de cèl·lules aïllades pot conduir a efectes malignes posteriors. No hi ha llindar mínim per a la producció d'efectes malignes, però el risc augmenta amb la dosi (encara que siga baixa).
 - ❑ **Deterministes (dosi alta)**: la mort cel·lular pot ser prou per a causar canvis en el teixit i el funcionament orgànic. Existeix un **llindar de dosi**, i la severitat s'incrementa amb la dosi.

- La radiació deposita la seua energia i causa **la ionització i l'excitació** de les molècules i àtoms dels teixits.
- Però els efectes biològics de la radiació són complexos (**Radiobiologia**).
- **Dany físic directe.** Part de l'energia és transferida per interacció directa amb el material biològic sensible en llocs crítics (ADN), causant dany biològic irreversible: Característiques:
 - Partícules carregades pesants. (Recordeu la fórmula de Bethe-Bloch i el concepte de pic de Bragg). Són poc penetrants però amb **elevada densitat de ionització, molt localitzada**. Exemple: un α d'1 MeV en teixit recorre tan sols desenes de μm .
 - Electrons. Menor densitat de ionització, però requereixen major volum per a ser absorbides (porten en el medi una trajectòria erràtica). Exemple: una β d'1 MeV requereix diversos mm de metall per a ser aturada.
 - Neutrons. Només interaccionen amb els nuclis.
 - ✓ A baixes energies (0.025-100 eV) domina el procés de captura radiativa (n, γ). Com que el teixit viu té alta densitat de H, $n + p \rightarrow d + \gamma$, $E_\gamma = 2.2 \text{ MeV}$.
 - ✓ A altes energies ($> \text{keV}$) dominen les col·lisions elàstiques, $n + p \rightarrow n + p$. El n perd en cada col·lisió molta energia, i el p produeix una elevada dE/dx . Si el n col·lideix amb un nucli més pesant (C, O), la dE/dx és encara major. Amb $E_n = 2 \text{ MeV}$, el n necessita quasi $\sim 6 \text{ cm}$ per a reduir la seua energia a $E_n = 0.025 \text{ eV}$
 \Rightarrow els n poden produir grans dE/dx a elevada profunditat.
 - Fotons. L'atenuació depèn de E_γ i Z . Atès que el teixit viu conté elements de baix Z (C, H i O), domina l'efecte Compton per a E_γ entre $\sim 40 \text{ keV}$ i 10 's MeV. L'absorció de fotons és \sim exponencial. Exemple: un fotó de diversos MeV requereix molts cm de Pb.

- **Dany químic indirecte.** No obstant això, la major part de les interaccions primàries tenen lloc amb molècules simples, que produeixen **radicals lliures**, químicament molt actius:
 - Els radicals poden difondre's al llarg del teixit viu i induir canvis químics en llocs crítics de material biològic sensible \Rightarrow domina el dany biològic total.
 - Aigua \approx 80% del teixit viu \Rightarrow radioquímica de l'aigua.



Un **radical lliure** és un àtom o una molècula amb un electró desaparellat, i per tant amb tendència a emparellar-se amb un altre radical o a transferir l'electró en una reacció.



Radical lliure orgànic

(RH = molècula orgànica)

- El radical lliure orgànic pot reaccionar amb altres molècules que formen part d'un sistema biològic més complex, com el **cromosoma**, danyant-lo i produint bé la mort de la cèl·lula, la seua incapacitat per a reproduir-se (mitosi) o la modificació d'informació genètica (**mutació**).
 - Per a baixos nivells de radiació i dE/dx , els efectes químics indirectes i físics es reparen i no produeixen danys permanents.
- Les reaccions amb O produeixen radicals O^\bullet els quals al seu torn produeixen canvis moleculars d'importància biològica i al seu torn produeixen altres radicals (reacció en cadena).
 - **Efecte oxigen:** els efectes de la radiació són majors en teixits rics en oxigen.

Magnituds i unitats metrològiques: conceptes i definicions

Les magnituds es classifiquen en **objectives** (tenint en compte només la quantitat i l'energia que la radiació deposita) i **subjectives** quan considerem a més el dany que poden causar en els teixits vius.

Les **objectives**:

- **Activitat (A):** mesura el **nombre de desintegracions** que ocorren per unitat de temps (taxa).
 - Unitat SI: **Bq (Becquerel)** = 1 desintegració/s.
 - Unitat tradicional: **Ci (Curie)** = 3.7×10^{10} Bq.
- **Exposició (X)** (a raigs X o γ): Càrrega generada per la radiació per unitat de massa **en aire** (q/m)
 - Unitat SI: **C/kg**.
 - Unitat tradicional: **R (roentgen)** = quantitat de radiació X (o γ) necessària per a crear una càrrega d'1 esu ($|e| = 4.8 \times 10^{-10}$ esu = 1.602×10^{-19} C) **en 1 cm³ d'aire** en condicions STP (1 atm i 0°C, $\rho_{\text{aire}} = 1,293$ kg/m³):

$$1 \text{ R} = \frac{1 \text{ esu}}{1 \text{ cm}^3 \text{ aire STP}} = \frac{1 / 4.8 \times 10^{-10} |e|}{1.293 \times 10^{-6} \text{ kg aire}} = 2.58 \times 10^{-4} \text{ C/kg}$$
- **Dosi absorbida (D):** Energia depositada per unitat de massa ($D = dE/dm$).
 - Unitat SI: **Gy (Gray)** = 1 J/kg = 6.24×10^{12} MeV/kg.
 - Unitat tradicional: **rad** = 100 erg/g = 0.01 Gy \rightarrow (1 Gy = 100 rad).
 - La relació entre D i X depèn del material, ja que la relació entre la càrrega produïda i l'energia depositada depèn del material, així: 1 R (aire) = 0.88 rad; 1 R (teixit animal) = 0.93 rad. L'energia per a produir un parell ió-electró en aire és = 34 eV (1 eV = 1.602×10^{-19} J, 1 J = 10^7 erg):

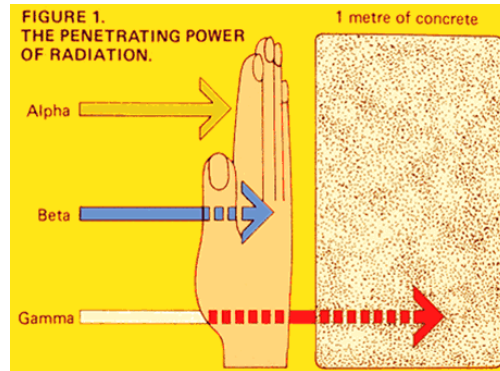
$$1 \text{ R} = \frac{2.58 \times 10^{-4} \text{ C}}{\text{kg}} \times \frac{34 \text{ eV}}{1.602 \times 10^{-19} \text{ C}} \times \frac{1.602 \times 10^{-19} \text{ J}}{\text{eV}} = 8.8 \text{ mGy} = 0.88 \text{ rad}$$

Les **subjectives**:

- **Dosi equivalent (H o DE):** dosi absorbida pesada per l'efecte biològic de la **radiació considerada**:

$$H = w_F D$$

- Unitat SI: **Sv (Sievert)** = $w_F \times \text{Gy}$
- Unitat tradicional: **rem** = **0.01 Sv**



- **Dosi equivalent efectiva:** dosi equivalent pesada pel dany específic en l'òrgan considerat:

$$H_e = \sum_i w_i H_i$$

- **Taxes o ritmes d'exposició X ,** dosi absorbida i dosi equivalent:

- Corresponen a les magnituds anteriors **per unitat de temps**:

$$\dot{X} = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \Gamma \frac{A}{d^2} \quad [\Gamma] = \left[\frac{\text{R} \cdot \text{m}^2}{\text{h} \cdot \text{Ci}} \right]$$

Γ : constant específica de taxa d'exposició

Radiació	w_F
X, γ , e, μ	1
n < 10 keV	5
n de 10-100 keV	10
n de 100 keV-2 MeV	20
n de 2-20 MeV	10
n > 20 MeV	5
p < 20 MeV	5
α , fragments, nuclis pesants	20

Teixit	w_i
Gònades	0.08
Medul·la òssia, còlon, pulmons, estómac, pit	0.12
Bufeta, esòfag, fetge, esòfag, tiroides	0.04
Pell, cervell, cortical òssia, glàndules salivessis	0.01
Resta	0.12

$$\Gamma [^{60}\text{Co}] = 1.32$$

$$\Gamma [^{137}\text{Cs}] = 0.33$$

$$\Gamma [^{192}\text{Ir}] = 0.47$$

$$\Gamma [^{22}\text{Na}] = 1.2$$

Limitació de dosi

- A pesar dels riscos que entraña la radiació, són molts els beneficis que obtenim a canvi amb el seu ús (indústria, medicina, investigació). Per això, cal establir una relació òptima benefici-risc, amb la premissa que la dosi ha de ser:

“Tan baixa com siga raonablement possible” (Criteri ALARA)

- ⇒ Reducció del temps de permanència a la radiació. **[As Low As Reasonably Allowed]**
- ⇒ Augment de la distància a la font (la radiació rebuda decreix $\propto r^{-2}$)
- ⇒ Blindatges que aturen la radiació (depenen del tipus de radiació).

Límits ICRP

Tipus de dosi	Límit màxim al professional exposat, anual	Límit màxim al públic , anual
Dosi equivalent efectiva anual mitjana sobretot el cos	20 mSv, mitjana en 5 anys, no més de 50 mSv en un any	1 mSv (0.1 rem), mitjana en 5 anys
Dosi equivalent anual sobre les extremitats	500 mSv (50 rem)	-
Dosi equivalent anual sobre la pell	500 mSv (50 rem)	50 mSv (5 rem)
Dosi equivalent anual sobre el cristal·lí	150 mSv (15 rem)	15 mSv (1.5 rem)

Dosis mitjanes rebudes (Públic) (ICRP)

Origen	mSv/any
Mèdic: principalment raigs X	0.30
Rajos còsmics a nivell del mar	0.25
Radionúclids en el cos, principalment ^{40}K	0.30
Radó, tori i els seus productes de desintegració	1.20
Radioelements en sòl, roques, etc.	0.40
Altres fonts artificials (productes de consum, viatges en avió, accidents, etc.)	0.05
Total a nivell del mar (públic general)	2.50

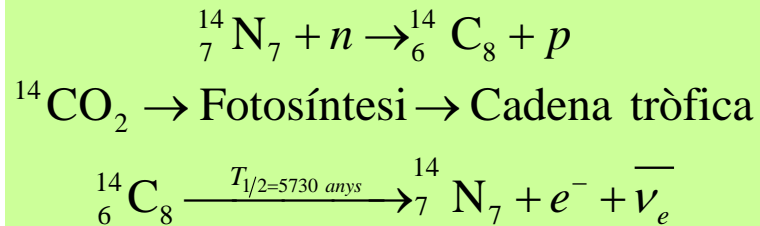
Dosi letal (50% mort en 30 dies): 1-3 Sv

Ex. Hiroshima-Nagasaki > 1 Sv

4. Datació radioactiva

Datació arqueològica: ^{14}C

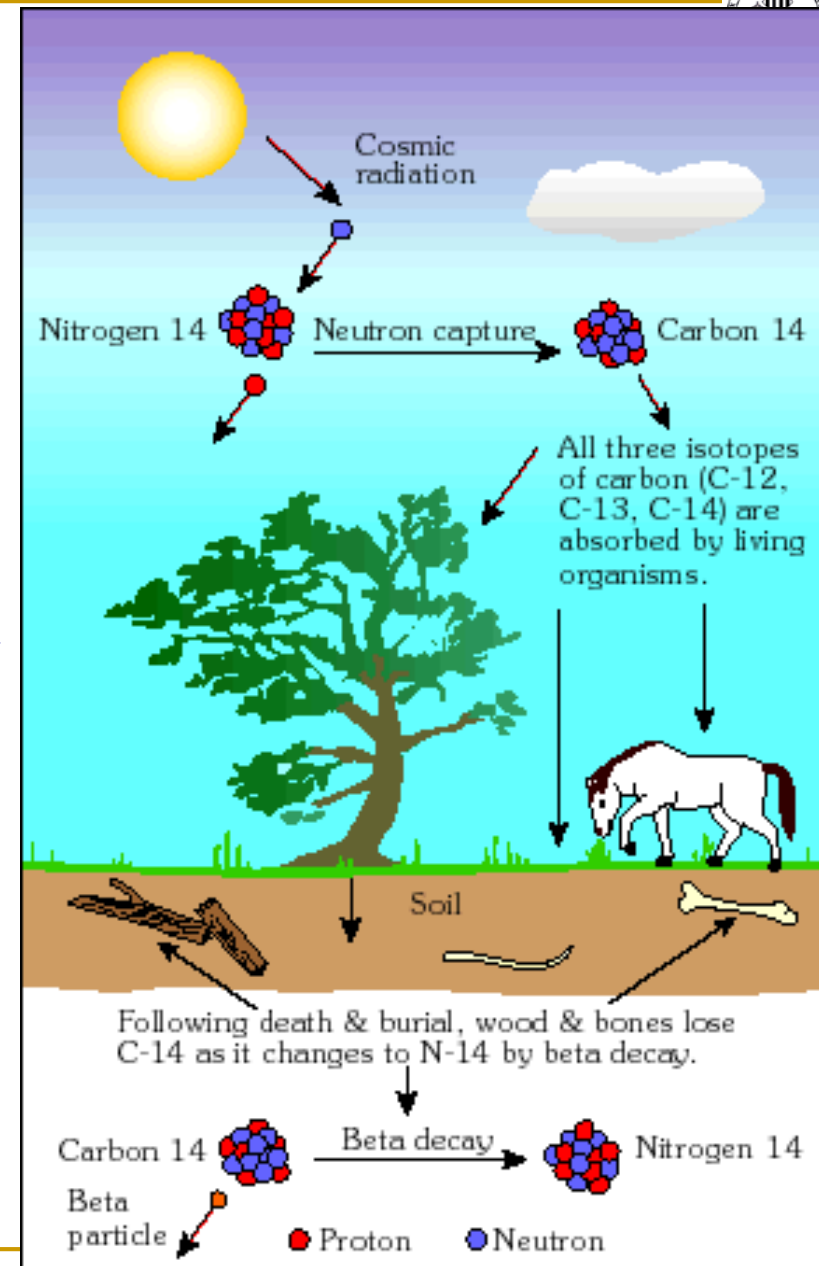
- Procés de producció del ^{14}C i d'absorció:



El ^{14}C és un radi-nucli dels anomenats *cosmo-gènics*: produïts en l'atmosfera o superfície terrestre per bombardeig de rajos còsmics, i transferits a la biosfera per la pluja, que apareix en concentracions minúscules. Altres són el ^{10}Be , ^{26}Al , ^{36}Cl , ^{129}I .

- Carboni natural: 1 àtom de ^{14}C per cada 10^{12} àtoms de ^{12}C : Concentració pràcticament constant salvo períodes especials com després dels assajos nuclears a l'atmosfera.

Isòtop	Abundància (% en pes)
^{12}C	98.89
^{13}C	1.11
^{14}C	10^{-10}



- **Principi:** Les reaccions químiques i biològiques als ser vius no distingeixen els isòtops i estos són absorbits a la proporció en que es troben a la Natura.
- En t_0 es produeix la mort de l'organisme que tindrà:
 $N(t_0)$ àtoms de ^{14}C i $N_C(t_0)$ àtoms de ^{12}C .
- Transcorregut un temps t quedaran $N(t)$ àtoms de ^{14}C :

$$N(t) = N(t_0)e^{-\lambda(t-t_0)} \Rightarrow$$

$$t - t_0 = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{N(t_0)}{N(t)} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \ln \frac{A(t_0)}{A(t)}$$

Per a datar hem de:

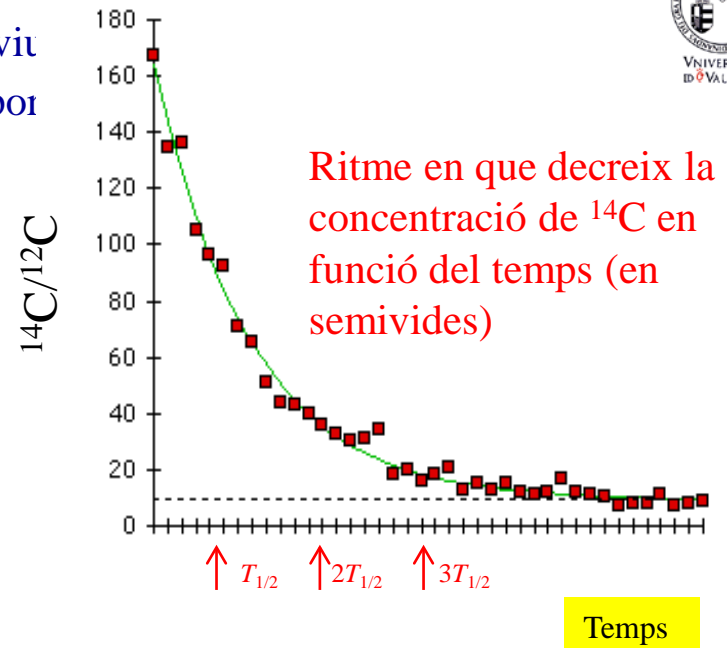
- **Mesurar** l'activitat específica (per gram) del carboni natural en l'instant actual, $A'(t)$.
- **Conèixer** la dita activitat (per gram) en l'instant de la mort de l'organisme, $A'(t_0)$.

$$A(t_0) = \lambda N(t_0) = \lambda 10^{-12} N_C(t_0) = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} 10^{-12} \frac{m_C N_{\text{Avo}}}{M_C} \Rightarrow A'(t_0) = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} 10^{-12} \frac{N_{\text{Avo}}}{M_C} \approx 0.19 \text{ Bq}$$

Proporció de ^{14}C

$m_C = 1 \text{ g}$, $M_C \sim 12 \text{ g}$

Activitat inicial nominal d'un gram



- Es requereix una neteja exhaustiva de les mostres per a aïllar el carboni natural.
- Per a mostres molt xicotetes (molt baixa activitat del ^{14}C i alta puresa de carboni) s'utilitza l'**espectrometria de masses amb acceleradors** (mètode molt més precís doncs permet determinar directament la proporció entre el ^{14}C i el ^{12}C).

■ Què es pot datar amb el ^{14}C ?

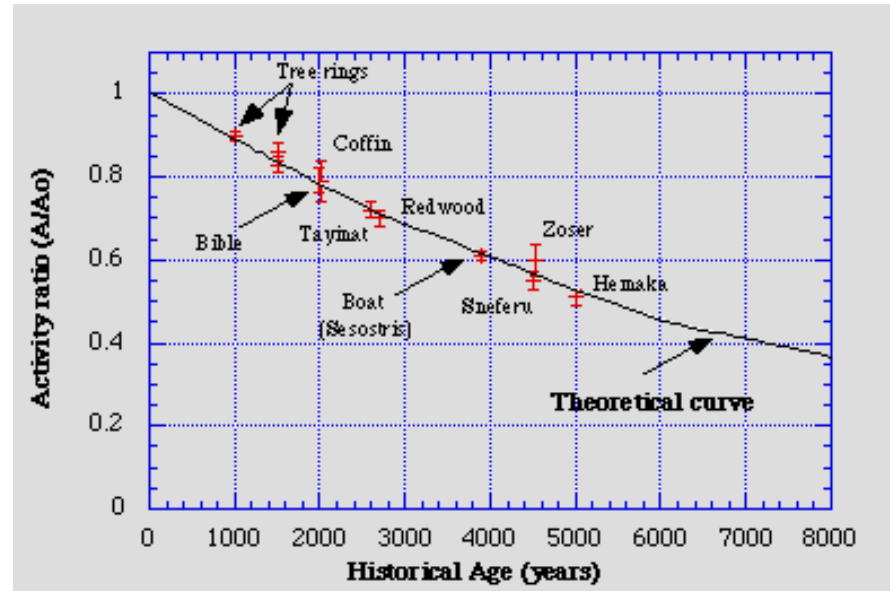
- ❑ Fustes i llavors.
- ❑ Cuiro, material tèxtil.
- ❑ Copròlits, corfes d'ou.
- ❑ Fangs de llacs i sediments. Sòls.
- ❑ Cabells, residus sanguinis.
- ❑ Pol·len.
- ❑ Ceràmica.
- ❑ Pintures rupestres.
- ❑ Ferro i meteorits ...
- ❑

■ Rang d'aplicació del mètode:

- ❑ Des de -50 anys fins a -60.000 anys.

■ Problemes actuals:

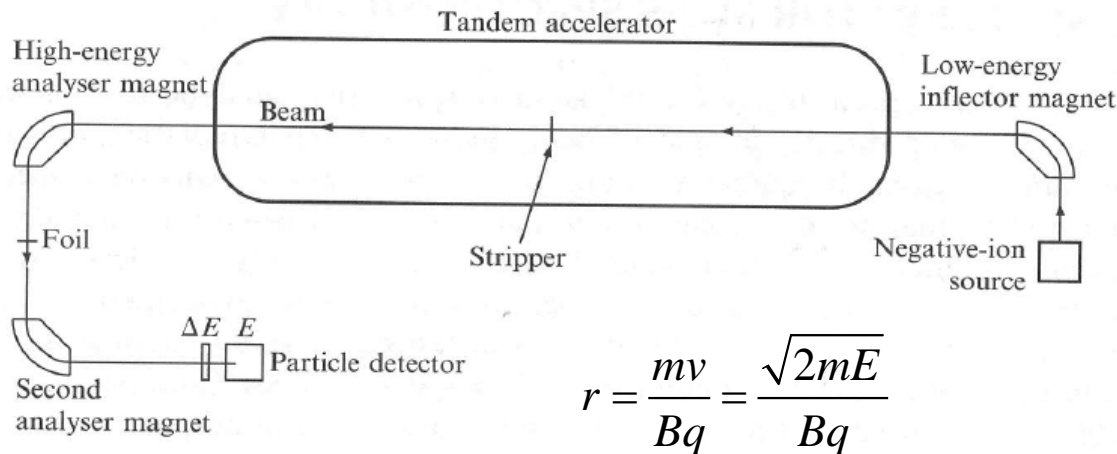
- ❑ Durant els últims 100 anys s'ha variat la concentració de ^{12}C en **cremar combustibles** fòssils.
- ❑ Les **proves nuclears** en l'atmosfera de les dècades 1950 i 1960 han incrementat la concentració de ^{14}C .



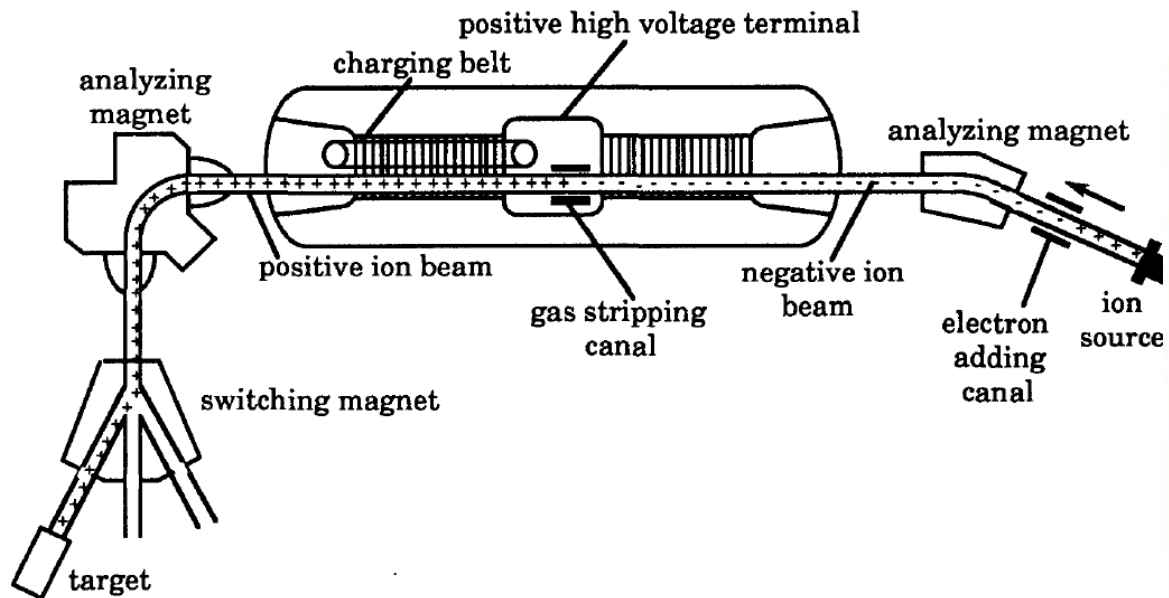
*Corba de calibrat per a la datació per ^{14}C
W.F. Libby, Nobel lecture, 1960*

Espectrometria de masses amb acceleradors (AMS)

- Es tracta d'una tècnica analítica ultrasensible per a **comptar àtoms directament** en compte de determinar activitats (siguen naturals o induïdes).
- Desenrotllada en 1977 per al comptatge de radio-nuclis cosmo-gènics, principalment ^{14}C
 ⇒ Per a mostres xicotetes i/o molt antigues la mesura de l'activitat no és factible.
- Basada en l'espectrometria de masses convencional (a veure), però se li afegeixen etapes addicionals per a reduir ambigüitats de massa (nuclis diferents de masses semblants) i reduir el soroll de fons a nivells negligibles



- ⇒ La mostra es ionitza negativament. Alguns isòbars de soroll (per exemple ^{14}N en una mesura de ^{14}C) s'eliminen perquè no formen ions estables.
- ⇒ El feix de ions passa per un deflector magnètic.
- ⇒ Els isòbars moleculars ionitzats s'acceleren i es passen a través d'un *stripper* on perden diversos electrons (si > 3 electrons qualsevol molècula és inestable i es trenca en fragments).
- ⇒ Els ions positius són accelerats i deflectats una o dos vegades per a eliminar fragments i isòbars de massa semblant.
- ⇒ Al final, els ions s'analitzen en un detector on es realitza la identificació a partir de la mesura de E i dE/dx .

*Tandem Brookhaven (1970)*

Tàndem Van de Graaff

Constituït per dos columnes d'acceleració però amb un únic elèctrode.

La font de ions reposa a potencial de terra.

Datació geològica

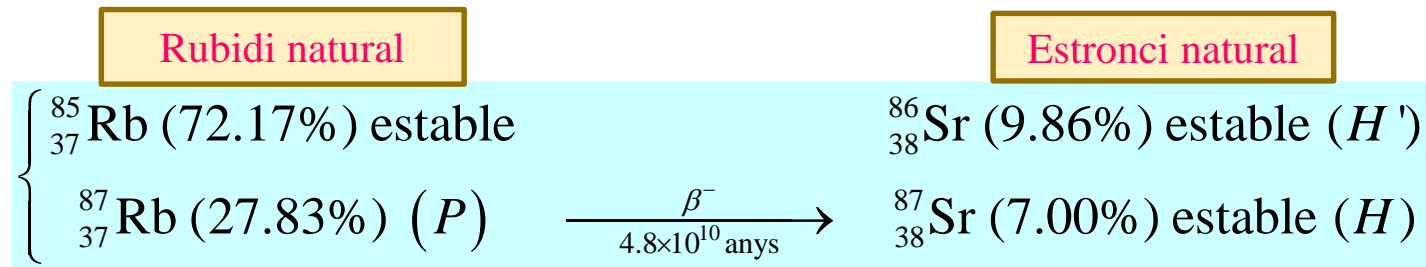
- Per a temps geològics sempre ha de mesurar-se N_0 és a dir, la concentració dels elements, i no l'activitat.
- Els elements per a mesurar temps geològics més habitualment utilitzats han de tindre períodes molt llargs i són:

Isòtops	$T_{1/2}$ (anys)
$^{40}\text{K} \rightarrow ^{40}\text{Ar} (\beta^+)/ ^{40}\text{Ca} (\beta^-)$	1.28×10^9
$^{87}\text{Rb} \rightarrow ^{87}\text{Sr} (\beta^-)$	4.8×10^{10}
$^{235}\text{U} \rightarrow ^{207}\text{Pb} (7\alpha + 4\beta)$	7.04×10^8
$^{238}\text{U} \rightarrow ^{206}\text{Pb} (8\alpha + 6\beta)$	4.5×10^9
$^{232}\text{Th} \rightarrow ^{208}\text{Pb} (6\alpha + 4\beta)$	1.41×10^{10}



■ Datació $^{87}\text{Rb} \rightarrow ^{87}\text{Sr} (\beta^-)$

Siguen $P(t)$, $H(t)$ i $H'(t)$ les concentracions actuals (en t) dels isòtops ^{87}Rb , ^{87}Sr i ^{86}Sr , respectivament.



- Com que el $^{87}\text{Rb} \rightarrow ^{87}\text{Sr}$ la suma de les seues proporcions romandrà constant (Eq.1)
- A més com el ^{86}Sr és estable, la seua proporció H' serà també constant (Eq. 3). De les equacions 1 i 3 escrivim l'equació 2.

Eq. 1

$$P(t_0) + H(t_0) = P(t) + H(t)$$

Eq. 2

$$\frac{P(t_0) + H(t_0)}{H'(t_0)} = \frac{P(t) + H(t)}{H'(t)}$$

Eq. 3

$$H' \text{ es estable} \rightarrow H'(t_0) = H'(t)$$

$$\Rightarrow \frac{H(t)}{H'(t)} = \frac{P(t)}{H'(t)} \left[e^{\lambda(t-t_0)} - 1 \right] + \frac{H(t_0)}{H'(t_0)}$$

...on hem usat la llei de la desintegració

radioactiva per a l'estronci: $P(t_0) = P(t) e^{\lambda(t-t_0)}$

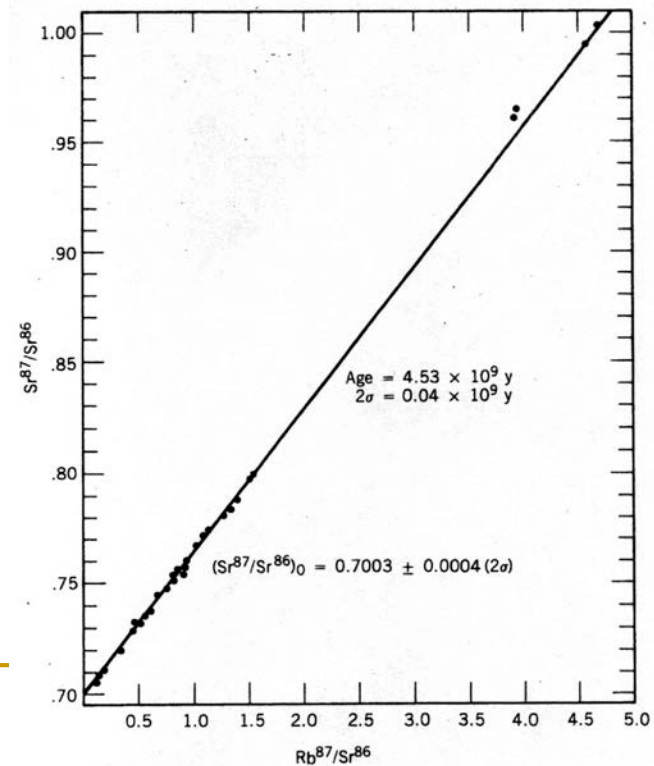
Es pot mesurar la proporció actual (en t) dels isòtops del Sr i del Rb (dades) i determinar les incògnites: temps transcorregut i la proporció inicial del Rb, mitjançant l'ajust lineal:

Dades: $\frac{H(t)}{H'(t)}, \frac{P(t)}{H'(t)}$

Incògnites: $(t - t_0), \frac{H(t_0)}{H'(t_0)}$

Concentracions
actuals relatives
de ^{87}Sr i ^{87}Rb
respecte del ^{86}Sr

$$y = mx + n \begin{cases} m = \left[e^{\lambda(t-t_0)} - 1 \right] & y = \frac{H(t)}{H'(t)} \\ n = \frac{H(t_0)}{H'(t_0)} & x = \frac{P(t)}{H'(t)} \end{cases}$$



Edat de la
Terra:
 4.5×10^9 anys

Tema 2 EXTRA:

Radiacions, interacció amb matèria i aplicacions

Absorció ressonant i efecte Mössbauer

Verificació experimental precisa de la Teoria General de la Relativitat (TGR)

Anàlisi per activació neutrònica (NAA)

(Radio)Traçadors

Dispositius de control (“Gauges”)

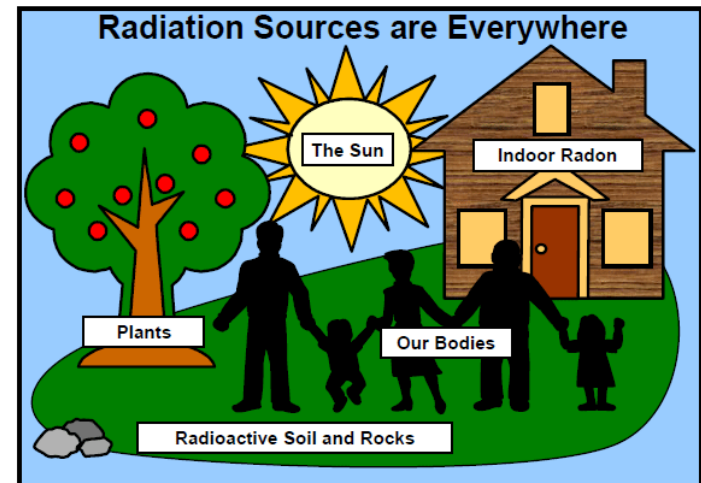
Esterilització i conservació d'aliments

Imatge de rajos X i cambres gamma

Tomografia computeritzada (CT)

Tomografia d'emissió de positrons (PET)

Radioteràpia



<http://radiationhormesis.com/charts/>

Absorció ressonant i efecte Mössbauer

- Mössbauer, 1957 (Premi Nobel 1961)
- Quan un nucli en repòs en un estat d'energia E_i (estat fonamental) absorbeix un fotó passa a un estat excitat d'energia E_f :

**Conservació de
l'energia i del moment**

$$\left. \begin{aligned} E_i + E_\gamma &= E_f + T_R \\ p_\gamma &\approx p_f \Rightarrow T_R \approx \frac{p_f^2 c^2}{2Mc^2} = \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta E = E_f - E_i = E_\gamma - T_R = E_\gamma - \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2}$$

Energia de retrocés del nucli

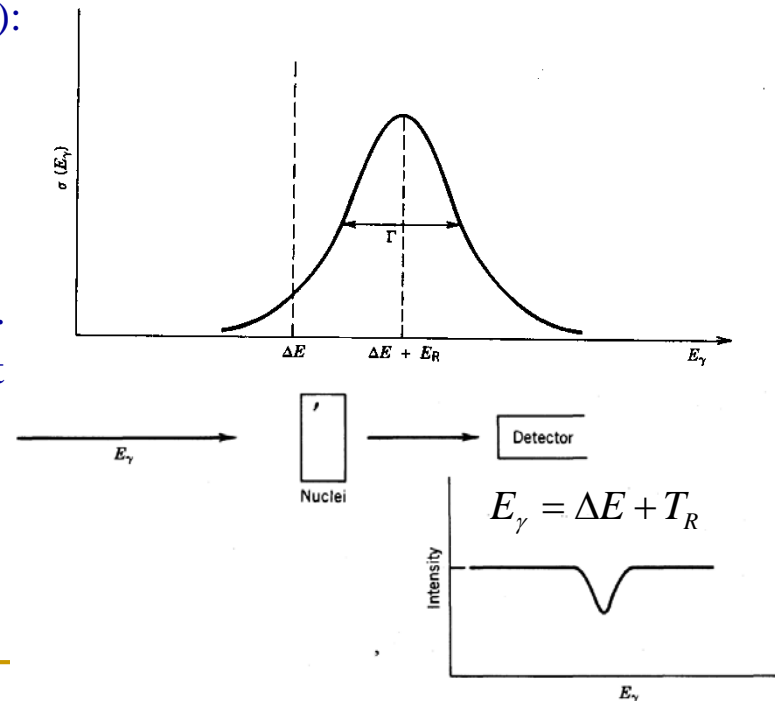
- Com l'estat excitat té una vida mitjana τ , tindrà una amplària intrínseca $\Gamma = \hbar/\tau$ per la qual cosa la secció eficaç d'absorció del fotó tindrà lloc segons una distribució de Breit-Wigner (conseqüència de la llei exponencial de desintegració):

$$\sigma(E_\gamma) = \sigma_0 \frac{(\Gamma/2)^2}{[E_\gamma - (\Delta E + T_R)]^2 + (\Gamma/2)^2}$$

- L'absorció tindrà lloc per a un conjunt d'energies entorn al valor ressonant (i no a una sola energia).
- La ressonància s'observa al disminuir la intensitat transmesa. Típicament

$$\tau \sim [1\text{ps}, 1\text{ns}] \Rightarrow \Gamma \sim [10^{-6}, 10^{-3}] \text{ eV}$$

\Rightarrow **Molt xicoteta!**



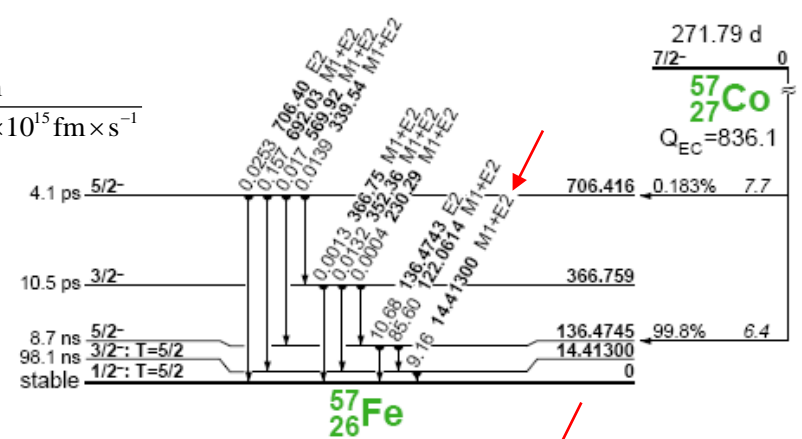
■ Exemple 1: ^{57}Fe

$$\Gamma = \frac{\hbar c}{\tau c} \approx \frac{197 \text{ MeV} \times \text{fm}}{98.1 \times 10^{-9} \text{ s} \times \ln 2 \times 3 \times 10^8 \times 10^{15} \text{ fm} \times \text{s}^{-1}}$$

$$E_\gamma = 14.4 \text{ keV}, T_{1/2} = 98.1 \text{ ns}, \Gamma = 4.7 \times 10^{-9} \text{ eV}$$

■ Exemple 2: ^{191}Ir

$$E_\gamma = 129 \text{ keV}, T_{1/2} = 123 \text{ ps}, \Gamma = 3.7 \times 10^{-6} \text{ eV}$$



- L'absorció ressonant pot tindre lloc si la radiació absorbida correspon exactament a la mateixa transició en què és emesa (els nuclis emissor i absorbent han de ser isotòpics).
- No obstant això, tant el nucli emissor com l'absorbent retrocedeixen en emetre i absorbir la radiació:

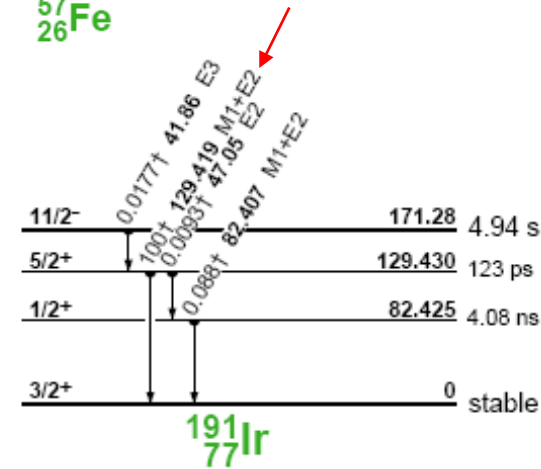
$$\left. \begin{aligned} E_i = E_f + E_\gamma + T_R \Rightarrow \Delta E_e = E_\gamma + T_R = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2} \\ \Delta E_a = E_\gamma - T_R = E_\gamma - \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta E_e - \Delta E_a = 2T_R = \frac{E_\gamma^2}{Mc^2}$$

⇒ El retrocés implica que aparega una diferència d'energia per al fotó entre emissió i absorció:

$$2T_R = \frac{E_\gamma^2}{Mc^2}$$

- L'energia de retrocés és en general molt major que l'amplària intrínseca dels nivells nuclears
- Exemples:

$$2T_R(^{57}\text{Fe}) \approx 3.9 \times 10^{-3} \text{ eV} \quad 2T_R(^{191}\text{Ir}) \approx 0.09 \text{ eV}$$



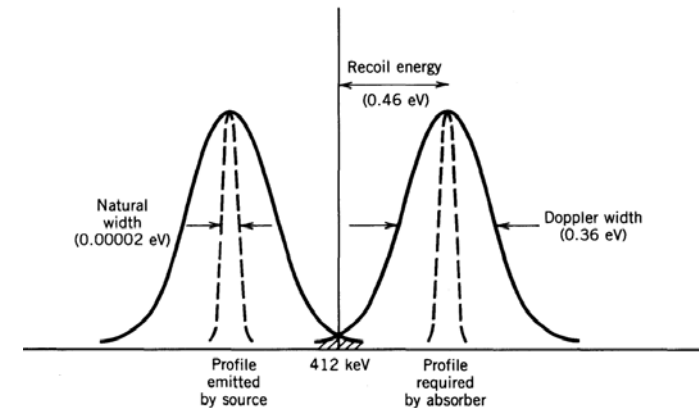
- Hi ha diverses tècniques per a compensar la diferència $2T_R$ entre les energies del fotó emés i l'absorbit:

- Augmentar la temperatura T , amb la qual cosa augmenta l'eixamplament Doppler i el solapament dels perfils \Rightarrow **ressonància fluorescent**.

- Però la resolució disminueix a causa del creixement de l'amplària dels estats.

Efecte Doppler relativista

$$f' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} f \rightarrow f' \approx (1+\beta) f \rightarrow E'_\gamma = (1+\beta) E_\gamma$$

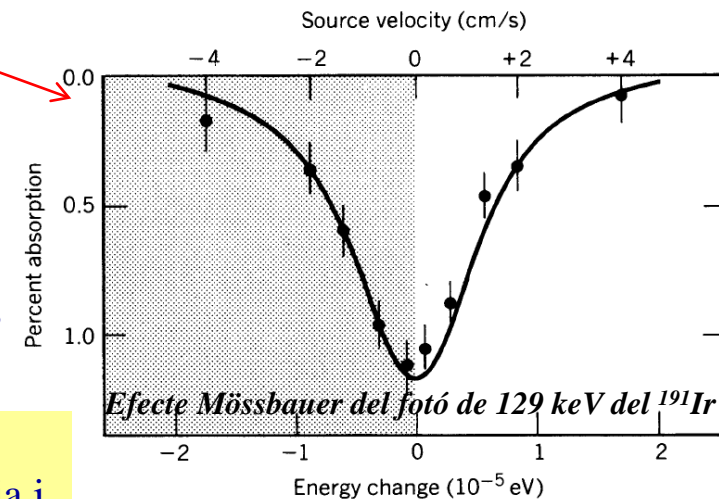


- Moure l'emissor cap a l'absorbent a alta velocitat a fi que el desplaçament (increment) Doppler de l'energia del fotó compense la diferència $2T_R$:

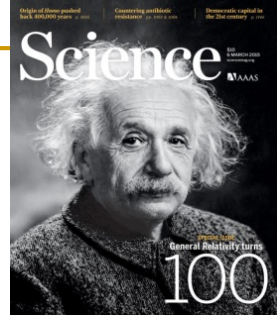
$$\Delta E_\gamma = 2T_R \Rightarrow E_\gamma \beta = 2T_R \Rightarrow v = c \frac{2T_R}{E_\gamma} = c \frac{E_\gamma}{Mc^2}$$

- Exemples: $v(^{57}\text{Fe}) \approx 2.7 \times 10^{-7} c \approx 81 \text{ m/s}$ $v(^{191}\text{Ir}) \approx 7.0 \times 10^{-7} c \approx 209 \text{ m/s}$
- Estes velocitats tan elevades són un problema, però es poden aconseguir per mitjà de rotors (o centrifugadores) amb velocitats de gir $\sim 10^4$ - 10^5 rpm.
- Usant fonts amb **captura electrònica**: l'emissor γ es desplaça al produir-se per CE del nucli pare.
- Absorció ressonant sense retrocés: **efecte Mössbauer**.

- **L'efecte Mössbauer** és la tècnica més potent i precisa per a resoldre el problema del retrocés.
- La idea essencial consisteix en situar els nuclis emissor i absorbent en una xarxa cristal·lina.
 - La massa **efectiva** M del nucli correspon ara a tot el vidre com un sol sistema.
 - Com els nuclis en la xarxa estan ocupant el seu nivell vibracional fonamental, hi ha un eixamplament Doppler tèrmic molt xicotet.
 - Refredant la mostra pot aconseguir-se una reducció addicional de l'amplària Doppler.
- Per tant, els perfils d'emissió i absorció estan molt pròxims i són estrets, caracteritzats essencialment per l'amplària intrínseca.
 - Velocitats necessàries per a agranar la ressonància: per baix de ~ 10 mm/s
 - Enorme precisió $R = \Gamma/E_\gamma$: $R(^{57}\text{Fe}) = 3.3 \times 10^{-13}$ $R(^{191}\text{Ir}) = 2.9 \times 10^{-11}$
- Exemple de corba d'absorció fotó de 129 keV del ^{191}Ir
- Esta precisió permet mesurar:
 - Desplaçaments químics.
 - Desdoblements quadrupolar elèctrics en gradients externs de camp elèctric.
 - Desdoblements dipolars magnètics nuclears en camps magnètics externs.



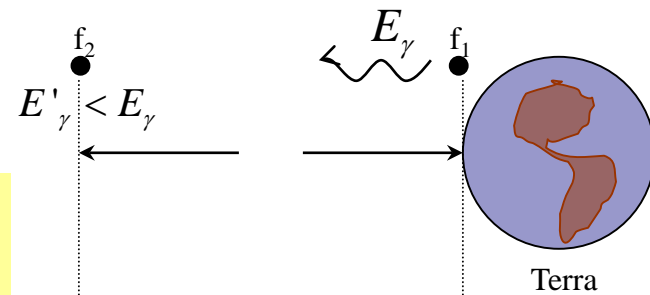
Innumerables aplicacions: Química analítica; Metal·lúrgia; Física i química de l'estat sòlid; Ciència de materials; Biologia i bioquímica; Geologia, geoquímica, mineralogia, estudi de sòls, ...; Exploració planetària; Verificació de precisió de la Teoria General de la Relativitat;...



Verificació experimental precisa de la TGR

- La TGR prediu una dilatació del temps en presència d'un camp gravitatori + un desplaçament al roig de la llum que s'allunya del camp.
 - Suposem un nucli emissor (f_1) que emet sense retrocés un fotó de freqüència f .
 - En eixe instant, el nucli absorbent (f_2) està situat a una distància h .
 - El fotó tardaria en arribar al nucli absorbent si estiguera en repòs un temps $t = h/c$.
 - Però en eixe temps el nucli absorbent ha adquirit una velocitat $v = at = ah/c$.
 - Pel **principi d'equivalència** $v = gh/c$.

Principi d'equivalència (entre massa inercial i gravitatòria):
Els efectes d'un camp gravitacional local uniforme = els d'un sistema de referència uniformement accelerat.



- La freqüència del fotó original que observarà el nucli absorbent serà (Doppler):

$$f' \approx f(1 + \beta) = f(1 + gh/c^2) \Rightarrow \Delta E_\gamma = E'_\gamma - E_\gamma = E_\gamma gh/c^2$$

- El desplaçament en energia $\Delta E_\gamma / E_\gamma = gh/c^2$ del fotó serà:
 - Cap el blau, si $g > 0$ (el fotó se desplaça cap el camp).
 - Cap el roig, si $g < 0$ (el fotó se desplaça en sentit contrari al camp).
- Altra manera d'entendre-ho: Per conservació de l'energia, el fotó al allunyar-se radialment del camp gravitatori incrementa la seua energia potencial en mgh ($m = E_\gamma/c^2$ es la massa gravitacional, P.E.), disminuint en la mateixa quantitat la seua "energia de moviment":

$$\Delta E_\gamma = mgh = E_\gamma gh/c^2$$

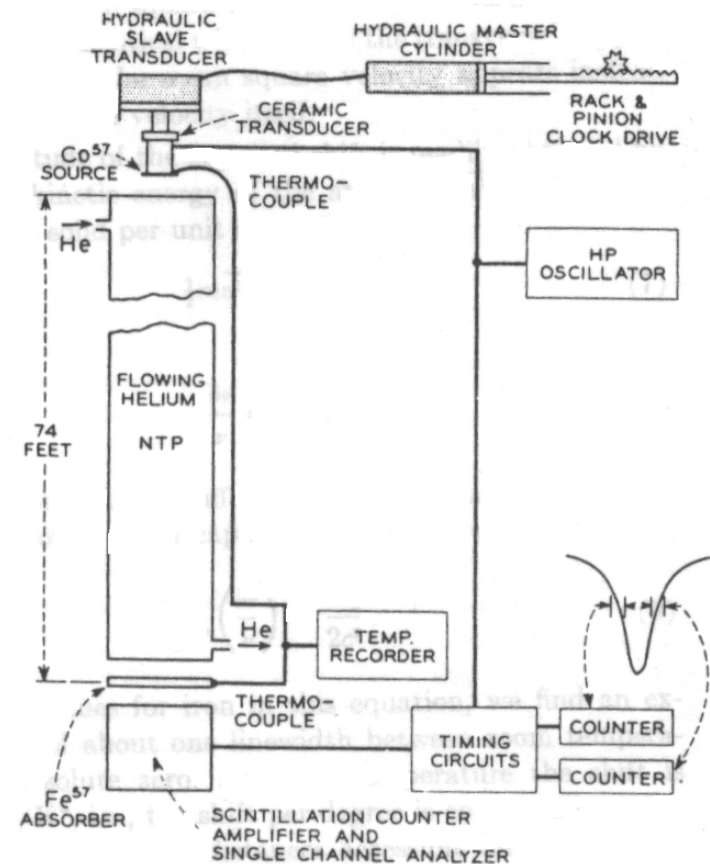
Experiment de Pound i Rebka

- 1960, torre de 22.6 m del laboratori Jefferson de Harvard
- En el camp gravitatori terrestre:

$$\Delta E_\gamma / E_\gamma \approx 1.1 \times 10^{-16} \text{ m}^{-1} \Rightarrow \Delta E_\gamma / E_\gamma \approx 2.5 \times 10^{-15} \text{ (per 22.6 m)}$$
- Emissor, electro-depositat sobre una superfície de ferro i calfat (abans de col·locar-lo) a 1220 K per a obtenir una perfecta difusió sobre el substrat.
 - ^{57}Co (CE a ^{57}Fe , $T_{1/2} = 272 \text{ d}$), amb $A = 0.4 \text{ Ci}$.
S'utilitza el fotó de 14.4 keV del ^{57}Fe .
- Absorbent:
 - Làmina de Fe (14 mm) enriquida de ^{57}Fe al 32%.
- Detector de fotons: NaI(Tl), tub PM, analitzador monocanal.
- Tub amb flux de gas heli per a reduir l'absorció de radiació per l'aire.
- Monitorització de temperatura d'emissor i absorbent per controlar corriments Doppler deguts a les vibracions de la xarxa (tèrmiques).



GRAVITATIONAL RED SHIFT



- La font està muntada sobre un altaveu modulad (amb vibració vertical) entre 10-50 Hz per a produir eixamplament Doppler.
- L'escombratge de freqüències d'absorció Mössbauer es realitza muntant l'altaveu que conté la font sobre un braç hidràulic que aconsegueix una velocitat màxima major que la velocitat Doppler necessària per a compensar el desplaçament gravitatori:

$$\Delta E_\gamma / E_\gamma \approx 2.5 \times 10^{-15} \Rightarrow v = gh / c = 74 \mu\text{m} / \text{s}$$

- Font i absorbent s'intercanvien per a doblar l'efecte.
- La diferència esperada de desplaçaments per a fotons descendents i ascendents és:

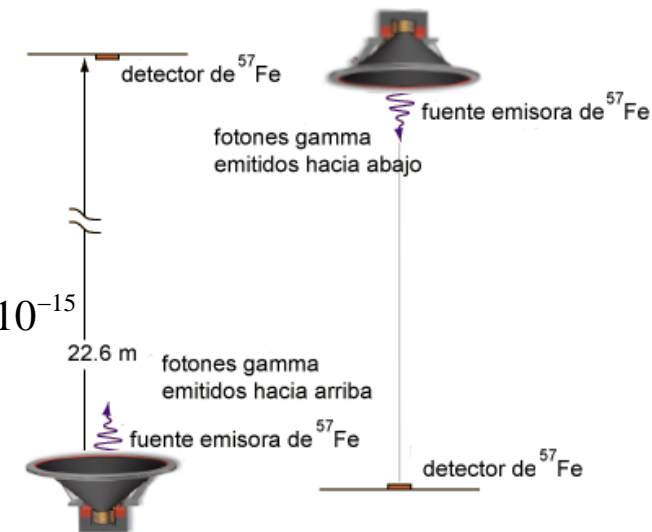
$$(\delta E_\gamma / E_\gamma) = (\Delta E_\gamma / E_\gamma)_{\text{cap d'alt}} - (\Delta E_\gamma / E_\gamma)_{\text{cap baix}} = 2E_\gamma gh / c^2 = 4.905 \times 10^{-15}$$

- **Resultat (1% de precisió!):**

$$(\delta E_\gamma / E_\gamma)_{\text{exp}} = (4.902 \pm 0.041) \times 10^{-15}$$

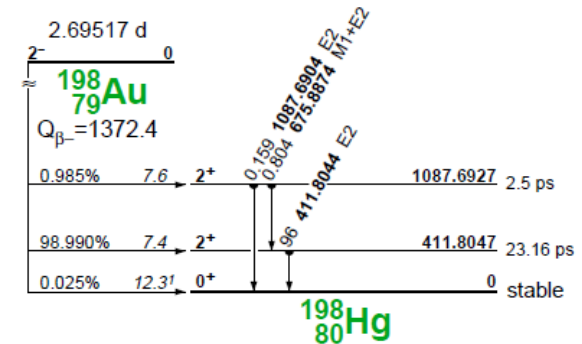
- Primera comprovació de precisió de la Teoria General de la Relativitat.
 - Va iniciar tot un programa de verificació i busques de desviacions.
 - Katila y Riski (1981, ^{67}Zn), Experiments de centrifugació amb ^{57}Fe (font en l'eix del rotor, i absorbent en un braç, permeten substituir l'acceleració gravitacional per l'acceleració cinemàtica, comprovació directa del principi d'equivalència), Missions de la NASA Gravity Probe A i B.

Experimento de Pound y Rebka



Anàlisi per activació neutrònica (NAA)

- Principi: molts nuclis estables tenen elevades seccions eficaces d'absorció radiativa de neutrons tèrmics ($E_n \sim 0.025$ eV), (n, γ) amb emissió d'un γ .
- Exemple: $^{197}\text{Au} + n \rightarrow ^{198}\text{Au} + \gamma$.
 - El fotó de 412 keV i la vida mitjana de 2.7 d inequívocament caracteritzen el ^{198}Au , i per tant el ^{197}Au inicial.
- La tècnica d'activació neutrònica (NAA) consisteix a irradiar amb n i a continuació mesurar l'activitat produïda:



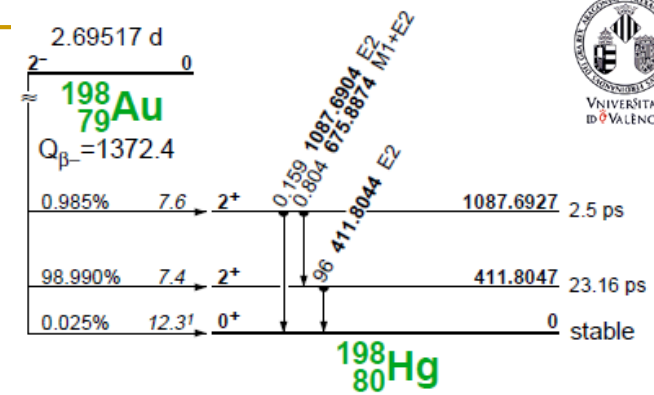
$$A_2 \approx R(1 - e^{-\lambda_2 t}) \quad R = N_1 \sigma \varphi = A_1 \begin{cases} \varphi = \text{flux de partícules incidents} \\ \sigma = \text{secció eficaç de la reacció} \end{cases}$$

- La mesura de les energies dels fotons i els temps permet establir els constituents de la mostra.
- En comparació amb mètodes químics:
 - És no destructiva: la mostra resulta essencialment no afectada.
 - Molta major sensibilitat, i per tant capaç d'identificar molt xicotetes quantitats (traces).
- Exemples: investigació criminal, anàlisi de pigments en pintures, arqueologia, detecció de contraban (usant n ràpids).
- Poden també utilitzar-se partícules carregades \Rightarrow excitació atòmica de capes internes (K o L) \Rightarrow la des-excitació produeix rajos X característics \Rightarrow **fluorescència de rajos X**. Funciona per a mostres primes, per a grosses cal usar NAA.

■ Exemple: $^{197}\text{Au} + n \rightarrow ^{198}\text{Au} + \gamma$

$$A_2 \approx R(1 - e^{-\lambda_2 t}) \quad \lambda_2 = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{2.7 \text{ d}} = 2.971 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

$$R = N_1 \sigma \phi = 0.30 \text{ s}^{-1} \quad \begin{cases} \phi = 10^{13} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \\ \sigma = 98.65 \text{ b} \\ N_1 = \frac{m N_A}{A} = \frac{10^{-9} \text{ g} \times 6.023 \times 10^{23}}{197} = 3.05 \times 10^{12} \text{ àtoms de } ^{197}\text{Au} \end{cases}$$



- El nombre de nuclis de ^{198}Au després d'una irradiació amb n tèrmics durant t_1 és:

$$N_2^{(1)} = \frac{A_2}{\lambda_2} \approx \frac{R}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 t_1})$$

- Després d'un temps t_2 (per a portar la mostra al sistema de detecció) ens queden:

$$N_2^{(2)} = N_2^{(1)} e^{-\lambda_2 t_2}$$

- Després mesurem les desintegracions durant t_3 . Els nuclis que es desintegren en t_3 són:

$$N_2^{(2)} - N_2^{(3)} = N_2^{(2)} - N_2^{(2)} e^{-\lambda_2 t_3} = N_2^{(2)} (1 - e^{-\lambda_2 t_3})$$

- Les desintegracions γ mesurades seran:

$$N_\gamma = 0.9899 \varepsilon R (1 - e^{-\lambda_2 t_1}) e^{-\lambda_2 t_2} (1 - e^{-\lambda_2 t_3}) / \lambda_2$$

- Si prenem: $e^{-\lambda_2 t_2} \approx 1$, $t_1 = t_3 = T_2$ ($e^{-\lambda_2 t_1} = e^{-\lambda_2 t_3} = e^{-\lambda_2 T} = 0.5$), $\varepsilon = 0.10$

$$N_\gamma = 0.9899 \varepsilon R 0.5 / \lambda_2 = 2510 \text{ comtes en 2.7 dies}$$

(Radio)Traçadors

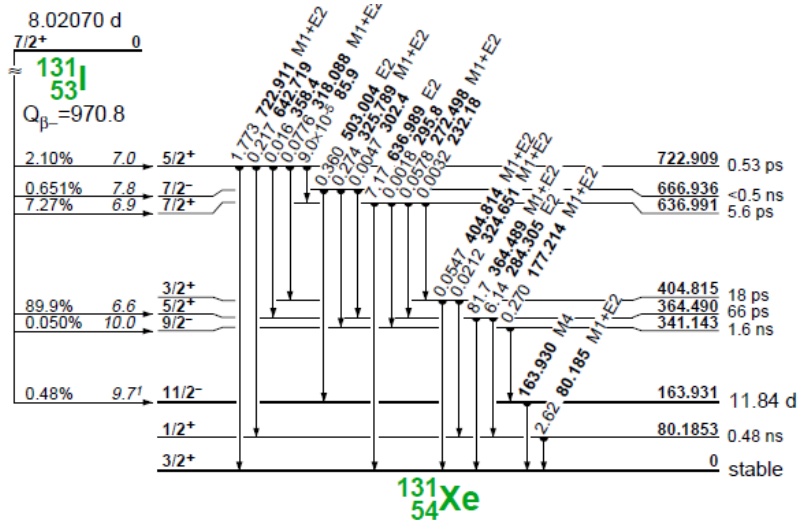
- Principi: radio-nuclis en molt xicotetes quantitats s'afegeixen a substàncies (no radioactives) d'interès.
- Mesures de radiació permeten determinar el camí que segueix la substància en un sistema complex.
- Sovint, el ràdio-traçador és un isòtop inestable del principal element de la substància (químicament idèntics).
- Mínima interferència amb el sistema (al contrari que els mètodes químics).
- Usat en medicina, química, enginyeria, agricultura, metal·lúrgia, geologia, zoologia, criminologia.
- Exemple 1: estudi de la funció metabòlica del tiroide en organismes vius. S'afegeix ^{131}I (radioisòtop clàssic) o ^{123}I (recentment) a un fàrmac ric en iode.
- Exemple 2: determinació de la transferència de vitamines administrades a vaques a la llet, o de pinsos a ous.
- Exemple 3: volum d'un líquid en un sistema complex i tancat. Volum conegut d'activitat coneguda s'introdueix en el sistema i es diluït. Factor de dilució a partir de l'activitat d'una mostra extreta del sistema. Volum total = factor de dilució \times Volum inicial.
- Exemple 4: monitorització de nivells de vapor de Hg en plantes de producció de llums fluorescents. Al Hg se li afegeix una ínfima quantitat de ^{197}Hg , i es monitoritza l'excés de radiació ambiental.
- Exemple 5: protecció mediambiental (control de l'impacte humà en l'entorn) com a residus industrials, control de la dispersió de contaminants en rius, etc.

I natural $\approx 100\%$ ^{127}I

El ^{131}I es produïx en reactors, com un producte de fissió

$T_{1/2}=8$ d

Fotó de 364 keV + emissió β



Hg natural \approx mescla dels isòtops 198, 199, 200, 201, 202, 204

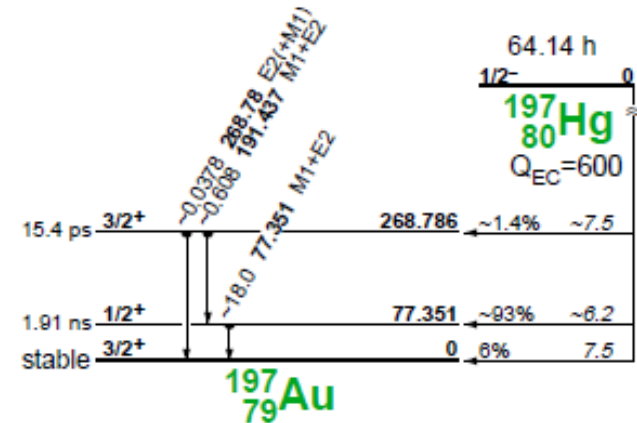
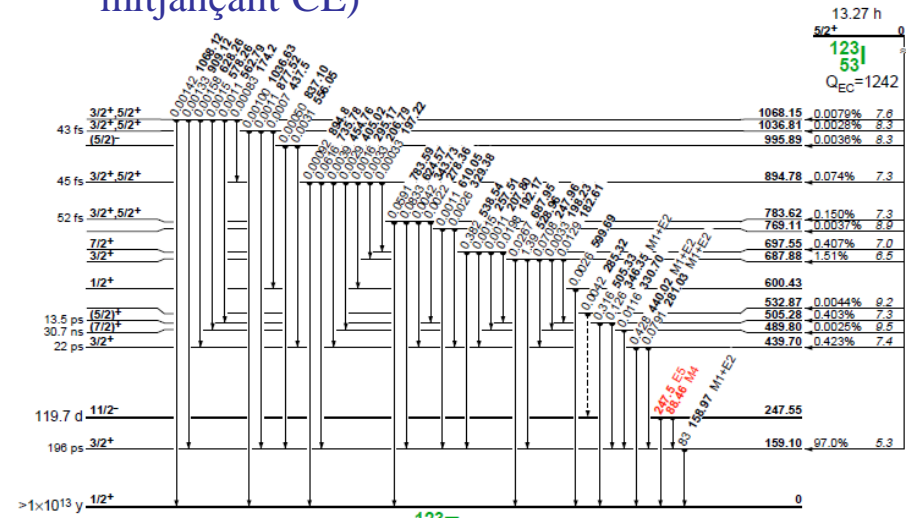
$T_{1/2}=64$ h

Fotó de 77 keV sense emissió β (només CE)

El ^{123}I es produïx en ciclotrons

$T_{1/2}=13$ h

Fotó de 159 keV sense emissió β (només mitjançant CE)

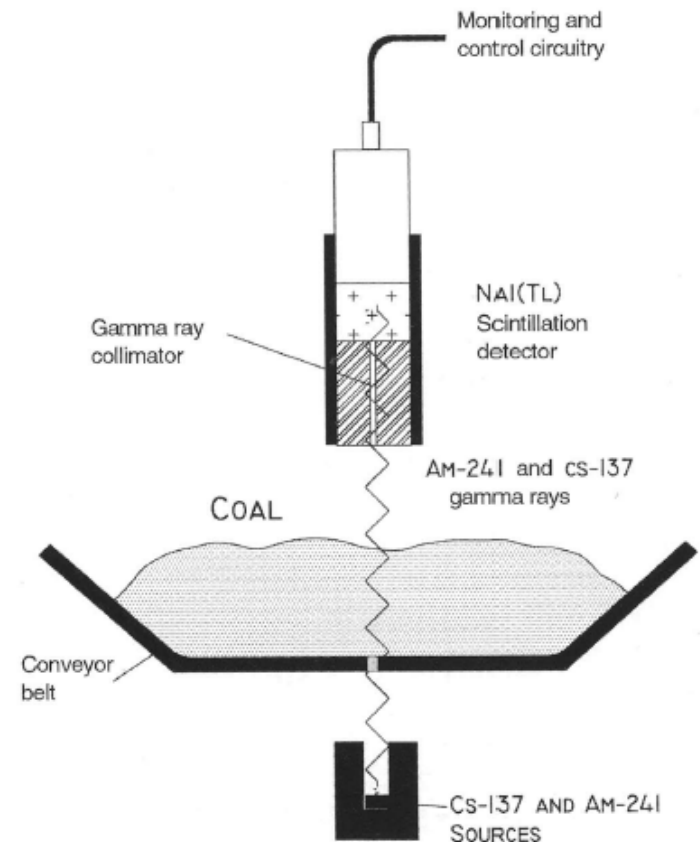
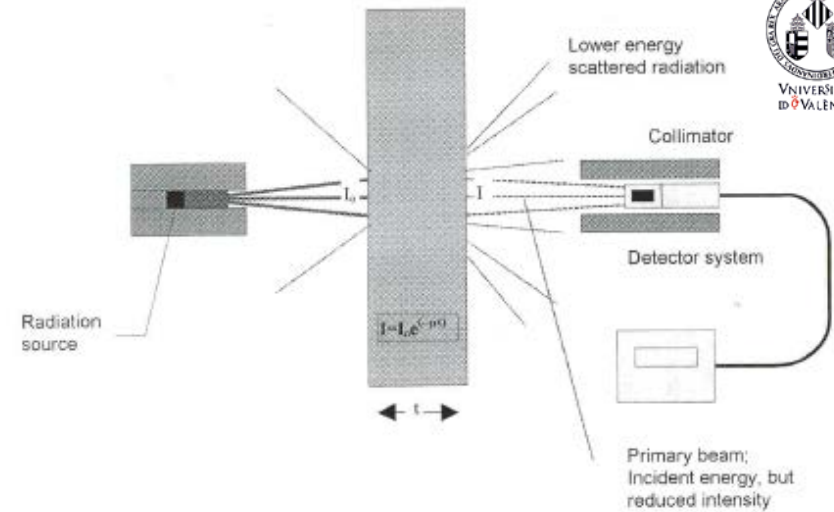


Dispositius de control (“Gauges”)

- Principi: l'atenuació de feixos de partícules β o fotons, o la pèrdua d'energia de partícules α , depèn del tipus i grossària del material:

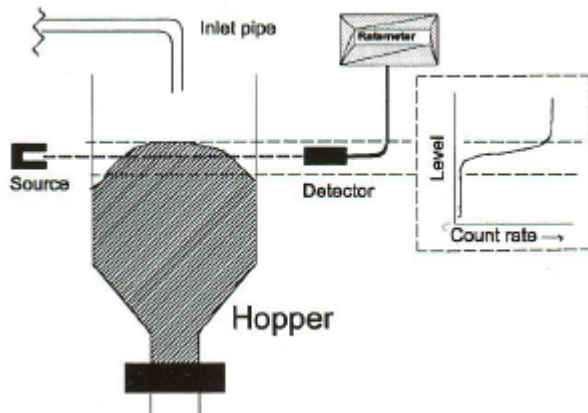
$$I(t) = I_0 e^{-\mu_m \rho t}$$

- Per tant, la grossària (o densitat) d'un material pot mesurar-se a partir de les mesures d'atenuació d'un feix d'intensitat coneguda si es coneix el mecanisme d'interacció i el tipus de material. Alternativament, pot calibrar-se el sistema a partir de l'atenuació de grossàries (i/o materials) coneguts.
- El coeficient d'atenuació de rajos γ varia amb Z i l'energia. Comparant amb càlculs i calibracions estes dependències poden usar-se per a verificar si el contingut és l'esperat.
- Exemple 1: control de la grossària de pel·lícules, paper, etc., o cintes de transport (carbó, etc.)

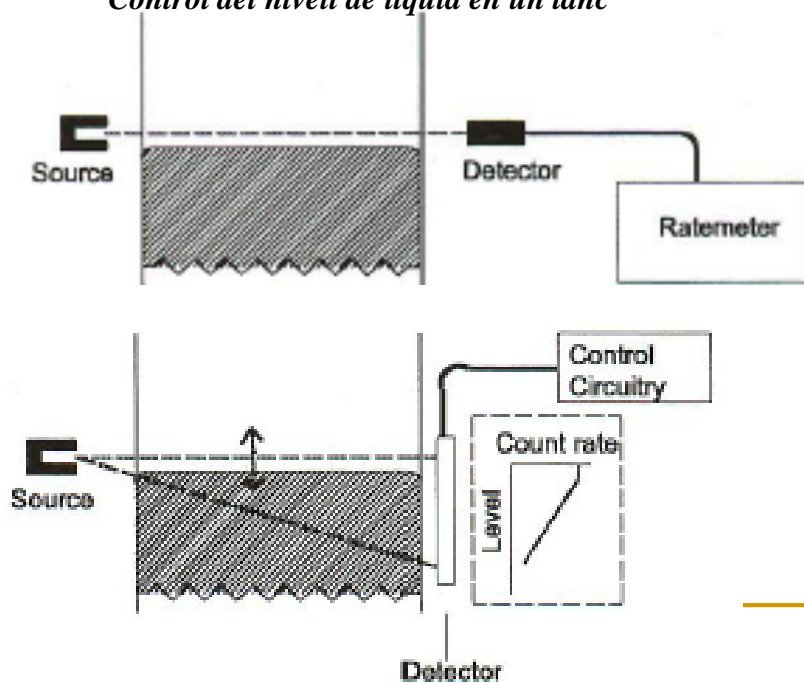


- Exemple 2: nivells de líquids en contenidors tancats. Particularment important en contenidors de substàncies perilloses

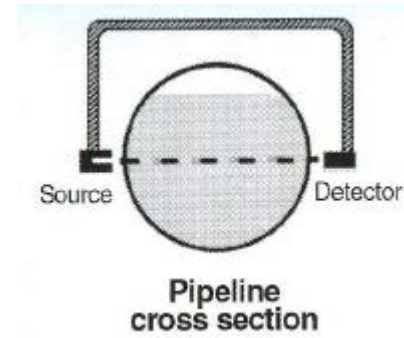
Control del nivell de material en una tolva



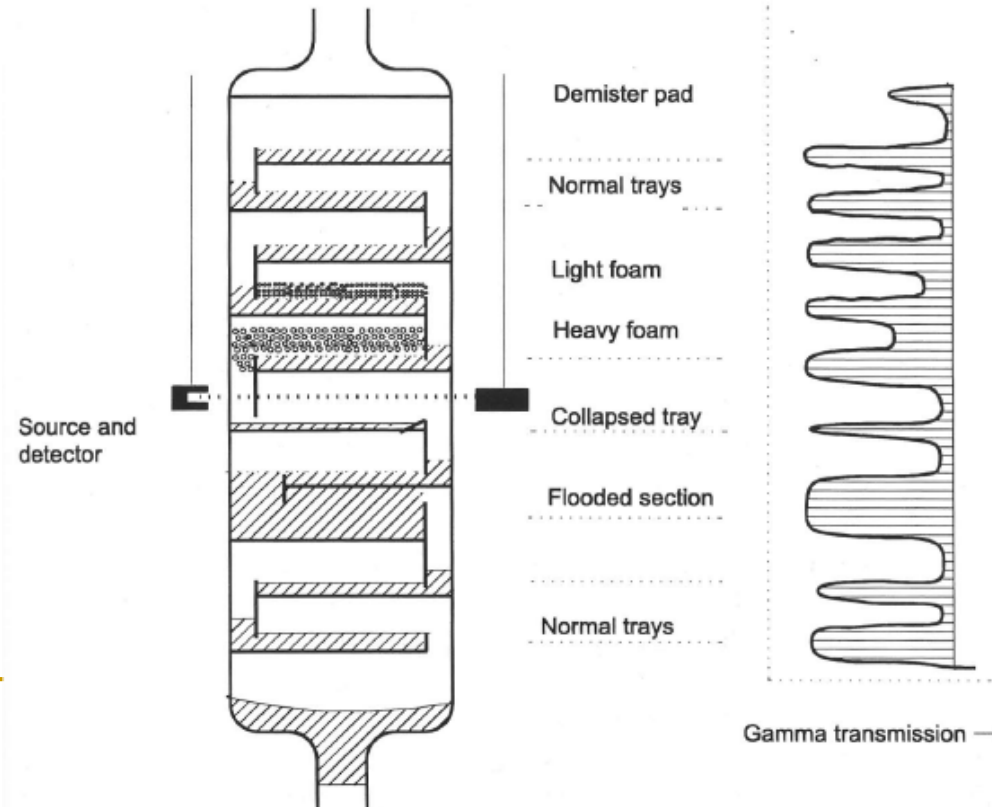
Control del nivell de líquid en un tanc



Control de pipelines



Scan de transmissió γ d'una columna de destil·lació

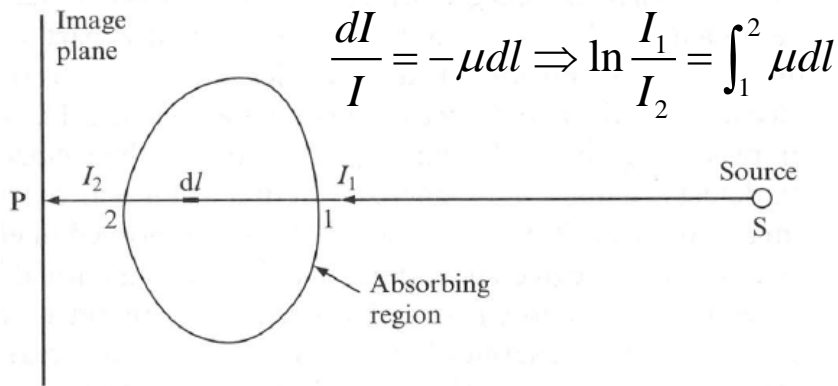


Esterilització i conservació d'aliments

- Esterilització d'una àmplia varietat de productes d'ús simple, particularment metges.
- Els paquets segellats contenint el producte es passen per mitjà d'una cinta transportadora per un feix d'electrons o fotons, a una velocitat regulada al nivell d'esterilització desitjat.
 - Per a baixes energies el material irradiat no s'activa.
 - La temperatura no augmenta més d'uns 10 °C, mentre que l'esterilització convencional requereix al voltant de 15 min a 120 °C.
- La tècnica es basa en la capacitat de la radiació de matar microorganismes patògens, a través del dany produït al seu ADN.
 - Com tenen poc ADN en comparació amb una cèl·lula humana, requereixen major dosi per a desactivar-la.
 - En mitjans aquosos i oxigenats la tècnica és més efectiva.
- La mateixa idea pot usar-se per a reduir les bacteries, micro-organismes, insectes i larves, i inhibir la seua proliferació, en molts tipus d'aliments.
 - Alternativa molt eficaç als mètodes convencionals, com enllandats, ultracongelats, fumats, o l'aplicació de conservants químics i insecticides.
 - No hi ha pèrdua de valor nutricional, i no hi ha risc toxicològic.

Imatgeria de rajos X i cambres gamma

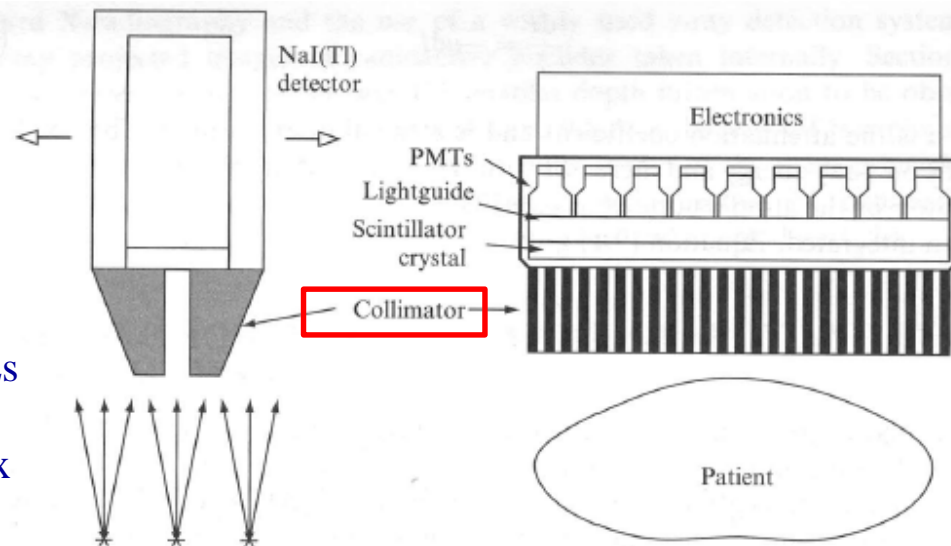
■ Imatgeria amb radiació externa: **radiografia** (amb rajos X ó γ)



- La imatge produïx variacions transversals de la integral del coeficient d'atenuació en dos dimensions (projecció).
- μ varia amb $Z \Rightarrow$ més gran per a ossos i òrgans contenint calci que per a teixit bla, variant molt poc per a distints tipus de teixit bla.

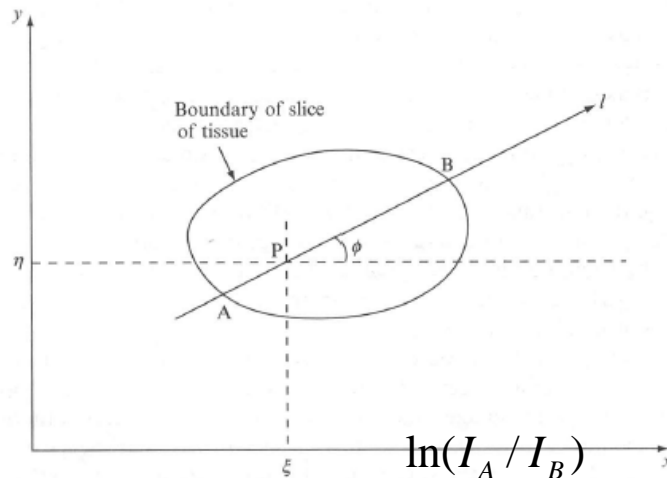
■ Imatgeria amb radiació interna: **cambres gamma**

- A l'introduir un radioisòtop en el cos la distribució de radiació depèn de com s'introdueix, la forma en què és absorbit, i com el cos actua \Rightarrow informació funcional (anatòmica i metabòlica).
- ^{131}I y ^{123}I per a l'estudi del tiroide.
- $^{99\text{m}}\text{Tc}$ ($E_\gamma=140$ keV 90%, $T_{1/2}=6$ h, amb molt poca emissió β^-) és el més utilitzat. Es produïx amb un generador de ^{99}Mo . ($T_{1/2}=65.9$ h), el qual al seu torn es produïx en reactors o per captura neutrònica en ^{98}Mo .



Tomografia computeritzada (CT)

- Les radiografies i cambres gamma ofereixen una bona resolució espacial en dos dimensions (projecció) però no donen informació de profunditat.
- Pobra discriminació en μ i ambigüitat degut a la superposició d'imatges d'objectes de diferents profunditats al projectar-se en el pla.
- Principi de la **CT** (1971): tota la informació necessària per a reconstruir la imatge bidimensional d'un tall transversal de l'objecte s'obté a partir d'un conjunt complet de projeccions unidimensionals cobrint totes les possibles direccions en el pla del tall.

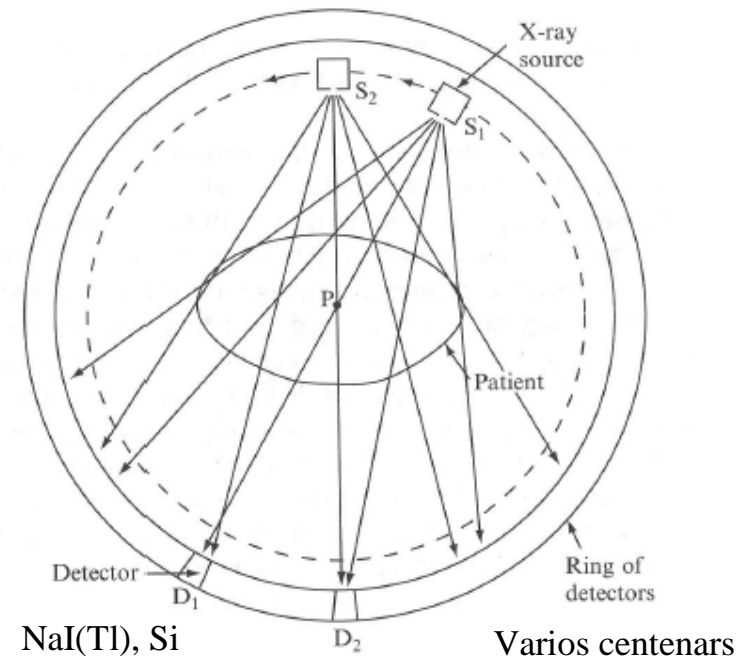


$$\mu_B(\xi, \eta) = \int_0^\pi d\phi \int_A^B \mu(x, y) dl \quad \text{Funció "back-projected"}$$

$\mu(x, y)$ s'obté deconvolucionant $\mu_B(\xi, \eta)$

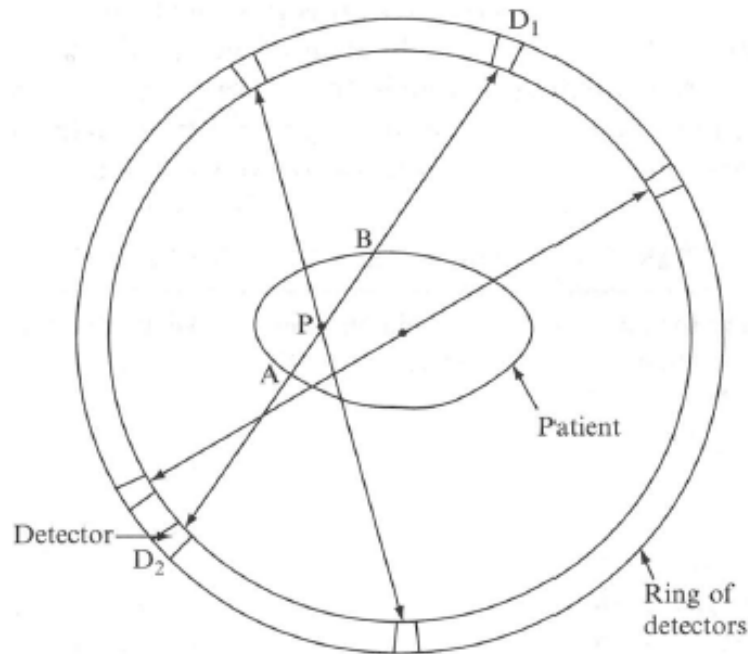
\Rightarrow càlcul numéric intensiu

- Amb radiació interna: **tomografia d'emissió de fotons simples (SPECT)**.



Tomografia d'emissió de positrons (PET)

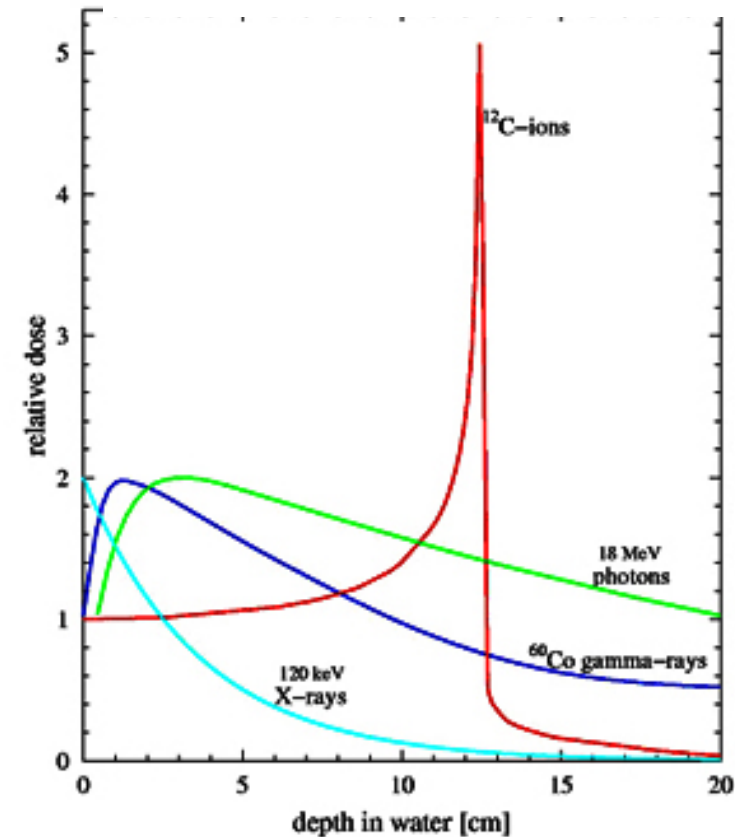
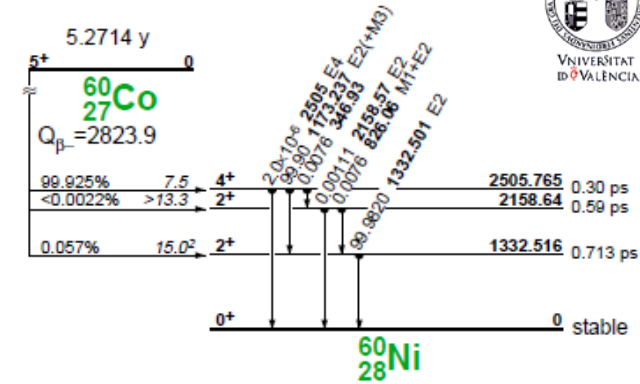
- Amb SPECT és necessari col·limar els detectors a fi de definir les direccions de procedència dels rajos γ (la radiació s'emet en totes direccions).
- Menor eficiència, major temps per a produir una imatge.
- Amb PET no cal col·limar (molta millor eficiència), atès que l'aniquilació del positró té lloc pràcticament en repòs i els fotons de 511 keV són col·lineals.
- La detecció en coincidència dels dos fotons determina la direcció de procedència.
- El nucli emissor ha d'estar pròxim a la línia dels fotons, atès que el positró es desplaça només uns pocs mm abans de frenar-se.



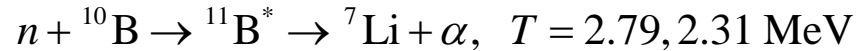
- La taxa de comptatge de coincidències és una mesura integral de l'activitat al llarg de la línia AB (després de correccions d'atenuació).
 - ✓ Radio-nuclis usals: Bio-orgànics (traçadors ideals per a estudis mèdics): ^{11}C , ^{13}N , ^{15}O , ^{18}F .
- Produïts en xicotets ciclotrons, amb protons o deuterons.

Radioteràpia

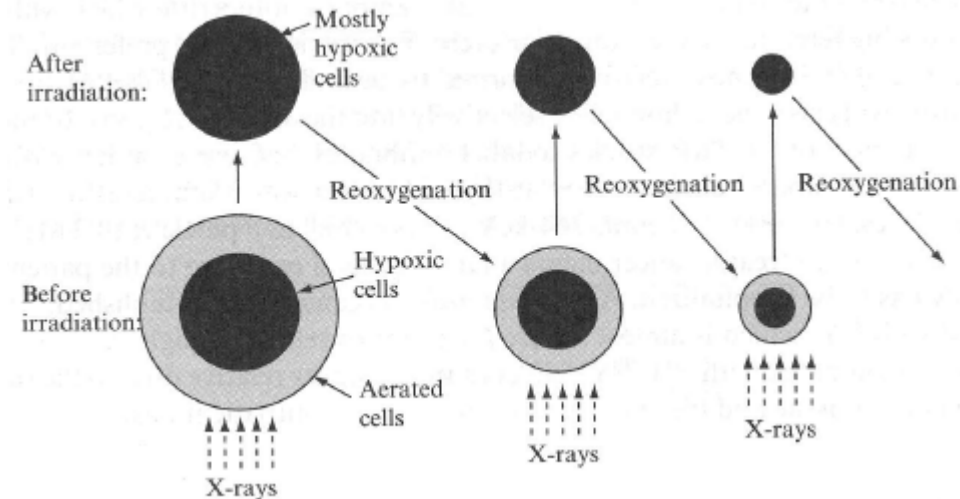
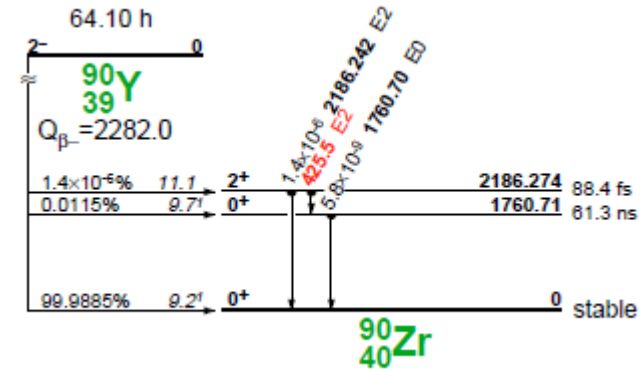
- L'ús de les radiacions per al tractament de tumors es remunta als anys inicials en què va començar a identificar-se els seus efectes nocius.
- Principi: danyant l'ADN, la radiació evita de reproducció cel·lular del teixit malalt.
- Problema: minimitzar irradiació a teixit sa, a fi de reduir la destrucció del mateix el i risc d'induir un nou tumor:
 - Dosis total + fraccionament espacial i temporal per donar temps a la recuperació i repoblació cel·lular.
 - Els teixits sans tenen major capacitat de recuperació.
- En conjunció amb altres tècniques (cirurgia i quimioteràpia), amb irradiació externa i interna.
- Fotons i electrons:
 - Emissors gamma i beta (fàcils i barats). Ex. ^{60}Co .
 - Produïts amb acceleradors (usualment LINACs) de fins a 6 MeV. Els electrons xoquen amb un blanc i produeixen rajos X i bremsstrahlung. Els electrons s'usen directament per a tumors superficials ($\approx 0.5 \text{ cm/MeV}$).
- Partícules carregades: protons, ions de ^{12}C .



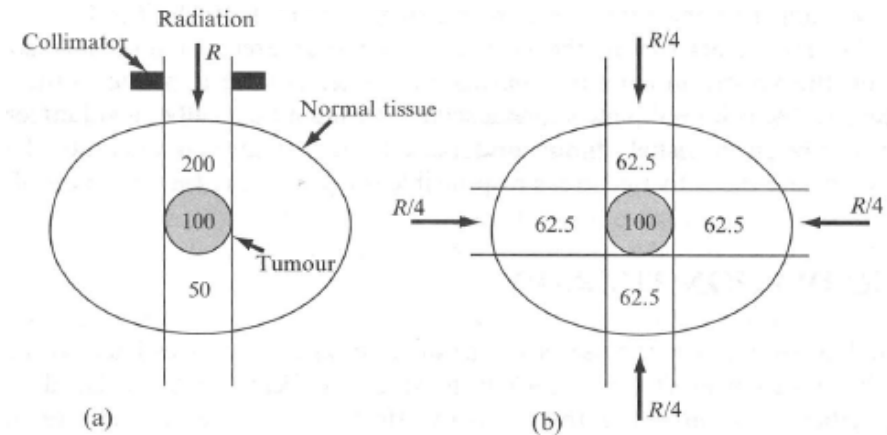
- Neutrons (molt recent, en investigació). El tumor s'enriqueix en bor (^{10}B), que té una elevada σ de captura neutrònica:



- Molt alta densitat de ionització en volum molt reduït i contingut (on hi ha bor ^{10}B).
- Radio-nuclis β purs. L'isòtop s'introdueix en l'àrea afectada (quirúrgicament, injectant-ho, ingerint-se). Recentment s'estan usant anticossos com a portadors (immuno-biologia).



Efecte de la re-oxigenació en la reducció del tumor i del fraccionament de les dosis



Efecte d'irradiació d'un tumor en diferents direccions

Tema 3:

Sistemes experimentals: detectors i acceleradors

1. Detectors de radiació

- 1.1 Model simplificat d'un detector
- 1.2 Modus d'operació d'un detector
- 1.3 Espectre d'altura de polsos
- 1.4 Resolució energètica
- 1.5 Eficiència de detecció
- 1.6 Temps mort
- 1.7 Altres característiques generals dels detectors
- 1.8 Detectors de semiconducció
- 1.9 Calorímetres
- 1.10 Grans instal·lacions

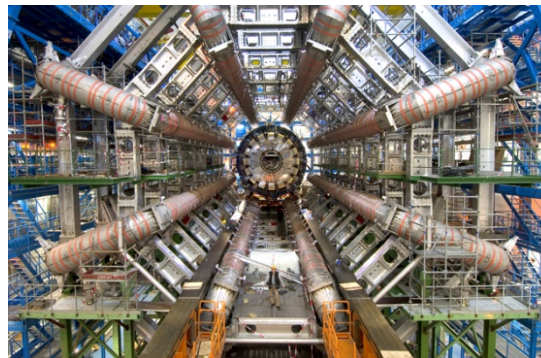
2. Acceleradors de partícules

- 2.1 Classificació i evolució
- 2.2 Aplicacions
- 2.3 Conceptes bàsics
- 2.4 Acceleradors electroestàtics
- 2.5 El ciclotró
- 2.6 El sincrotró
- 2.7 Focalització
- 2.8 Radiació de sincrotró
- 2.9 Lluminositat
- 2.10 Les majors instal·lacions al món

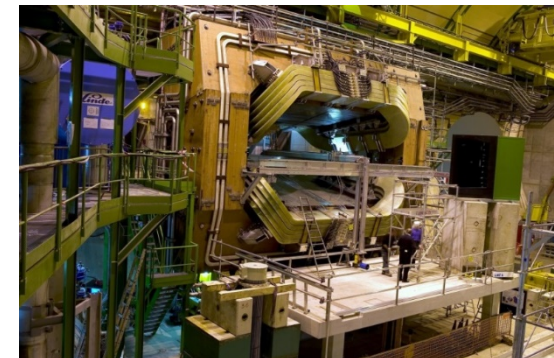
Col·lisionador LHC al CERN



Detector ATLAS al LHC



Detector LHCb al LHC



1. Introducció

- La física nuclear i de partícules, com a disciplina experimental, ha requerit per al seu avanç el desenvolupament d'una infinitat de dispositius experimentals.
- En alguns casos aquests dispositius han sigut possibles gràcies a la tecnologia disponible en cada moment històric, i en altres han requerit el desenvolupament de la seua pròpia tecnologia.
- En ambdós casos la major part d'aquests dispositius i desenvolupaments han sigut i són utilitzats tant en altres disciplines científiques com en la indústria i medicina.
- Entre ells, han sigut fonamentals per al desenvolupament de la física nuclear i de partícules:
 - Fonts de radiació (naturals i artificials).
 - Els acceleradors de partícules:
 - Física nuclear, 10 MeV - 1 GeV (ions lleugers i pesats, protons).
 - Grans instal·lacions científiques: CERN (Ginebra), GSI (Darmstadt), GANIL (Caen), etc.
 - Física de partícules, fins a \sim TeV (protons) i \sim 200 GeV (electrons), \sim TeV (ions)
 - Grans instal·lacions científiques: CERN (Ginebra), Fermilab (Chicago), SLAC (Stanford), KEK (Japó), DESY (Hamburg), Brookhaven (NY), etc.
 - Detectores de partícules.
- Avui, tant els acceleradors com els detectors de partícules desenvolupats per a la física nuclear i la física de partícules són àmpliament utilitzats en altres aplicacions d'investigació, indústria i medicina (tant diagnòstic com teràpia).

1. Detectors de radiació

- Usen les característiques de la interacció de la radiació amb la matèria per a detectar, identificar i/o mesurar les propietats de la partícula.
- Ha de contenir un 'transductor' que transforme l'efecte directe de la partícula (càrrega generada o radiació lluminosa) en un senyal observable/enregistrable.
- Exemple: el nostre ull és un detector de fotons:

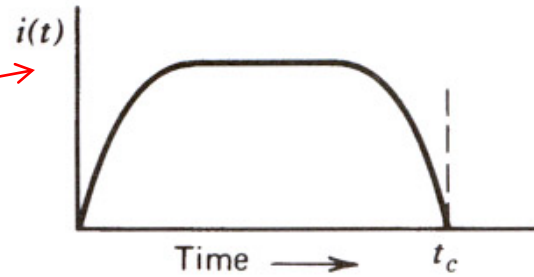
Es tracta d'un detector basat en la difusió de fotons:

- ❑ La font de llum emet fotons.
- ❑ Els fotons arriben a l'objecte en qüestió: alguns són absorbits, altres són difosos o reflectits.
- ❑ Alguns dels fotons difosos arriben a l'ull, i són focalitzats en la retina.
- ❑ Els fotons són detectats pels sensors de la retina (fotoreceptors: bastons i cons).
- ❑ Els fotoreceptors produeixen un pols nerviós (senyal elèctric).
- ❑ Amplificació i/o correcció quan es necessita.
- ❑ Transmissió al cervell per a processament i interpretació.

- En la història de la física nuclear i la física de partícules molts són els distints tipus de detectors que s'han desenvolupat:
 - No hi ha un detector universal: per a cada tipus de radiació i depenent del rang d'energies i de la informació que aquest ha de subministrar, es requereix un tipus distint.
 - No obstant això, tots estan basats en els mateixos principis fonamentals: la transferència de part o la totalitat de l'energia de la radiació a la massa del detector, i la seua conversió en una forma accessible a la percepció humana.
- La major part dels detectors moderns són electrònics:
 - La informació del detector es transforma en impulsos elèctrics, els quals poden ser tractats per mitjans electrònics.
- L'electrònica i sistemes computacionals formen part intrínseca dels detectors moderns.
- Els detectors poden ser sensibles **al flux de partícules o al pas d'una simple partícula** (o a ambdós).
- **La informació** que pot extraure's al pas d'una simple partícula és molt variada:
 - **Recompte:** si ha passat o no.
 - **Temps de pas:** si ha passat o no, i en quin instant, amb tècniques de coincidència.
 - **Posició:** la trajectòria que ha descrit (detectors de traces).
 - **Moment:** amb un camp magnètic, que corba la trajectòria en funció del moment.
 - **Energia:** a partir dels abasts de les partícules, i per a altes energies amb calorímetres (electromagnètics i/o hadrònics).
 - **Identificació:** quin tipus de partícula ha passat, és a dir, la seua massa, determinada a partir de la mesura del moment i la dependència de la ionització amb β (o efecte Cerenkov).

Model simplificat dels detectors

Intensitat que es recol·lecta al circuit exterior

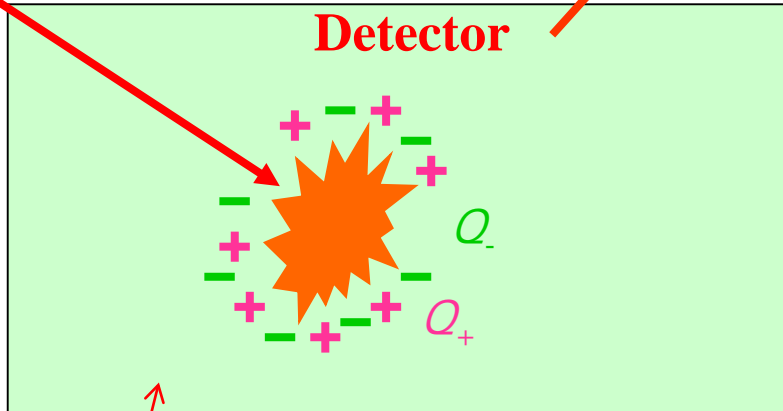


$$\int_0^{t_c} i(t) dt = Q$$

Radiació incident

✓ t_c : temps de recol·lecció de la càrrega

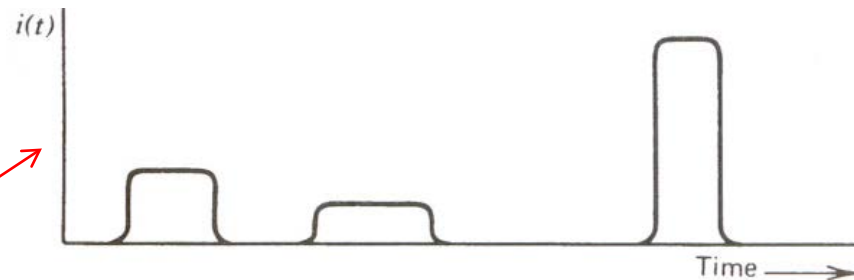
Detector



V

$i(t), V(t)$

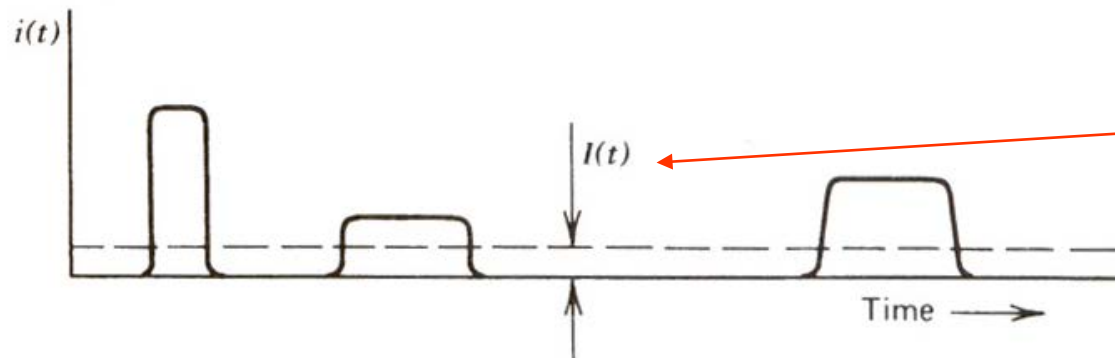
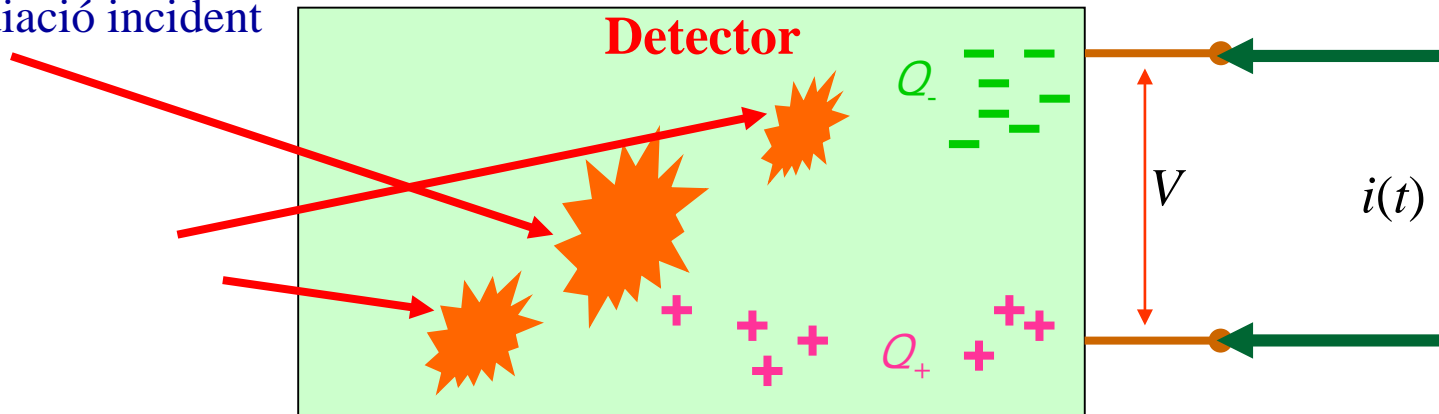
Senyal que es produeix al pas de la partícula ionitzant: electrons i ions positius (també llum) que són transportats al circuit exterior



Modes d'operació dels detectors: mode corrent ($T \gg t_c$)

- ✓ En aquest mode es calcula la intensitat mitjana del corrent que és generat per les partícules ionitzants.
- ✓ T : **temps de resposta del dispositiu** de mesura de la càrrega.

Radiació incident



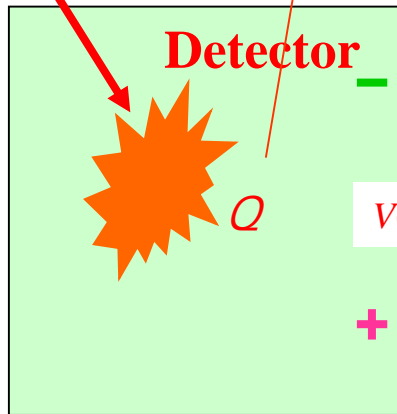
$$I(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t i'(t) dt'$$

- ✓ Aquest mètode s'utilitza en els dosímetres de radiació en els quals es pot triar el temps de mitjana T . Interessant en zones exposades a radiació relativament intensa.

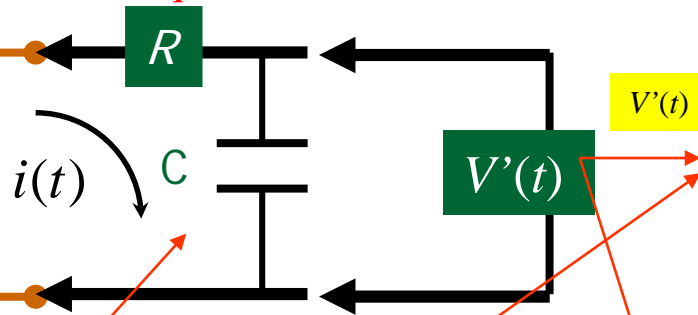
Modes d'operació dels detectors: mode polsat

En el mode polsat es vol recollir la informació de cada pols generat per cada partícula individualitzada: podem voler preservar al màxim el temps d'arribada del senyal i l'energia depositada al detector

Radiació incident



Circuit equivalent



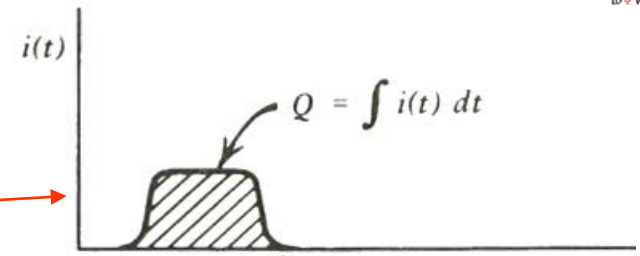
Preamplificador

(circuit RC passa baixa, integrador)

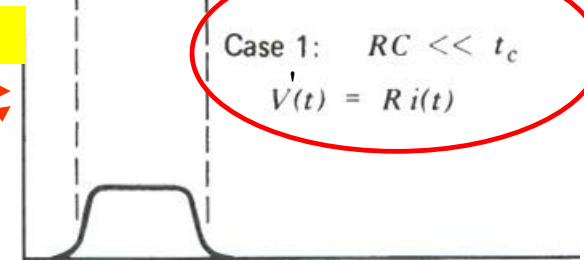
$$V(t) = i(t)R + V'(t) = RC \frac{dV'(t)}{dt} + V'(t)$$

$$\text{Si } RC \ll t_c \rightarrow V'(t) \approx V(t) \approx Ri(t)$$

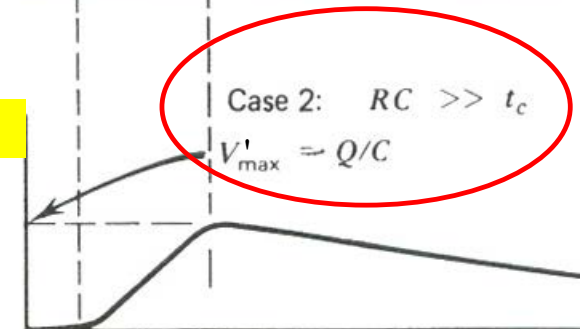
$$\text{Si } RC \gg t_c \rightarrow V'(t) \approx \frac{1}{RC} \int V(t) dt$$



Case 1: $RC \ll t_c$
 $V'(t) = Ri(t)$



Case 2: $RC \gg t_c$
 $V'_{\max} \approx Q/C$

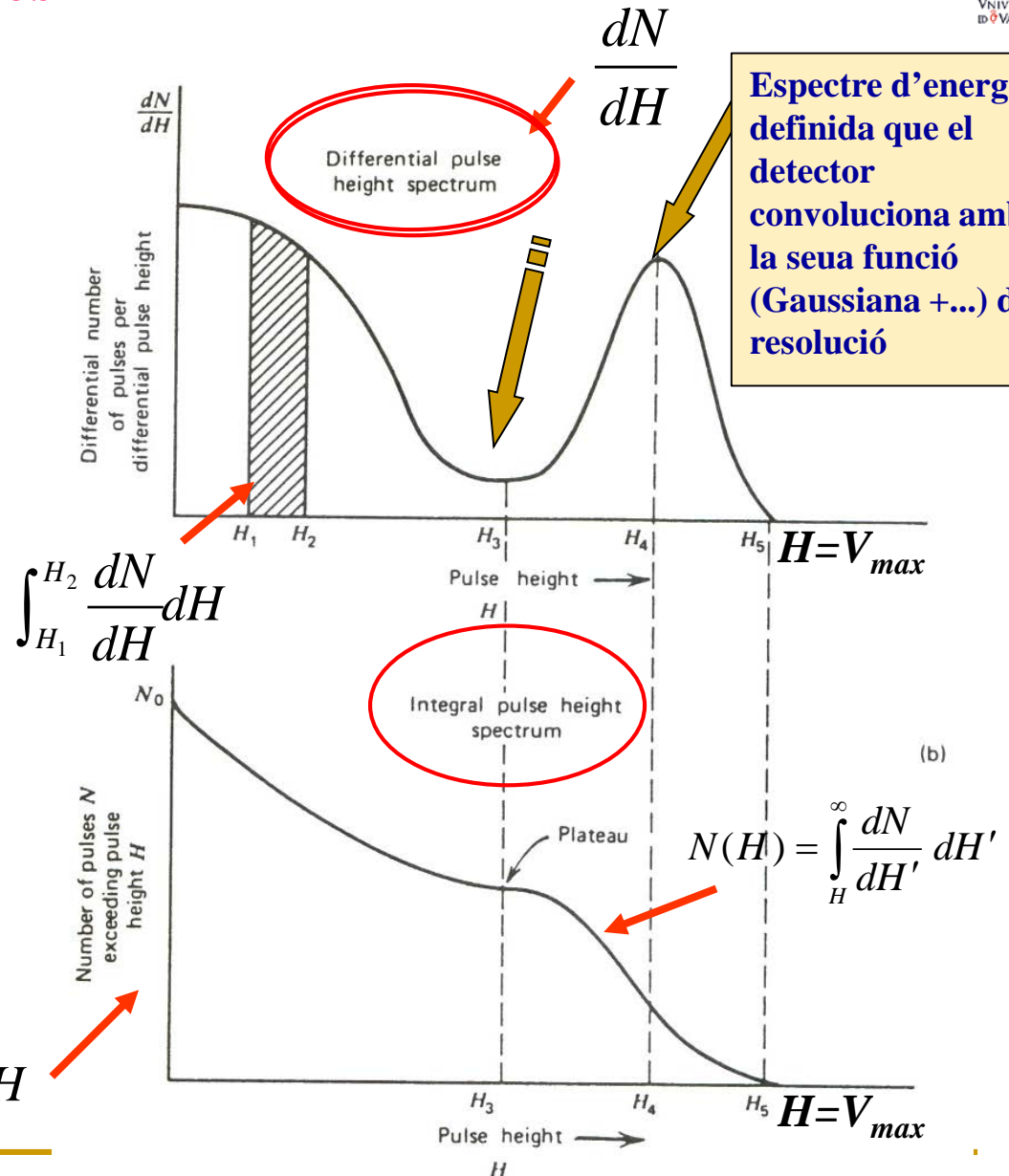


$V(t)$ és l'excitació que la partícula origina al detector.
 $V'(t)$ la que arriba a l'exterior.

Espectre d'altura de polsos

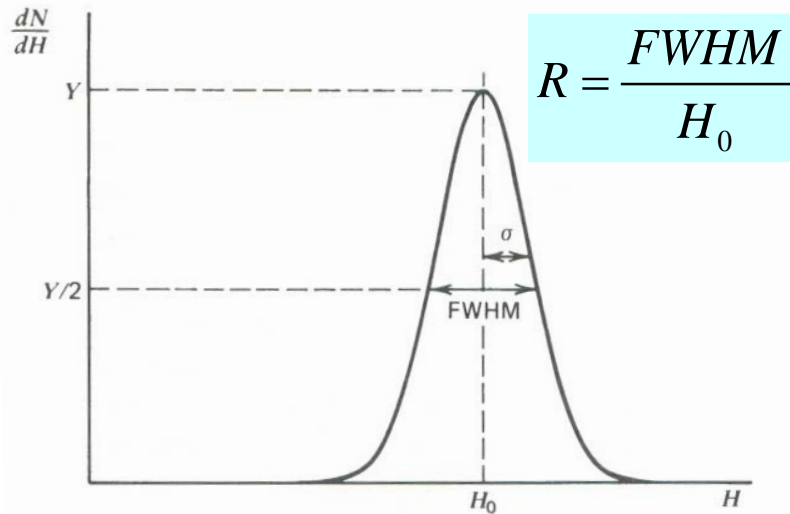
- És el mètode que usem quan volem la màxima precisió sobre l'energia depositada: (*PHA: pulse height analysis*).
- Detector funcionant en **mode polsat** amb $RC \gg t_c$.
- Es mesura V_{max} que equival a mesurar Q .
- L'energia E de la radiació és proporcional a Q (calibratge).
- Radiació d'energia variada incideix en el detector.
- Cada interacció produeix un pols.
- Variacions en Q poden deure's a distinta energia de la partícula però també cal considerar les fluctuacions estadístiques per a una mateixa energia.

$$N_0 = \int_0^\infty \frac{dN}{dH} dH$$



Resolució energètica R

- Defineix el poder de separació de dos pics d'energia pròxima:



$$H_0 = kN_{\pm} = k \frac{Q}{q} \rightarrow \sigma = k \sqrt{\frac{Q}{q}}$$

$$FWHM = 2\sqrt{2 \ln 2} k \sqrt{\frac{Q}{q}}$$

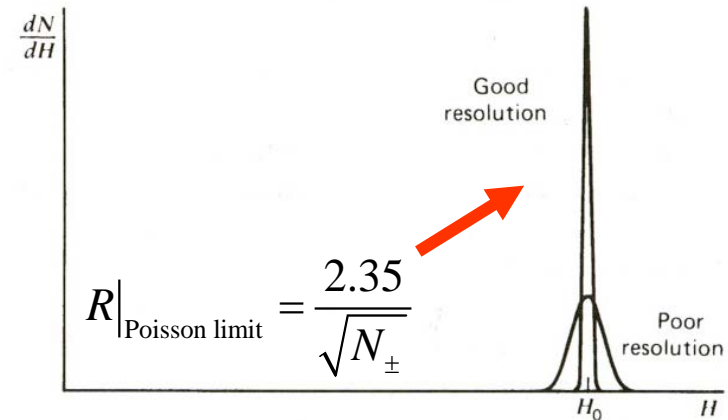
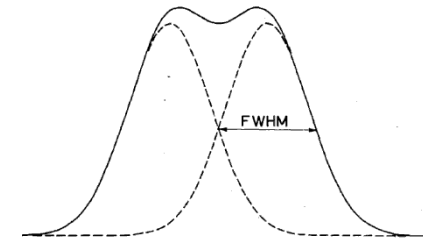
$\frac{Q}{q} = N_{\pm} \rightarrow$ Nombre de parelles portadores de càrrega en el detector.

$$R = 2\sqrt{2 \ln 2} k \frac{\sqrt{N_{\pm}}}{kN_{\pm}} = \frac{2.35}{\sqrt{N_{\pm}}} \Rightarrow 2.35 \sqrt{\frac{F}{N_{\pm}}}$$

Factor de Fano: té en compte que no hi ha fluctuacions estadístiques degudes a dE/dx quan tota l'energia es deposita en el detector.

$$R \propto \frac{1}{\sqrt{E}}, \text{ ja que } E \propto N_{\pm} w$$

w : energia necessària per a crear un parell electró-ió.



Eficiència de detecció: conceptes

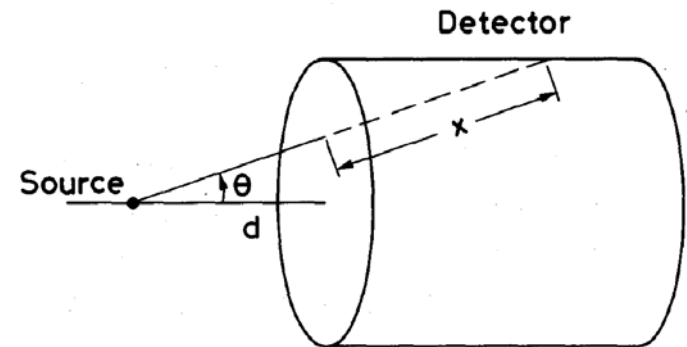
■ Eficiència total o absoluta

$$\varepsilon_{abs} = \frac{\text{Nombre de polsos registrats}}{\text{Nombre de "quanta" emesos per la font}}$$

- $d\varepsilon_{abs} \approx d\varepsilon_{geo} \varepsilon_{int}$ la eficiència intrínseca de les partícules ionitzants sol ser del 100%, mentre que no ocorre això per a les neutres.

■ Eficiència geomètrica \Rightarrow grandària finita del detector i distància a la font:

$$d\varepsilon_{geo} = \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{2\pi \sin \theta d\theta}{4\pi} = \frac{1}{2} \sin \theta d\theta$$



■ Eficiència intrínseca \Rightarrow probabilitat d'interacció de la radiació en el detector \Rightarrow depèn del recorregut lliure mitjà λ_{int} de la radiació en el detector i del tipus de radiació

$$\varepsilon_{int} = \frac{\text{Nombre de polsos registrats}}{\text{Nombre de "quanta" que incidixen sobre el detector}}$$

$$\varepsilon_{int} = 1 - e^{-x/\lambda_{int}}$$

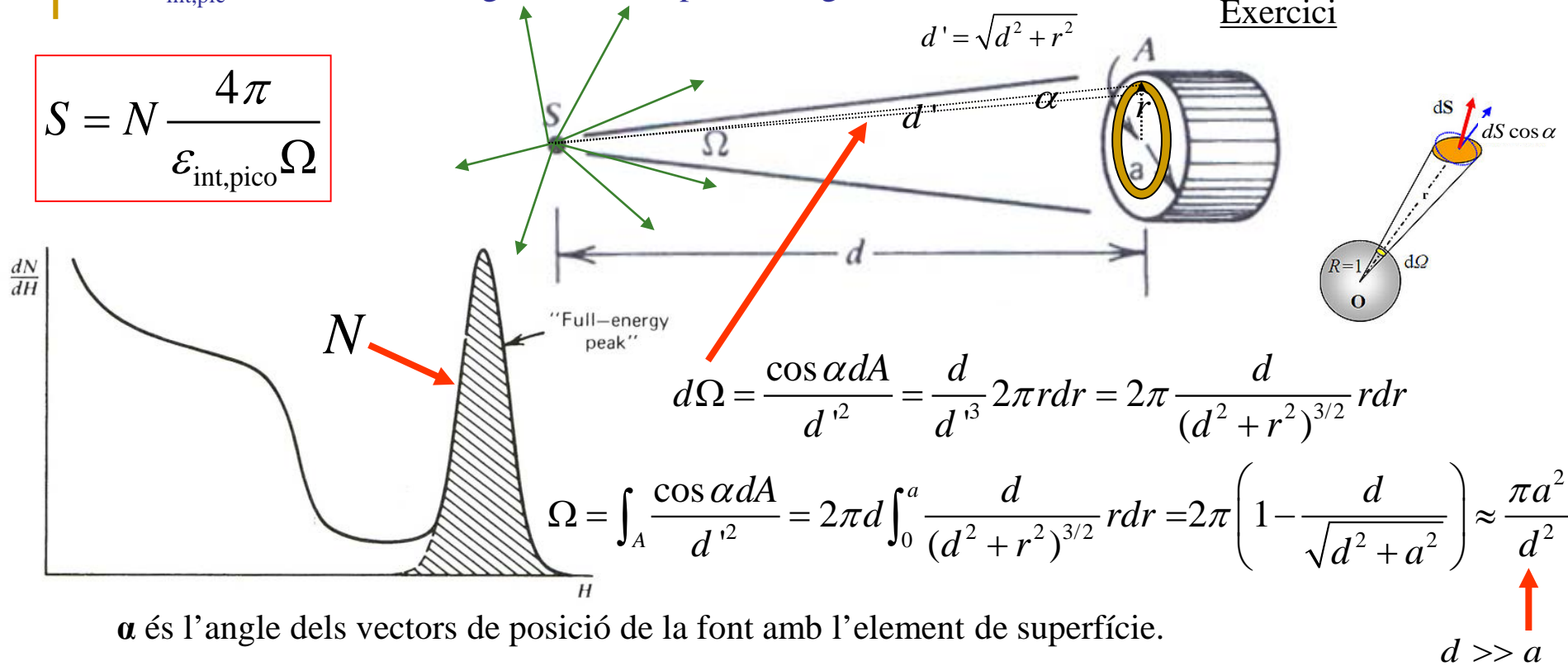
■ Acceptància: combinació de factors de correcció per distintes pèrdues (autoabsorció de la font, backscattering, pèrdues en l'aire i la finestra del detector, etc.):

$$\varepsilon_{tot} = \varepsilon_{geo} \varepsilon_{int} A(E)$$

- Exemple: font puntual d'activitat S : mesura de l'activitat de la font. S és l'activitat de la font i $\varepsilon_{\text{int,pic}}$ és la intensitat registrada en el pic d'energia:

$$S = N \frac{4\pi}{\varepsilon_{\text{int,pic}} \Omega}$$

Exercici



- Si es tracta d'un **detector de fotons**, la seua acceptància inclou:
 - ✓ Si $E_\gamma > 1.022 \text{ MeV} \Rightarrow$ es crea un parell \Rightarrow el positró s'aniquila i produeix dos fotons de 0.511 MeV ; pot escapar del detector un fotó (\rightarrow pic d'escapament simple), els dos fotons (\rightarrow pic d'escapament doble) o cap fotó (\rightarrow pic d'energia total, o foto-pic).
 - ✓ Pic de '**backscattering**': fotons difosos Compton cap arrere que en general s'han produït en el blindatge del detector i en els quals l'energia de l'electró no s'ha detectat.

Temps mort

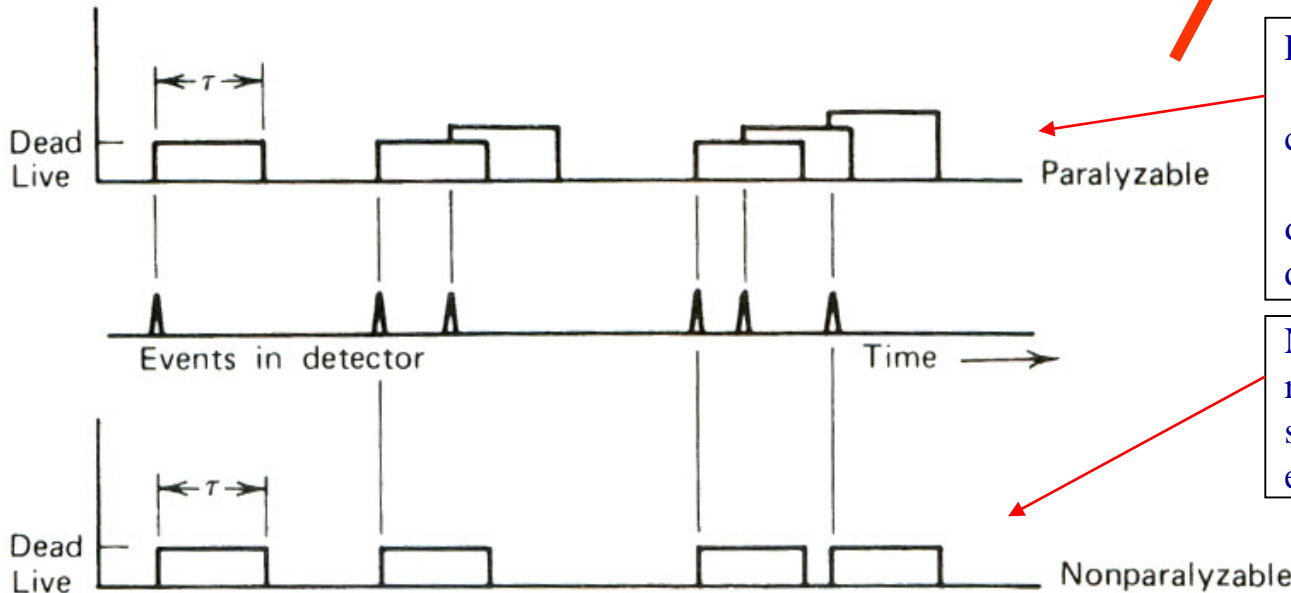
n = taxa de comptes vertadera
 m = taxa de comptes registrades
 τ = temps mort

Funció de distribució
 dels intervals de temps.
 Vegeu Knoll, p. 97.

$$P_1(T) dT = n e^{-nT} dT \rightarrow P_2(t > \tau) = \int_{\tau}^{\infty} n e^{-nT} dT = e^{-n\tau} \rightarrow$$

$$m = n e^{-n\tau}$$

T representa el valor
 dels intervals de temps
 entre dos senyals consecutius



Extensible: s'allarga el temps mort
 en arribar un altre esdeveniment
 consecutiu. Sols detecta la fracció
 de successos que arriben després
 d'un temps superior a τ retardat
 de l'anterior

No extensible: Durant el temps
 mort τ generat per l'arribada d'un
 succés, no es detecten nous
 esdeveniments

Es perden els esdeveniments
 que cauen en el temps inactiu
 del detector

$$\left. \begin{array}{l} \tau = \text{temps mort} \\ \text{Temps d'inactivitat} = m\tau \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$n - m = nm\tau \rightarrow$$

$$n = \frac{m}{1 - m\tau}$$

S'han detectat m esdeveniments i avaluem que la taxa vertadera és n .

Altres característiques generals i paràmetres dels detectors

■ Funció resposta

- ❑ La figura de mèrit f caracteritza la resposta global d'un detector: $f = Q_{rec} / E_{depo}$ en pC / MeV
- ❑ La resposta d'un detector ha de ser la més lineal possible en tot el rang de valors.
- ❑ Funció resposta: dona la probabilitat que l'energia obtinguda pel detector siga E quan l'energia real de la partícula és E' :

$$\rho(E', E)$$
- ❑ En el **cas ideal** seria una funció delta de Dirac: $\rho(E', E) = \delta(E' - E)$
- ❑ Espectre experimental $H(E)$ d'altures de pols:

$$H(E) = \int S(E') \rho(E', E) dE' \quad S(E'): \text{espectre teòric}$$

- ❑ Una funció resposta molt usual és la distribució gaussiana: $\rho(E', E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_r} e^{-\frac{(E-E')^2}{2\sigma_r^2}}$
- ❑ Pot ser molt complicada, i la convolució pot requerir mètodes numèrics.

■ Resolució espacial i temporal (i les seues funcions resposta)

- ❑ Donen el **poder de separació** espacial i temporal.
- ❑ Ve donada en forma de desviació típica σ .

■ Temps de resposta

- ❑ És el temps que transcorre entre el pas de la partícula i la formació del senyal.
- ❑ Ve determinat pel flanc de pujada del pols electrònic \Rightarrow contribueix al temps mort.

Classificació general dels detectors

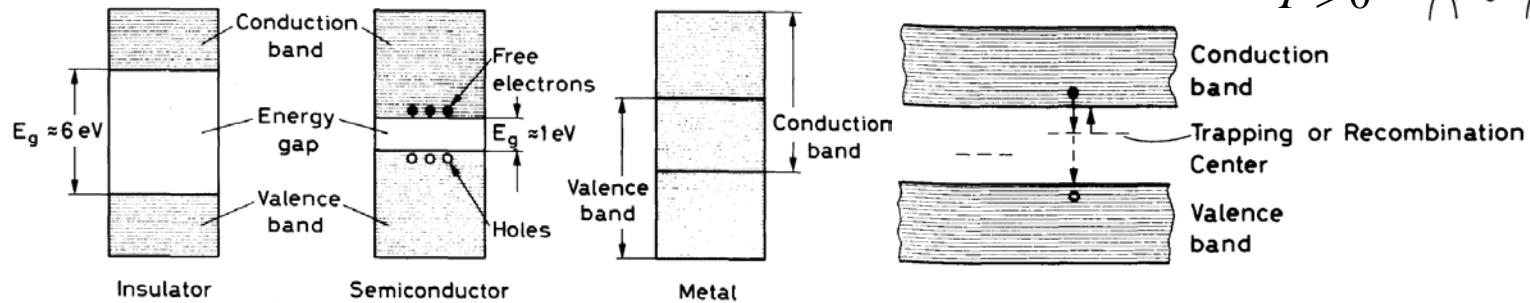
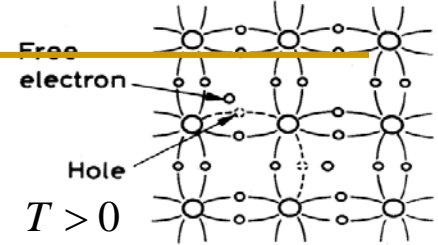
- Detectors gasosos:
 - ❑ Cambra de ionització
 - ❑ Comptador proporcional
 - ❑ **Comptador Geiger-Müller**
 - ❑ Cambra d'espurnes
 - ❑ Cambra de multifils (MWPC)
 - ❑ Cambra de deriva
 - ❑ Cambra de projecció temporal (TPC) Cambra 'streamer'
 - ❑ **Cambra de boira o Wilson**
 - ❑ Cambra de bombolles.
- Detectors d'estat sòlid:
 - ❑ Emulsió nuclear
 - ❑ **Detectors de centelleig**
 - ❑ **Tubs fotomultiplicadors**
 - ❑ Detectors de semiconductors
- Detectors de radiació Cerenkov
- Detectors de radiació de transició
- Calorímetres d'absorció total
 - ❑ Electromagnètics
 - ❑ Hadrònics

Detectors de semiconductors

- K.G. Mckay (1949).
- Basats en les propietats dels cristalls de Si i Ge (Grup IV) \Rightarrow es basen en la física de l'estat sòlid.
- Principi d'operació semblant als detectors cambres de ionització: recullen la càrrega generada per la partícula (en general sense amplificació al detector).
 - Es produeixen electrons-buits al pas de la radiació en compte d'electró-ió.
 - Energia per a produir un parell electró-buit: $w_{Si} = 3.62 \text{ eV (300 K)}$ $w_{Ge} = 2.96 \text{ eV (77 K)}$
 $\Rightarrow \sim 10$ vegades menor \Rightarrow més parelles (~ 100 per mm. mip) \Rightarrow major resolució energètica.
 - Major densitat \Rightarrow menys δ 's i major poder de frenada \Rightarrow més compactes i molt ràpids.
 - Factor de Fano: $F \approx 0.12$ \Rightarrow millora substancialment la resolució del detector.
 - Requereixen **refredament criogènic**, excepte el Si que pot treballar a temperatura ambient.
- Estructura cristal·lina \Rightarrow són sensibles als danys produïts per la radiació.
- Inicialment emprats per a **espectroscòpia de partícules** carregades i fotons.
- Posteriorment utilitzats també com a detectors de posició d'alta resolució (FN i FAE).
- Principals característiques:
 - Ràpids i baix temps mort.
 - Elevada eficiència amb bona relació senyal/soroll.
 - Bona o molt bona resolució (energètica i espacial).
 - Compactes (sòlids, densos i baixa energia d'ionització).
 - Integració d'electrònica de lectura.
 - Fàcil d'instal·lar molt prop del punt on es produeix la interacció.
 - Bona linearitat ($V=Q/C$) si la partícula deposita tota la seua energia en el detector.

■ Semiconductors intrínsecs

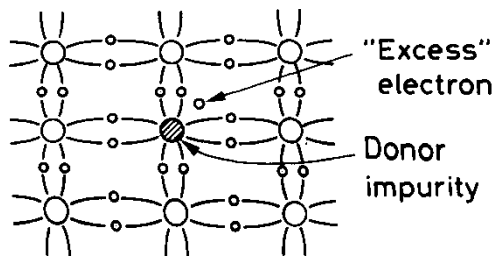
Estructura cristal·lina tetravalent (Grup IV) \Rightarrow estructura de bandes



■ Semiconductors extrínsecs o dopats:

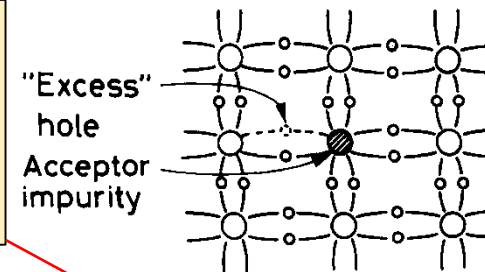
Impureses pentavalents (Grup V: As, P, Sb)

Portadors majoritaris \Rightarrow **tipus n**

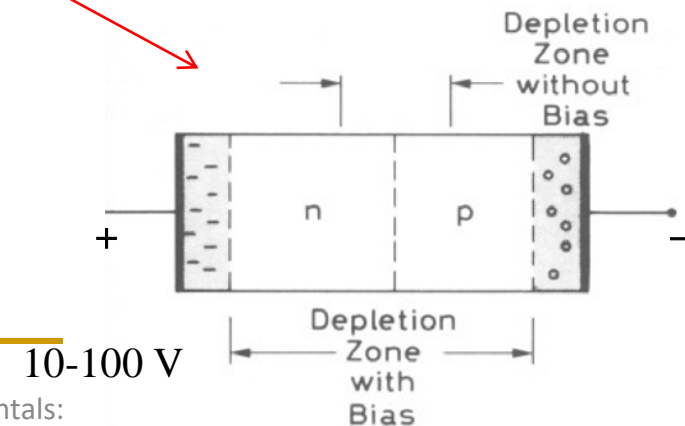
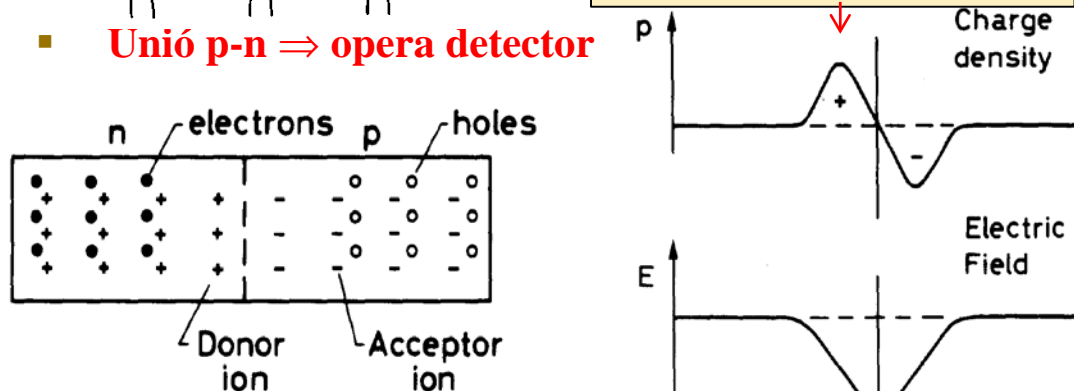


Impureses trivalents (Grup III: Ga, B, In, Li)

Portadors majoritaris: buits \Rightarrow **tipus p**



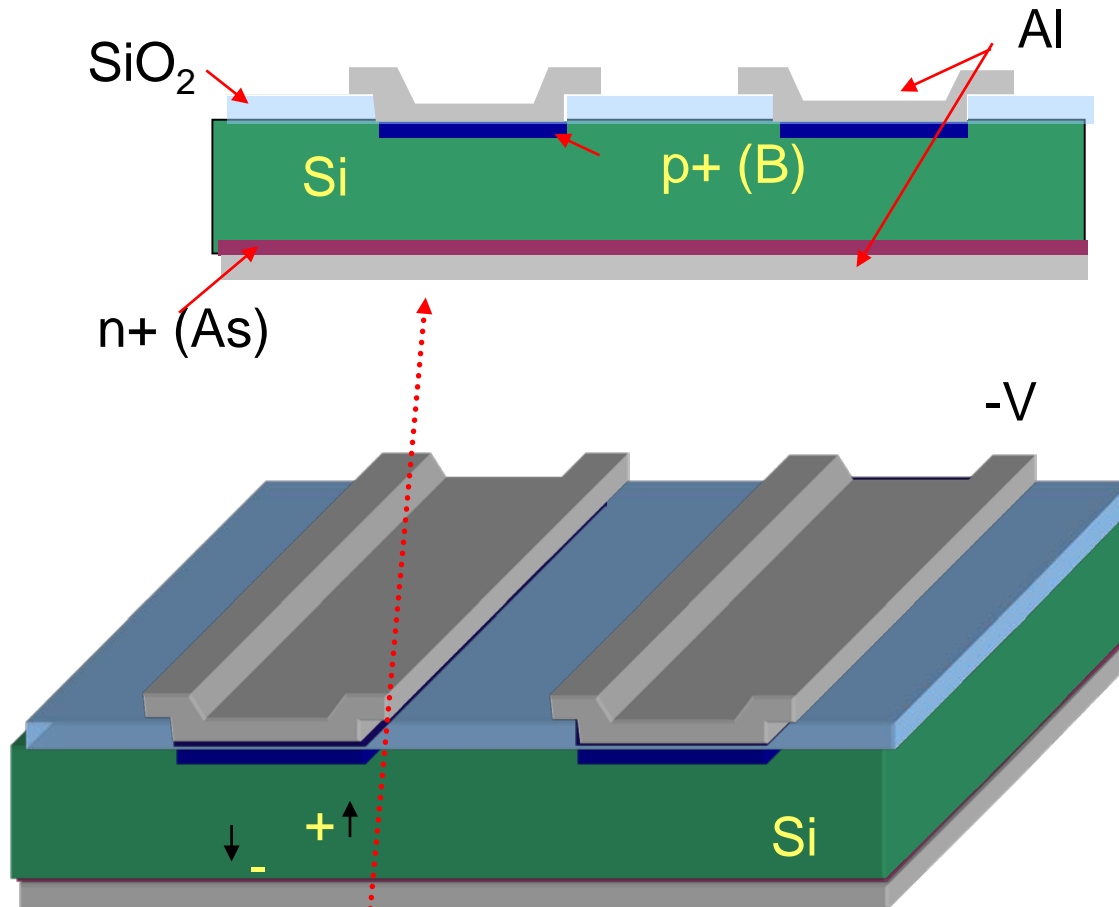
■ Unió p-n \Rightarrow opera detector



La difusió dels portadors majoritaris genera una regió "desertitzada" o lliure de càrrega augmentable amb un potencial invers (Bias).

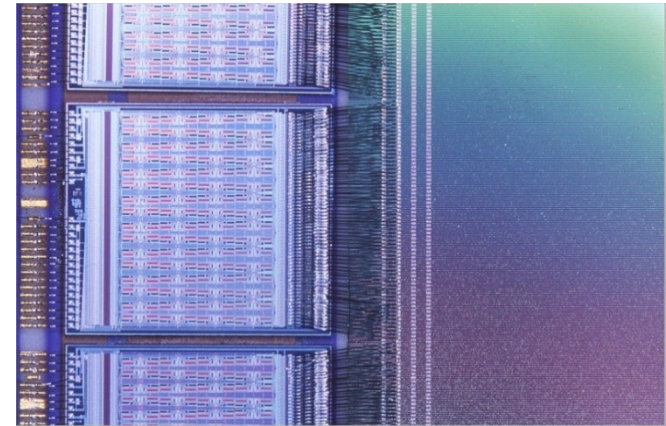
Semiconductors com detectors de posició

■ Detectors de “Strips”



El costat òhmic pot també ser construït amb bandes (“strips”) en direcció perpendicular

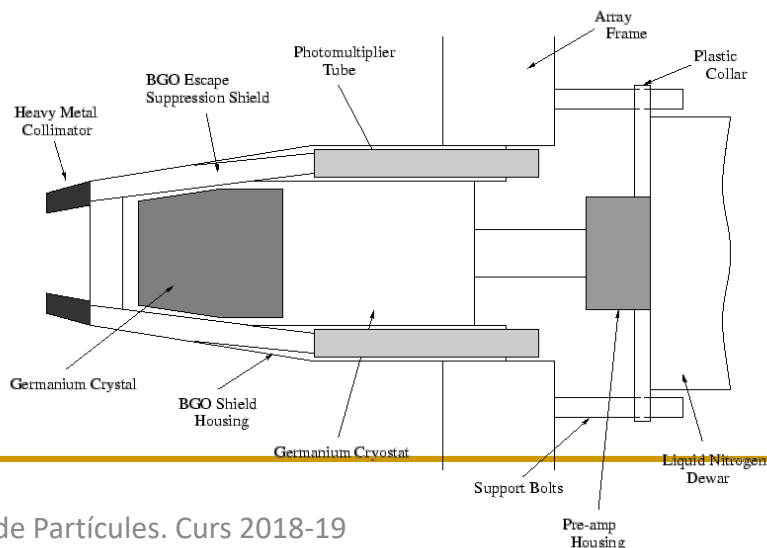
Grossària: $\sim 300 \mu\text{m}$
 Separació entre “strips”: $40\text{-}100 \mu\text{m}$
 Resolució espacial: $\text{espaïat}/12^{1/2}$
 Electrònica VLSI



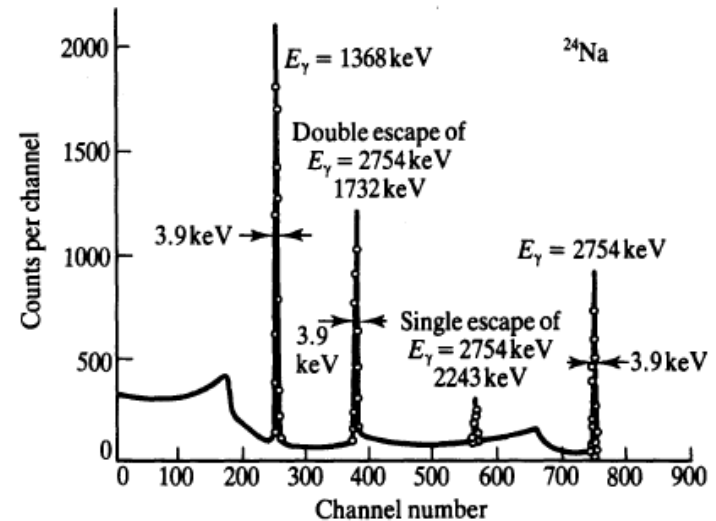
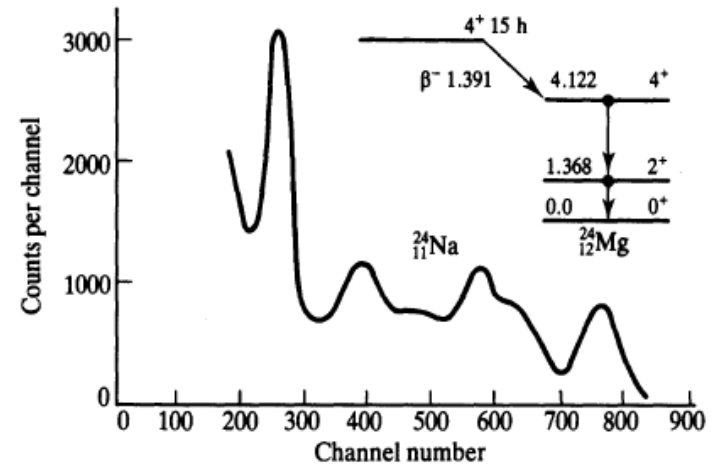
- Detectors de “Drift”
- Detectors de “Píxels”
- Detectors de “CCDs”

Semiconductors com a detectors de fotons

- Permeten l'espectroscòpia γ d'alta resolució \Rightarrow detectors de Ge(Li).
- El Ge requereix refredament, però:
 - El 'gap' d'energia és de només 0.7 eV
 - $Z(\text{Ge})=32$, enfront de $Z(\text{Si})=14 \Rightarrow$ molta millor eficiència de l'efecte fotoelèctric, Compton i producció de parells.
- No poden construir-se detectors tan grans com amb NaI (Tl) o BGO, però:
 - La resolució energètica és ~ 10 vegades millor
 - Pot combinar-se Ge amb NaI (Tl)/BGO/LSO en anticoincidència per a reduir fugues del Ge i 'netejar' els fotònics (ex. EUROGAM).



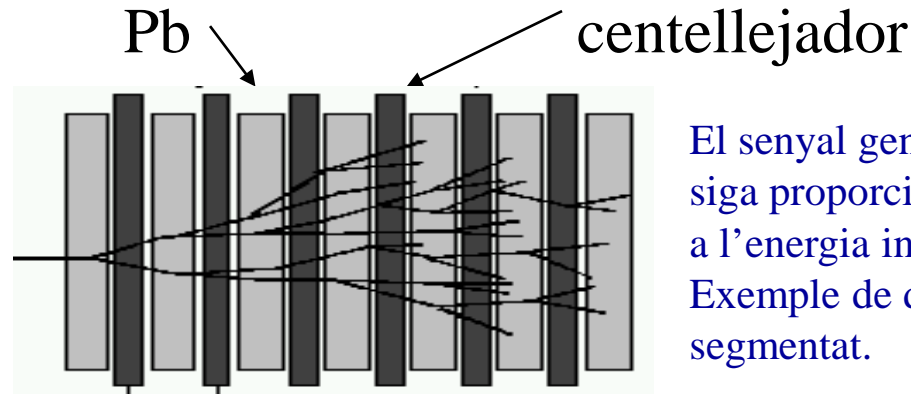
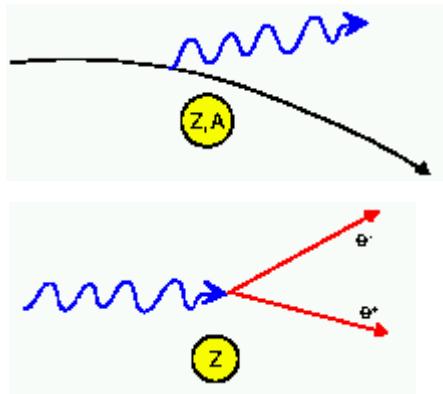
Detector de NaI(Tl)



Detector de Ge(Li)

Calorímetres

- A altes energies, tots els detectors descrits absorbeixen una part de l'energia total.
- Els calorímetres d'absorció total permeten que **tota l'energia siga depositada**, cosa que produeix una cascada de partícules \Rightarrow mètode 'destructiu'.
- Electrons i fotons d'alta energia poden produir '**cascades electromagnètiques**', com a conseqüència de successius processos de *bremssstrahlung* i de producció de parells.
- Partícules sensibles a la interacció forta poden produir altres partícules per interacció forta, les quals al seu torn poden produir més partícules \Rightarrow '**cascada hadrònica**'.
- En la cascada hadrònica: Una part de l'energia de la partícula (~30%) es dissipa en reaccions que no produeixen un senyal detectable (muons, neutrins, neutrons).

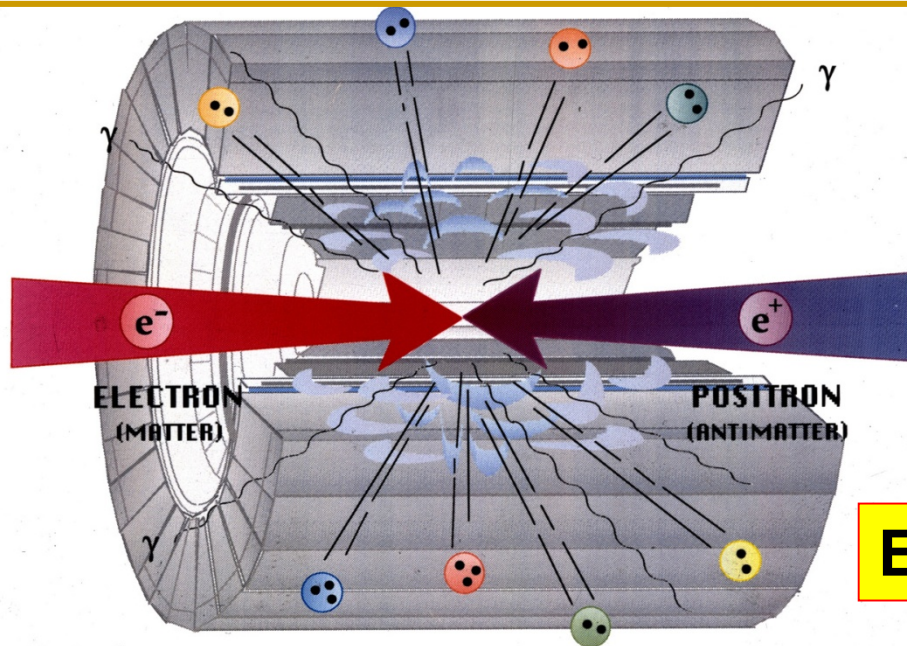


El senyal generat cal que siga proporcional a l'energia incident.
Exemple de detector segmentat.

Per a detectar la ionització podem usar centellejadors i fotodetectors.

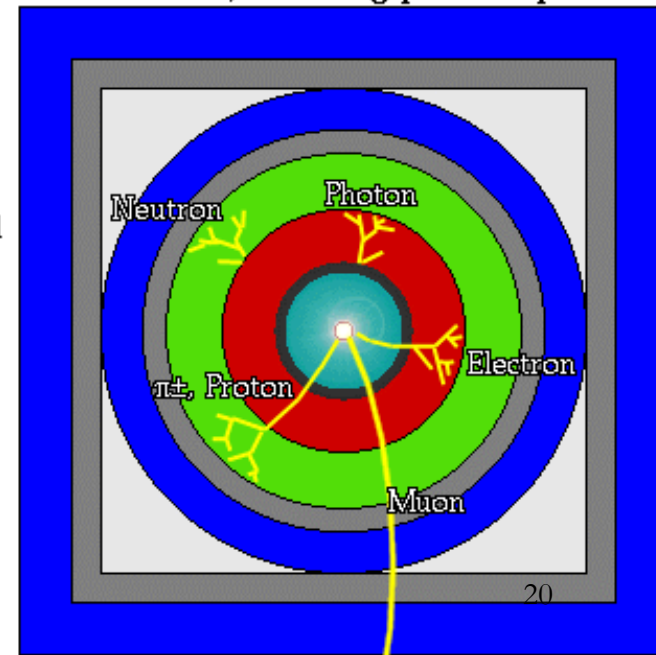
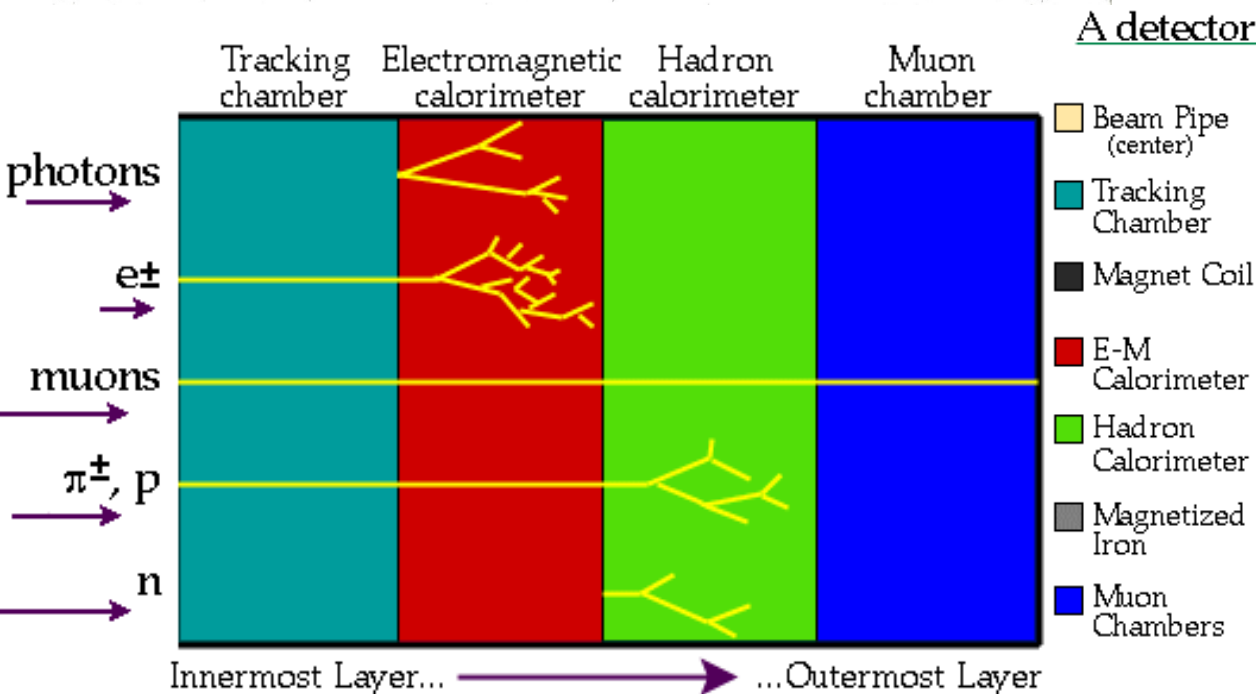
- Resolució energètica $R = \Delta E / E \propto E^{-1/2}$ i grandària $\propto \ln E$
- Identificació d'electrons, fotons, muons i hadrons (carregats i neutres).
- **Segmentats** \Rightarrow donen informació de la posició i direcció de la partícula incident.
- **Homogenis** (tot el detector és sensible, e.m.) i heterogenis (e.m. i hadrònics).

Estructura general d'un detector de propòsit general



$$E=mc^2$$

Eliane Onursal

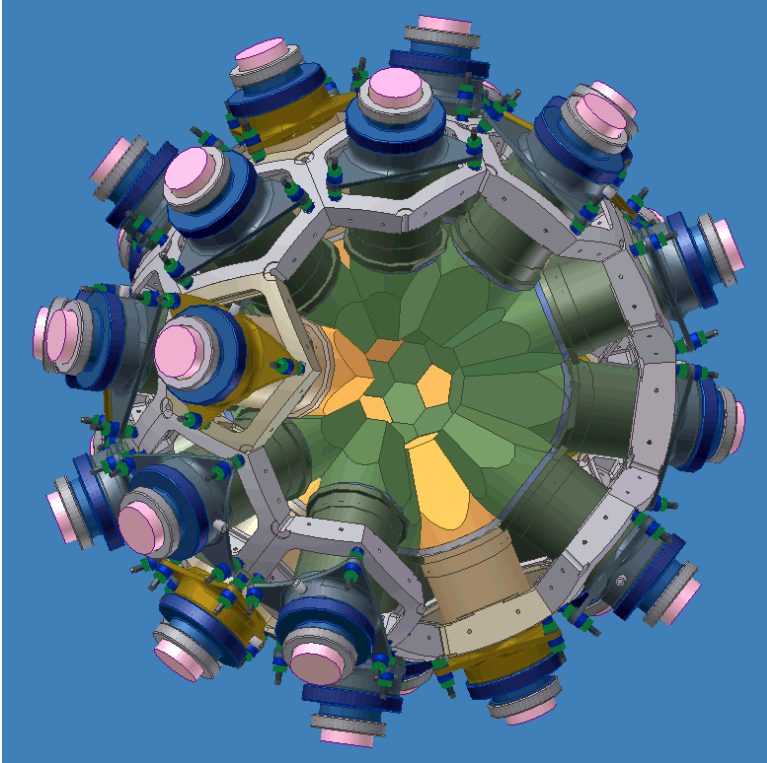


“Trigger”

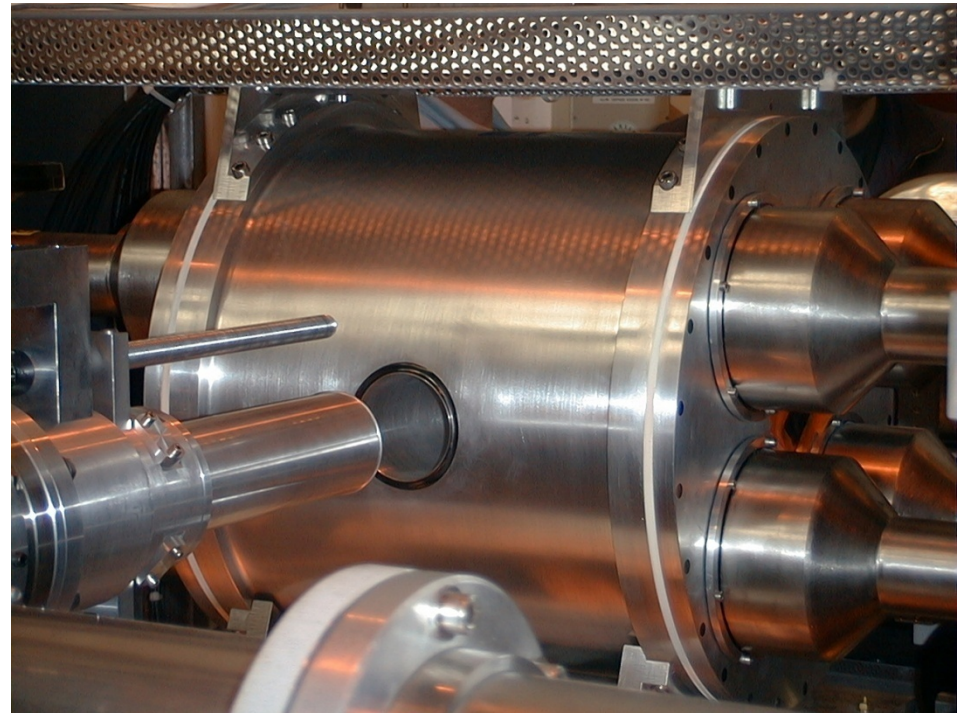
- 'Trigger' = dispositiu per a prendre la decisió de si acceptem o no un esdeveniment (interacció)
- Per què no registrar-los tots?
 - En general, només estem interessats en successos 'rars'.
 - Perquè aquests successos 'rars' tinguen lloc amb prou freqüència, es requereixen altes intensitats dels feixos \Rightarrow tindrem moltes col·lisions.
- Exemple 1: En el Tevatró els *bunches* de protons i antiprotons es troben cada 132 ns. Amb alta intensitat dels bunches, cada encreuament de feixos produeix almenys una col·lisió \Rightarrow 7.6 MHz (7 milions de col·lisions/segon) \Rightarrow només poden registrar-se de 20 a 50 Hz.
- Per què no registrar successos de manera aleatòria?
 - Estaríem realment perdent els successos interessants.
 - En l'exemple 1: Producció quark top ≈ 1 en $\approx 10^{10}$ col·lisions $\Rightarrow 10^{10}/50 \text{ s}^{-1} = 6.34$ anys per a obtenir-ne un! I una quantitat d'informació impossible d'emmagatzemar ($\sim 10^9$ Gbytes).
- Exemple 2: En el LHC els *bunches* de protons es troben cada 25 ns (40 MHz). Producció de Higgs ≈ 1 en 10^{12} col·lisions a 50 Hz \Rightarrow 634 anys!
- El sistema de trigger ha de decidir ràpidament ('on-line') quins esdeveniments ha d'eliminar, assegurant la màxima eficiència d'acceptació dels successos bons (que puguin haver-se produït Higgs).
 - Generalment s'estableixen diferents nivells (dins de cada subsistema així com global).
 - \Rightarrow Filtratge en seqüència (a menor nivell major simplicitat però major velocitat de decisió).
 - \Rightarrow Màxima eficiència d'acceptació dels successos interessants amb mínim temps mort.

Exemples de detectors actuals “típics” en física nuclear

BaF₂ TAC
@n_TOF (CERN)

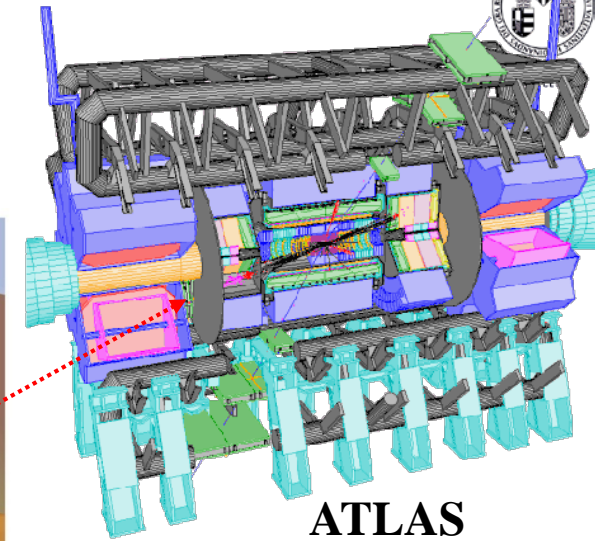
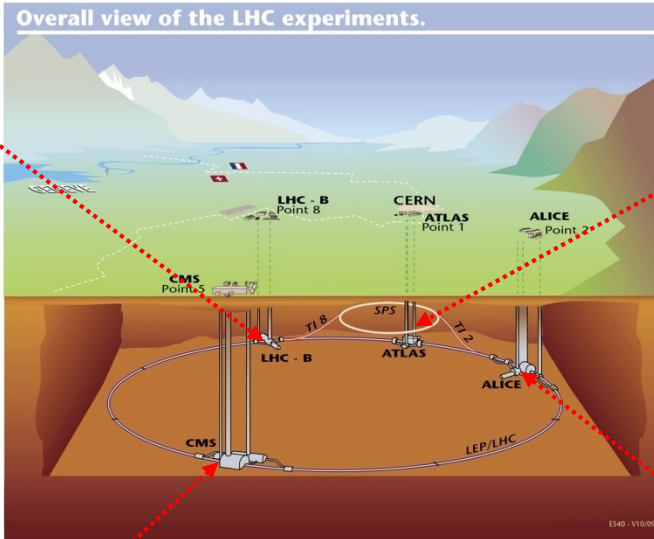
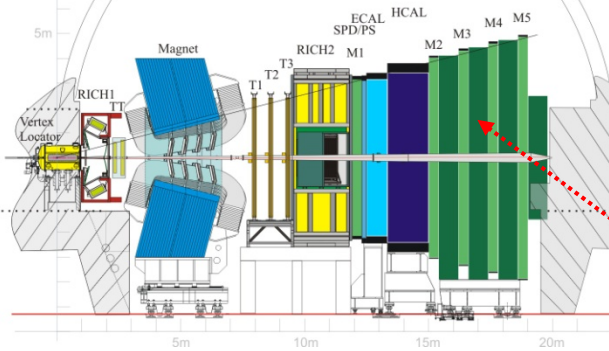


NaI, Lucrecia @
ISOLDE (CERN)



Els detectors del LHC (CERN)

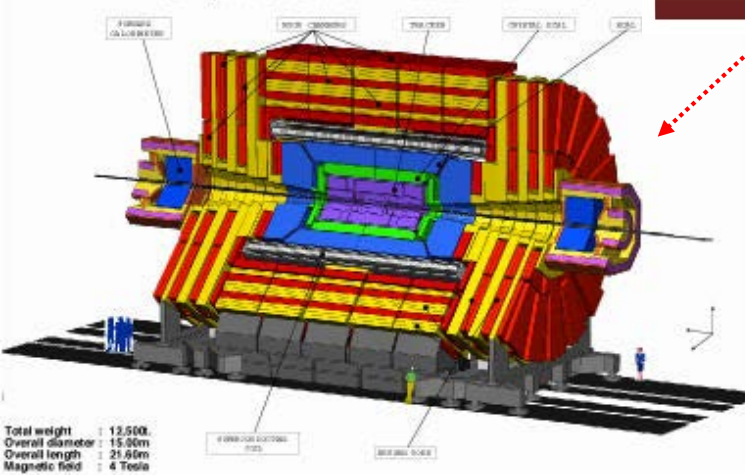
LHCb



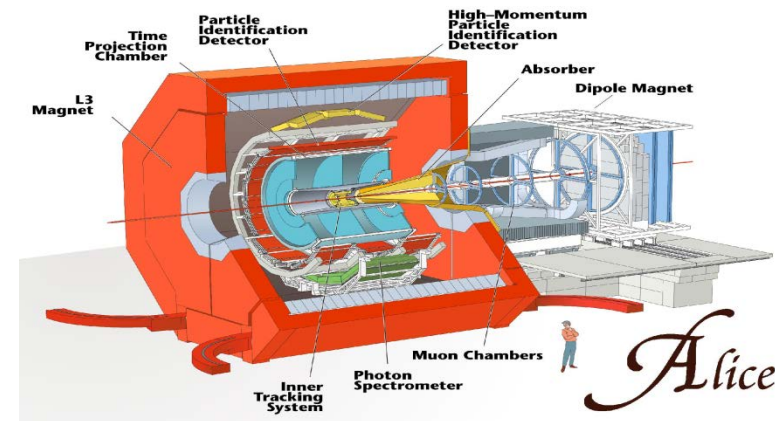
ATLAS

CMS

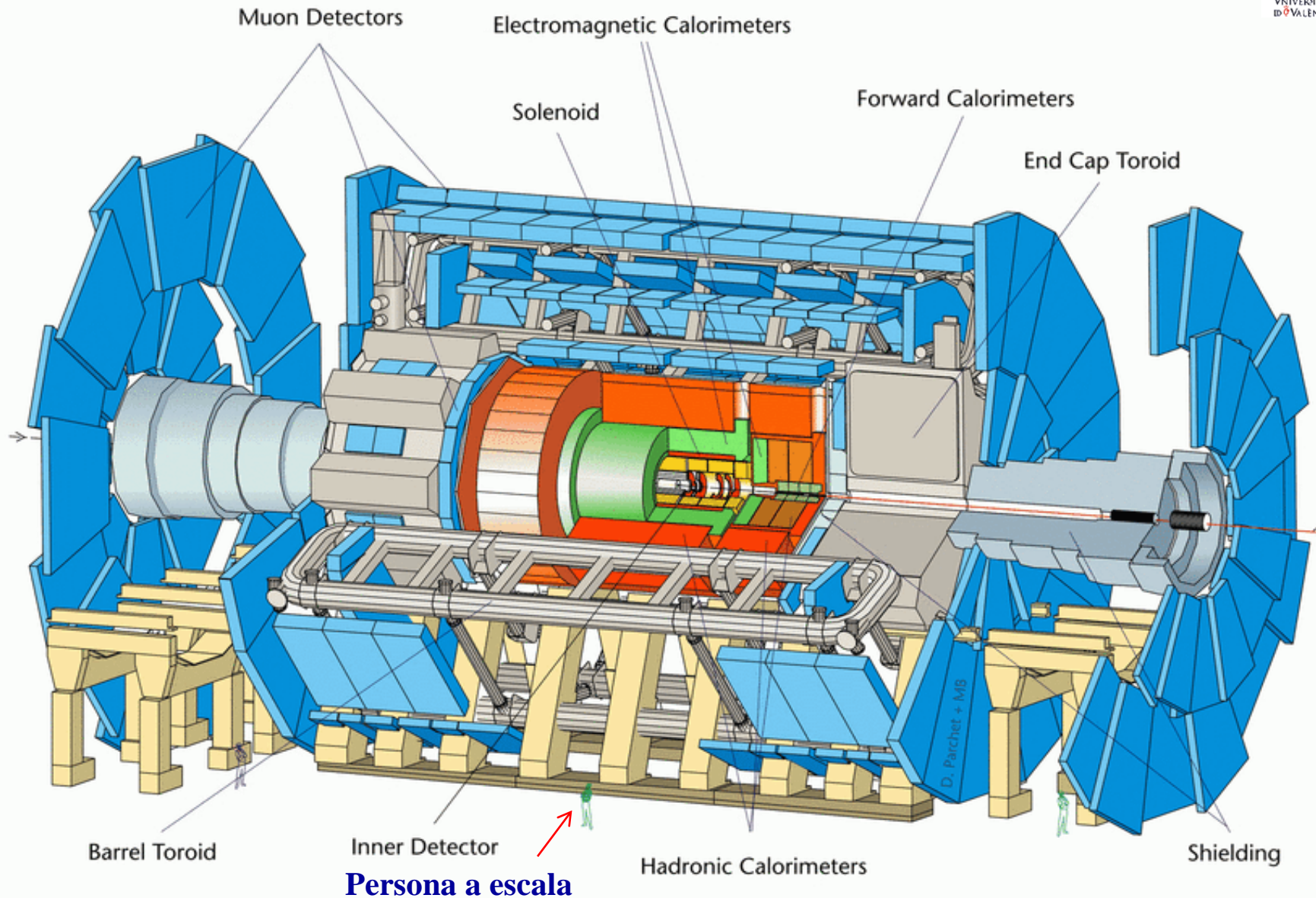
A Compact Solenoidal Detector for LHC



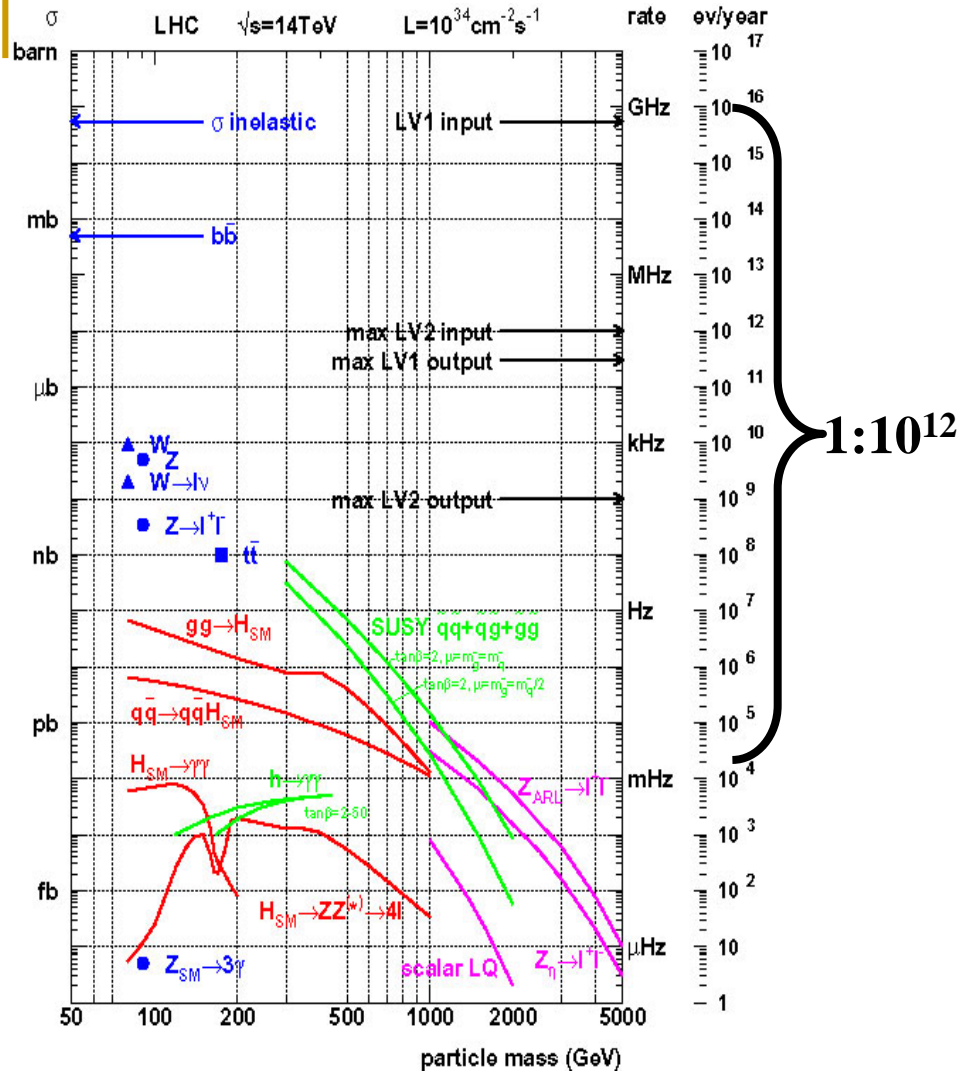
ALICE



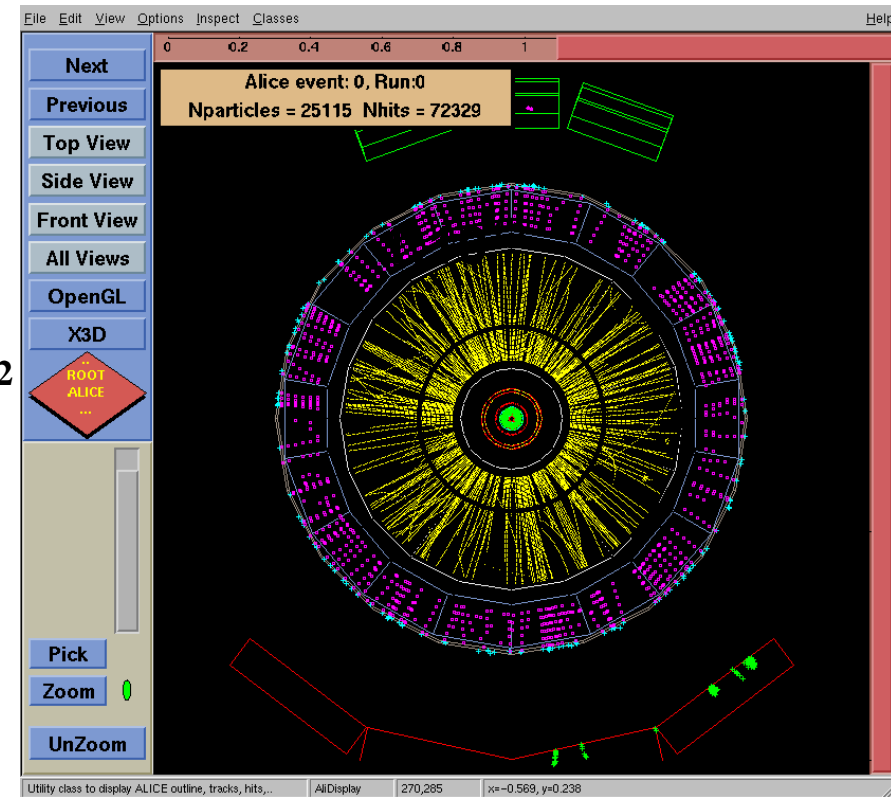
Un detector del LHC (CERN): Detector ATLAS



Adquisició de dades



$1:10^{12}$ successos interessants

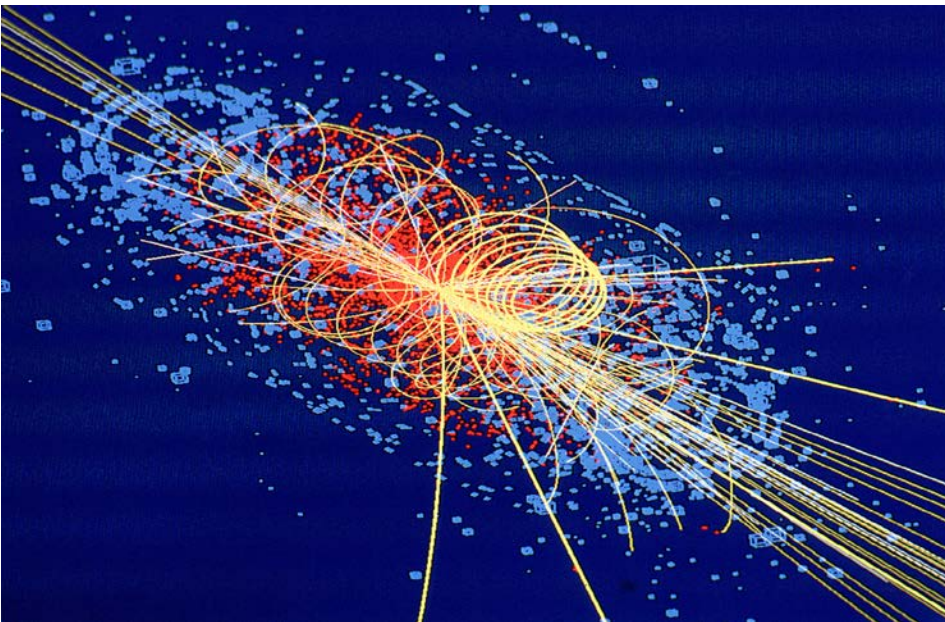


$\approx 2 \cdot 10^2 - 5 \cdot 10^4$ partícules

$\approx 10^1$ partícules interessants

(Alta radiació 100 Gy)

Anàlisi de dades



40 MHz (1000 TB/sec)

Level 1 - Special Hardware

75 KHz (75 GB/sec)

Level 2 - Embedded Processors

5 KHz (5 GB/sec)

Level 3 - Farm of commodity CPUs

100 Hz (100 MB/sec)

100 MB/sec ~ 2 Petabytes/year

El GRID: per a processar totes les dades que són registrades en el LHC es necessita una xarxa mundial de més de 200000 PC's

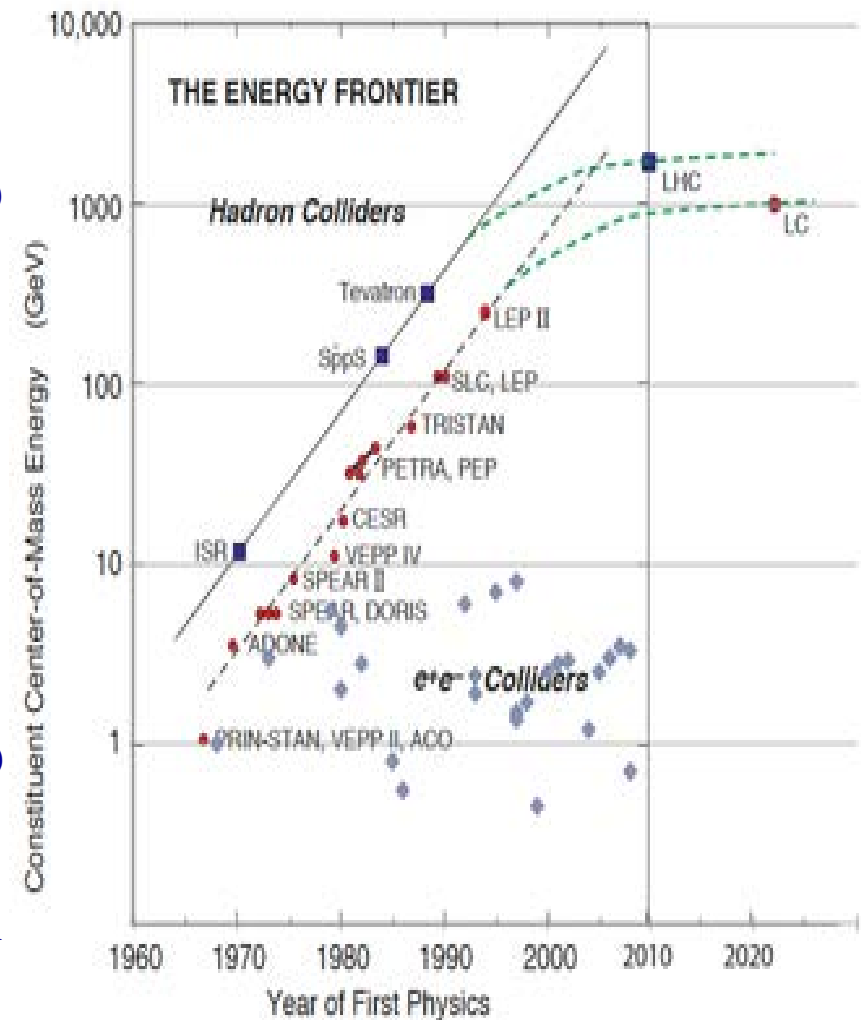
2. Acceleradors de partícules

- Són dispositius per a incrementar l'energia cinètica de partícules carregades estables (e^- , p , ions) per a després fer-les xocar contra blancs o altres feixos.
- Permeten produir feixos secundaris d'altres partícules (e^+ , μ , p , K , π)
 - Els feixos secundaris estables (e^- , e^+ , p , \bar{p}) poden 'ser emmagatzemats' en anells d'emmagatzemament (incloent-hi els muons).
- Elements d'un accelerador:
 - **La font de ions** (protons, etc.) o electrons a accelerar.
 - **La cambra de buit** per la qual circulen les partícules. El buit és necessari per a evitar la col·lisió amb els àtoms presents.
 - **Dispositiu de guiat i de focalització**, utilitzant **camps magnètics**, que mantenen les partícules en la proximitat de la trajectòria de referència (o trajectòria ideal de disseny de l'accelerador).
 - **Sistema d'acceleració**, consistent d'un camp elèctric, per a augmentar l'energia de les partícules i eventualment compensar les pèrdues d'energia per emissió de la radiació electromagnètica (brems).
 - **Dispositius de mesura i correcció** per a determinar la intensitat, posició i dimensions del feix, i eventualment corregir-les automàticament.
 - **Blancs interns i sistemes d'extracció** per a la producció de feixos secundaris.



Classificació i evolució

- Acceleradors electroestàtics (tensió contínua):
 - Cockcroft-Walton (1931, fins a 2 MeV)
 - Van de Graaff (1932, fins a 10 MeV)
 - Tàndem Van de Graaff (1951, fins a 20 MeV)
- Acceleradors de ressonància:
 - Lineals (LINACs)
 - De protons (fins a 800 MeV)
 - D'electrons (100 MeV-50 GeV)
 - Ciclotró clàssic (protons fins a 25 MeV)
- Acceleradors síncrons:
 - Betatró (electrons fins a 300 MeV)
 - Ciclotró isòcron (protons fins a 800 MeV)
 - Sincrociclotró (protons fins a 750 MeV)
 - Sincrotró de protons (protons fins a 900 GeV)
 - Sincrotró d'electrons (electrons des de 50 MeV fins a 100 GeV)
- Col·lisionadors i anells d'emmagatzemament (són del tipus de sincrotrons).



Carta de Livingston

Aplicacions dels acceleradors

- Basades en la possibilitat d'enviar els feixos amb direccions ben definides sobre blancs específics i la producció de feixos molt prims de llum (radiació) de sincrotró.
- Producció de noves partícules i desenvolupament de la física d'altres energies.



**Cosmotron (1952-1960)
Brookhaven, NY**

El primer accelerador que va produir grans descobriments científics.



**LEP (1989-1999) y LHC (2007-)
CERN, Ginebra**

L'instrument més gran mai construït per l'home, i un dels seus majors reptes tecnològics.

- Bombardeig de blancs utilitzats per a obtenir nous materials amb propietats químiques, físiques i mecàniques diferents.
- La llum de sincrotró s'utilitza en espectroscòpia, difracció de raigs X, microscòpia de raigs X, cristal·lografia de proteïnes.
- Indústria de productes aeronàutics, espacials, mèdics, farmacològics, producció d'acer, químics, cotxes, petroli,...
- En medicina, els feixos produïts pels acceleradors són utilitzats en tomografia per emissió de positrons (PET), tractament de tumors, cirurgia...
- Infinitat d'altres aplicacions industrials (esterilització, fabricació de xips, detecció i inspecció de materials, generació d'energia, cremat de residus radioactius...) i anàlisi de precisió (com la datació per carboni-14, etc.).

Conceptes bàsics

- Energia total W d'una partícula relativista:

$$W = \gamma m_0 c^2$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Factor relativista o de Lorentz

Para $v \ll c$:

Límit no relativista

$$W = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2$$

Energia (massa) en repòs

Energia cinètica clàssica

Energia cinètica relativista: $T = m_0 c^2 (\gamma - 1)$

- Moment: $p = m_0 \gamma v$
- Connexió entre energia i moment:

$$W^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 = (T + m_0 c^2)^2 = (\gamma m_0 c^2)^2$$

Per a partícules ultrarelativistes: $W \approx pc$

- Unitats: $1 \text{ eV} = 1.6021 \times 10^{-19} \text{ J}$ $W(\text{eV}) = \gamma m_0 c^2 / e$ (e = càrrega de l'electró)

- Energies en repòs:

Electró:	$W_0 = m_0 c^2 = 0.511 \text{ MeV}$
Protó:	$W_0 = m_0 c^2 = 938 \text{ MeV}$

- Equació de moviment i **força de Lorentz**: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}]$
- Acceleració (guany d'energia) en la direcció d'un camp elèctric constant: ($\vec{B} = 0$)
sòls es poden accelerar partícules carregades mitjançant camps elèctrics:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} \quad W^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \Rightarrow \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{p}c^2}{W} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \longrightarrow \quad \frac{dW}{dt} = q \frac{c^2}{W} \vec{p} \cdot \vec{E}$$

- Energia constant i moviment en espiral de la partícula al voltant d'un camp magnètic constant ($\vec{E} = 0$)

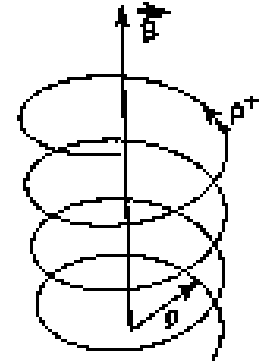
$$\frac{m_0 \gamma v^2}{\rho} = qvB \Rightarrow$$

Radi

$$\rho = \left| \frac{p}{qB} \right|$$

Velocitat angular (freqüència)

$$\omega = \frac{v}{\rho} = \frac{qBc^2}{W}$$



Els camps magnètics serveixen per a corbar, focalitzar, concentrar els feixos de partícules, però no per a accelerar-les

La freqüència de revolució varia amb l'energia W : problema de pèrdua de sincronia quan augmenta W

Força centrípeta

Paràmetres dels acceleradors

- **Intensitat**: flux o corrent de les partícules que circulen. El més habitual és que aquest flux siga 'polsat' (tots excepte els electroestàtics, el ciclotró clàssic i l'isòcron).
 - Flux instantani: nombre de partícules presents en cada pols.
 - Corrent mitjà: càrrega accelerada per unitat de temps (μA , mA).
- **Factor d'utilització**: fracció de temps durant el qual es disposa de partícules accelerades a l'energia nominal de l'accelerador:
 - 10-20% (acceleradors de protons) \Rightarrow $\sim 0.1\%$ per a acceleradors lineals d'electrons.

Acceleradors electroestàtics

- Columna (o tub) d'acceleració pressuritzada (fins a ~10 atm) plena d'un gas aïllant (per ex. hexafluorur de sofre), per a permetre aconseguir alts gradients de voltatge (~2 MV/m).
- En un extrem està la font, en l'altre el blanc, amb una tensió contínua que produeix el camp elèctric responsable de l'acceleració.
- Poden accelerar qualsevol tipus de partícula carregada, produint un feix continu **de reduïda dispersió energètica** (~0.5 keV).
- La màxima energia està limitada pels problemes d'aïllament (corrents de fuga en els elèctrodes) i la tensió de ruptura (~20 MV). L'energia que s'abasta és: $\frac{1}{2}m_0v^2 = qV$
- Tres tipus, depenent del procediment per a aconseguir l'alta tensió:

- **Cockroft-Walton (1931)**

- **Van de Graaff (1932)**

Utilitza una corretja sense fi aïllant (goma) que circula entre dues corrioles.

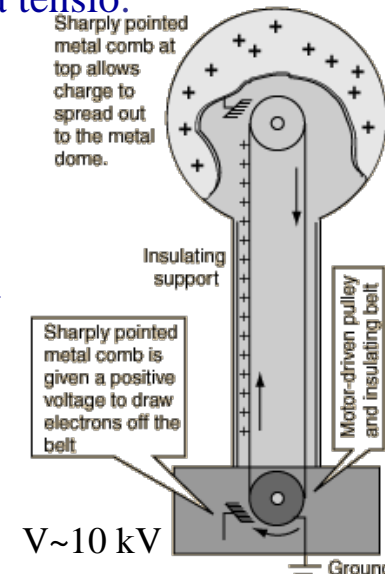
La corriola inferior està connectada a terra, i la corriola superior en l'interior d'un elèctrode metàl·lic.

La càrrega i descàrrega de la corretja es fa per efecte punta (corona).

Aconsegueixen ~10 MeV i unes desenes de mA.

Quasi no s'usen pels seus nombrosos problemes tècnics.

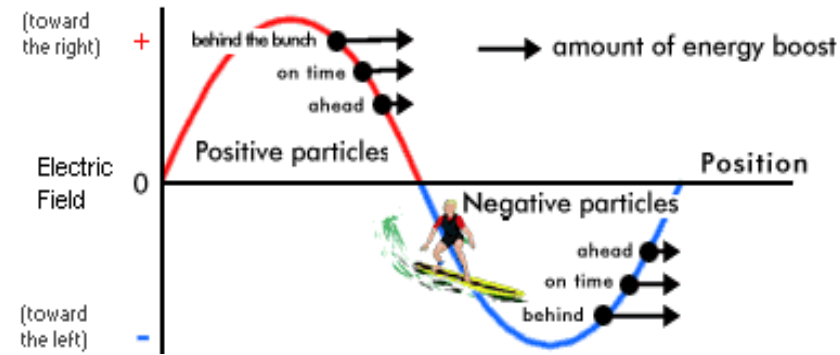
- **Tàndem Van de Graaff (Álvarez, 1951).** Constituït per dues columnes d'acceleració però un únic elèctrode.



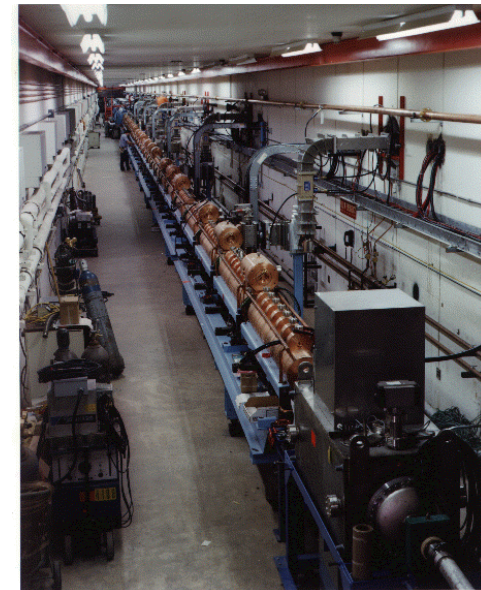
LINACs

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi, \quad \vec{F} = q\vec{E}, \quad W = qV$$

- Principi proposat per Widerö (1929): La partícula de referència es desplaça en línia recta dins d'un camp elèctric d'alta freqüència f .
- Requereix 'protegir' la partícula del camp quan aquest és 'des-accelerator', la qual cosa dona lloc a distints tipus d'estructures depenent de si es tracta d'ions pesats, protons o electrons.
- Avantatges:
 - Com en els acceleradors electroestàtics, s'evita la necessitat d'introduir camps magnètics per a corbar i quasi no existeixen pèrdues per radiació electromagnètica.
 - La injecció i extracció de feixos és senzilla.
- Inconvenients:
 - La partícula només travessa una vegada l'estructura acceleradora, per la qual cosa per a aconseguir alta energia es requereix:
 - ❖ Elevada potència instantània d'alta freqüència.
 - ❖ Llarga distància (moltes estructures).
 - Factor d'utilització reduït (de vegades ~0.1%)
- Molt utilitzats en l'actualitat tant en indústria com investigació (en aquest últim cas moltes vegades com a injector).

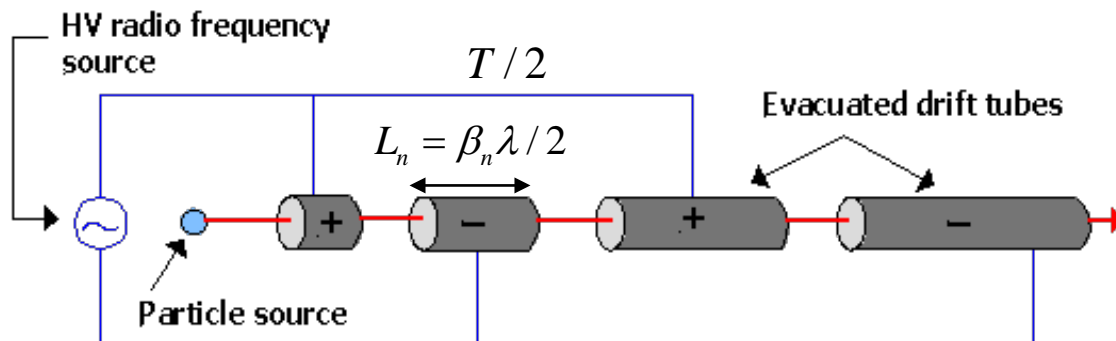


Linac de protons (Fermilab)



LINACs d'ions pesats i protons

- Cambra de buit que conté una sèrie de tubs de deriva (tubs metàl·lics cilíndrics) connectats a terminals oposades d'una font d'alta freqüència $f=1/T=c/\lambda$ (constants f i λ).
- La freqüència s'ajusta de manera que els ions/protons troben el camp elèctric en fase acceleradora quan arriben a la separació entre els tubs de deriva.
- Dins del tub (apantallador) el camp elèctric és nul \Rightarrow velocitat constant dins de cada tub.
- La longitud dels tubs ha d'augmentar per a mantenir constant el temps de deriva:
 - Per a molt altes velocitats, la longitud dels tubs \sim constant.



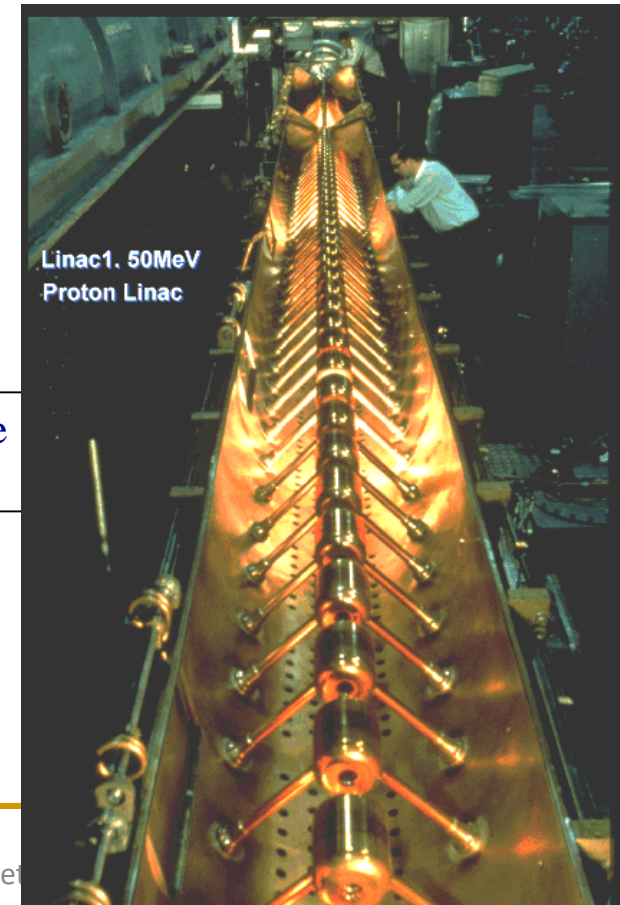
Linear Accelerator

V és el potencial efectiu sobre la partícula isòcrons o ideal.

$$\frac{1}{2}mv_n^2 = neV \Rightarrow v_n = \sqrt{2neV/m}$$

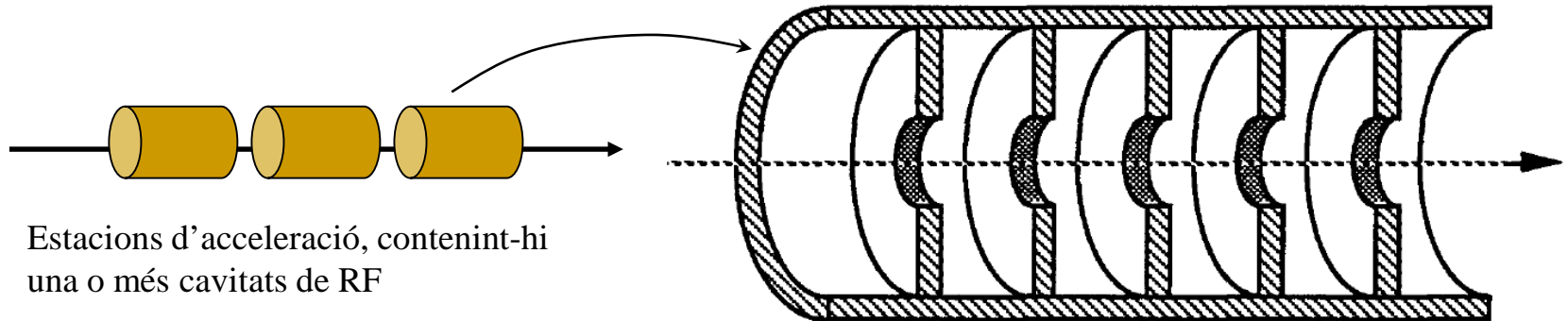
$$L_n = v_n \frac{T}{2} = v_n \frac{\lambda}{2c} = \beta_n \lambda / 2 \propto \sqrt{n}$$

La longitud dels tubs de deriva L_n va incrementant-se com a \sqrt{n} al llarg de l'accelerador.



LINACs d'electrons

- Els electrons són altament relativistes a molt baixa energia ($0.98c$ per a 2 MeV).
- En aquest cas l'estructura de tubs de deriva és substituïda per una **guia d'ones** (amb diafragmes o iris equidistants, per a assegurar que la velocitat de fase $\approx c$) en la qual s'estableix una ona estacionària (cavitat ressonant) amb el camp elèctric alineat en la direcció del moviment.



Estacions d'acceleració, contenint-hi una o més cavitats de RF

- L'electró és literalment transportat per l'ona progressiva:
 - Acceleració contínua sobre l'ona progressiva.
 - L'ona inversa té efecte mitjà nul sobre l'energia.
 - La injecció ha de realitzar-se sobre la cresta de l'ona progressiva i amb energia relativista ($\sim 2 \text{ MeV}$).
- Radiofreqüències $\sim 3 \text{ GHz}$
- $10\text{-}15 \text{ MeV/m}$ (en comparació a $1\text{-}2 \text{ MeV/m}$ de l'estructura Álvarez -ions i protons-).



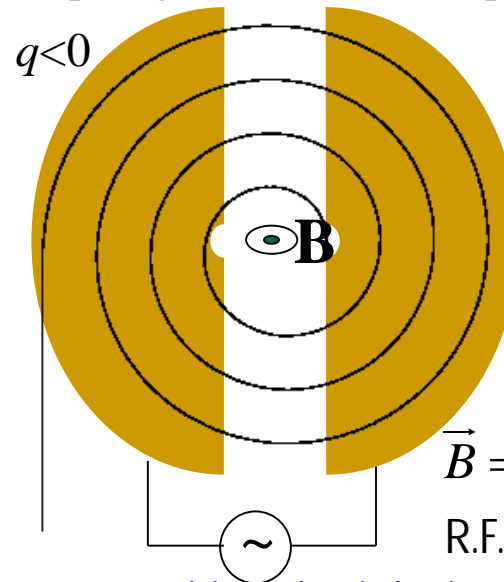
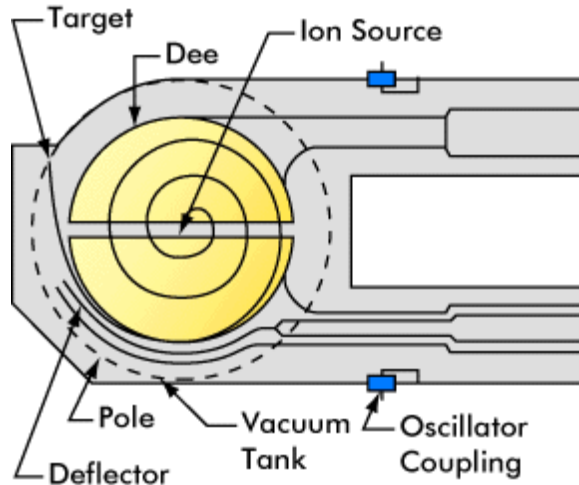
Linac d'electrons (SLAC), fins a 50 GeV



Ciclotró

Condicció de ressonància

- Lawrence i Livingston (1931).
- Consisteix de dos cambres metàl·liques buides amb forma de D: les seues parts planes estan obertes i lleugerament separades (la separació rep el nom de 'gap').
- Cada D es connecta a un pol d'una font de corrent alterna de freqüència $f \Rightarrow$ existeix un camp elèctric en el 'gap' però el camp és nul en l'interior de cada D (efecte caixa de Faraday).
- La font es col·loca en el centre, i tot el conjunt es col·loca en una cambra de buit.
- El conjunt, al seu torn, es col·loca en un camp magnètic B constant i perpendicular a les D's.



$$\omega = \frac{qBc^2}{W}$$

$$f = n\omega$$

($\omega/2\pi = 15.25$ MHz por Tesla, protons amb $\gamma=1$)

$$\rho = \left| \frac{p}{qB} \right|$$

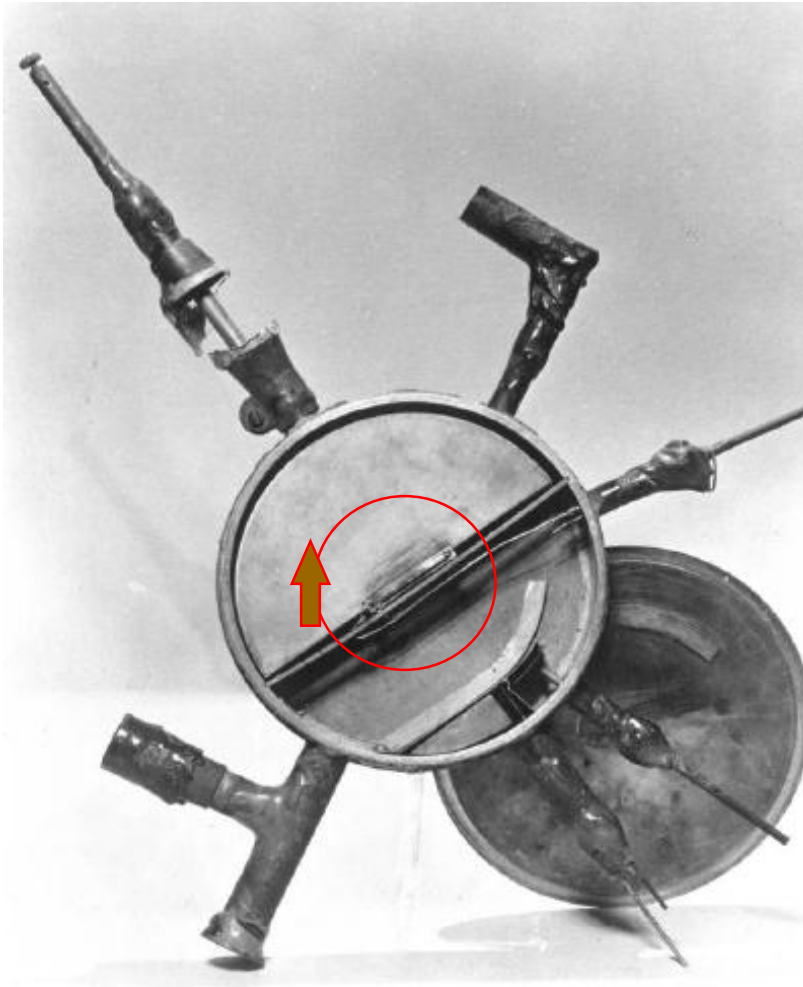
$$\vec{B} = B_0 \vec{j} \text{ (upwards)}$$

R.F. electric field $f \sim \text{MHz}$

- La freqüència f d'acceleració de la font és constant, i la trajectòria és en espiral.
- Per al sincronisme f ha de ser tal que les partícules s'acceleren quan arriben al 'gap':
 \Rightarrow Requereix $W \approx \text{constant}$ ($\gamma \approx 1$) (fins a 30 MeV per a protons).
 \Rightarrow ús per a ions pesats, protons, α , etc. $\rightarrow T \ll W$

$$f = n\omega$$

El primer ciclotró, desenvolupat per E. Lawrence i el seu estudiant M. S. Livingston:



1931, H_2^+ , 1.0 MeV



1932, protons, 1.2 MeV

Ciclotró isòcron i Sincrociclotró

- A majors energies \Rightarrow efectes relativistes $\Rightarrow \omega$ ja no és constant.

\Rightarrow Es perd el sincronisme: $f \neq n\omega$

\Rightarrow Ja no es produeix més acceleració de les partícules

- Pot recuperar-se el sincronisme **variant el camp magnètic $B \Rightarrow$ Ciclotró isòcron** (Thomas, 1938; Lawrence, 1950).

$$f = n\omega$$

$$\omega = \frac{qBc^2}{W} \quad \rho = \left| \frac{p}{qB} \right|$$

$$B_{\max} = \frac{W}{W_0} B_{\min} = \frac{W_0 + T}{W_0} B_{\min}$$

Protó de 900 MeV

$$T \approx W_0 \approx 900 \text{ MeV} \Rightarrow B_{\max} \approx 2B_{\min}$$

- La variació del camp magnètic ha de ser local, i depèn:
 - Del radi ρ , per a assegurar el sincronisme en funció de l'energia (òrbita de referència).
 - De l'angle azimutal, per a assegurar l'estabilitat de les oscil·lacions transversals (camp elèctric induït per la RF, Llei de Faraday).
- Feixos continus (sincronisme per a qualsevol W).
- **Variant la freqüència f d'acceleració \Rightarrow Sincrociclotró**

$$f_{\min} = \frac{W_0}{W} f_{\max} = \frac{W_0}{W_0 + T} f_{\max}$$

Protó de 900 MeV

$$T \approx W_0 \approx 900 \text{ MeV} \Rightarrow f_{\max} \approx 2f_{\min}$$

- Feixos polsats (sincronisme per a una energia dada).
- Inconvenient: electroimants sòlids més i més grans a mesura que augmenta l'energia, la qual cosa en la pràctica limita l'energia màxima abastable (fins a $\sim 1 \text{ GeV}$).

Lawrence & coll., Berkeley, 1946



Sincrotró

- Basat en el principi de **modulació de la freqüència** però a més el **camp magnètic es varia** amb el temps per a mantenir el radi de gir constant:
 - Incrementant l'energia W (i per tant p) i B simultàniament és possible mantenir el radi de l'òrbita constant (òrbita tancada) i accelerar els feixos.
 - El camp magnètic ha d'augmentar linealment amb el moment

$$\rho = \left| \frac{p}{qB} \right|$$

$$p(\text{GeV}/c) = 0.29979 B[\text{T}] \rho[\text{m}] \quad (\text{per unitat de càrrega})$$

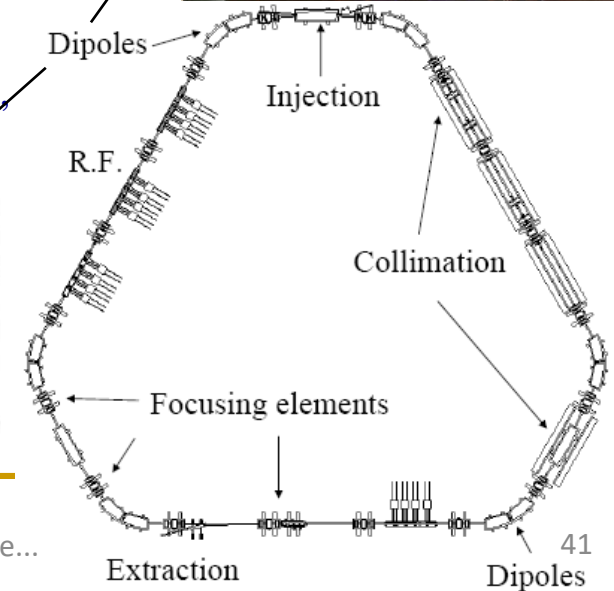
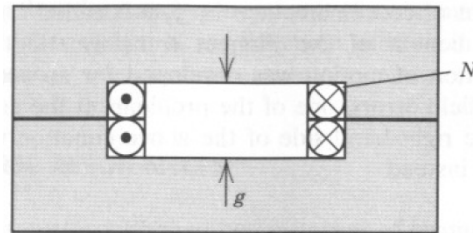
Limitacions dels camps magnètics \Rightarrow altes energies només abastables amb grans radis:

Exemple: LHC (pp , $E = 7 \text{ TeV}$)
 $B = 10 \text{ T}$, $\rho = 3.1$ ($R = 4,24$) km

- En els sincrotrons el camp magnètic corbador està produït per un sistema de dipols en forma d'arc tancat (òrbita tancada):
 - Aquests dipols estan muntats en les regions corbes.
 - En les regions rectes està situat l'equipament de focalització, acceleració, injecció, extracció, àrees experimentals, bombes de buit.

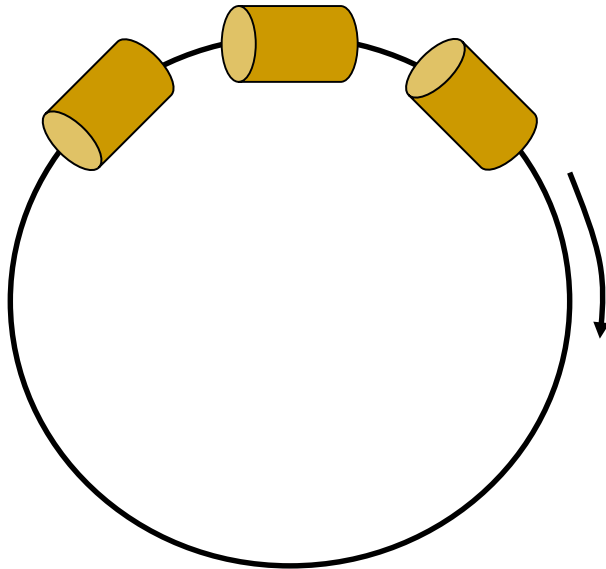


Exemple: SPS (CERN)
 $R = 1100 \text{ m}$, $\rho = 225 \text{ m}$
 744 imants (6.26 m, angle de curvatura 0.48°)



- L'acceleració es realitza introduint una o més estacions d'acceleració en les seccions rectes, que produeixen un camp elèctric amb un potencial oscil·lant.

$$\text{cilindres} \equiv V_0 \sin[2\pi\omega_{rf}t] = V_0 \sin[\phi(t)]$$



$$T = \frac{L}{v}$$

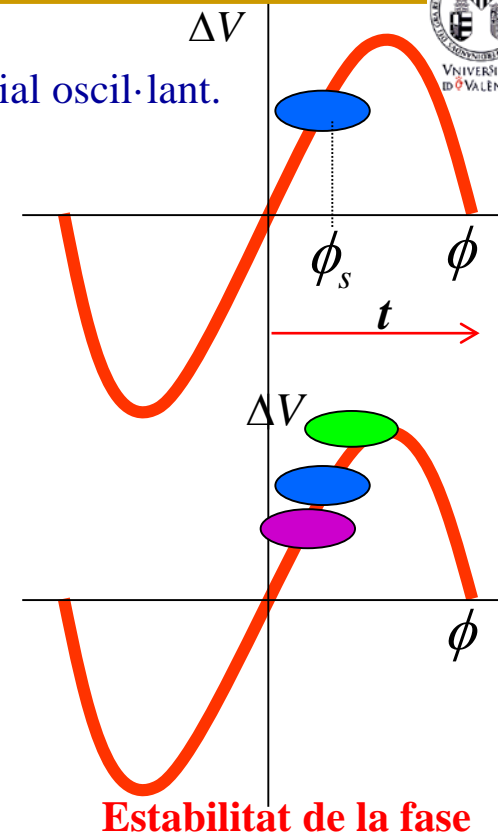
Velocitat de la partícula
Període de revolució

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} = \frac{v}{L}$$

Freqüència de revolució variable

$$\omega_{rf} = n\omega = n \frac{2\pi v}{L}$$

n : número d'harmònic



- El pas de la *partícula síncrona* per cada estació té lloc quan la fase de RF verifica:

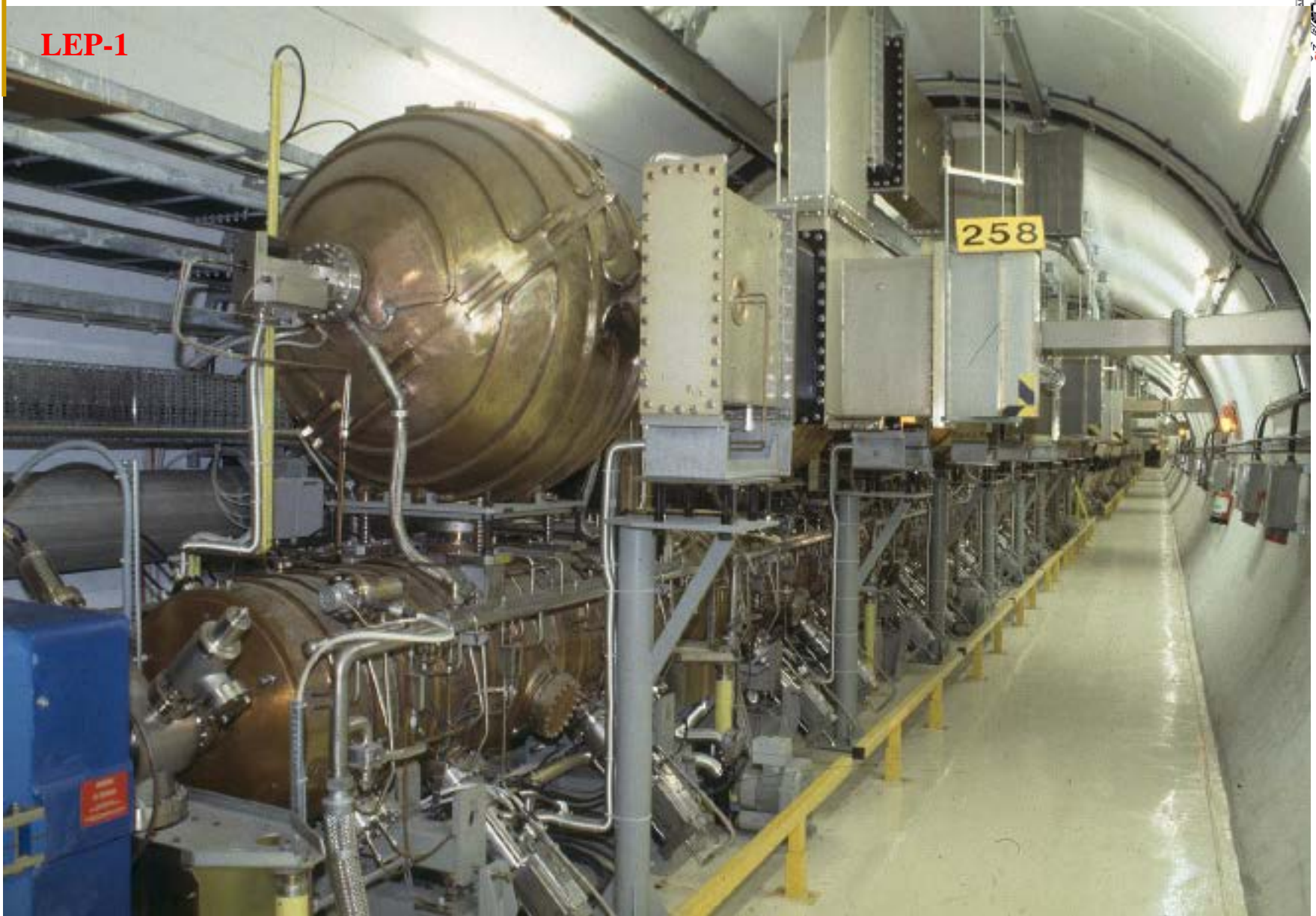
$$\Delta W_s = qV_0 \sin \phi_s > 0 \quad \phi_s: \text{fase de la partícula síncrona} \quad \Delta W > \Delta W_s \Rightarrow \text{arriba abans} \Rightarrow \phi < \phi_s \Rightarrow \Delta W \rightarrow \Delta W_s$$

(es defineix en la fase de disseny) $\Delta W < \Delta W_s \Rightarrow \text{arriba tard} \Rightarrow \phi > \phi_s \Rightarrow \Delta W \rightarrow \Delta W_s$

- L'increment d'energia ha de ser el corresponent a l'increment de camp magnètic en els dipols de la següent secció corba:

Rigidesa magnètica de l'accelerador: $B\rho = p/q$

LEP-1

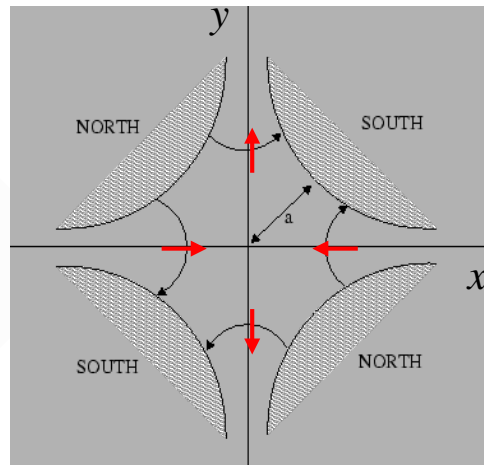


Focalització

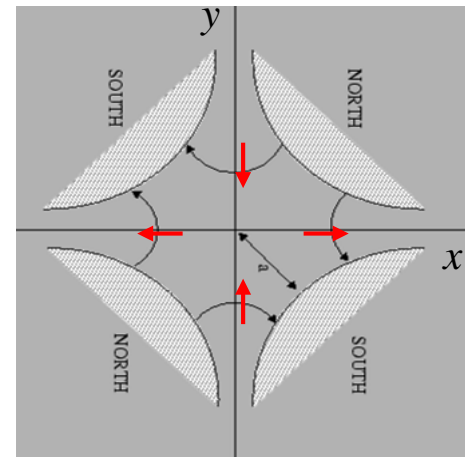
- A causa de la precisió limitada de construcció i alineament dels elements de l'accelerador i a la dificultat de realitzar una injecció perfecta (energia i instant), les partícules injectades no queden perfectament col·locades en l'òrbita de referència, la qual cosa produeix:
 - Oscil·lacions longitudinals (anomenades oscil·lacions de sincrotró). Estabilitat de la fase
 - Oscil·lacions transversals (anomenades de betatró): (oscil·lacions verticals i radials).
- Inclús amb tot això perfecte, hi hauria derives radials a causa del camp magnètic vertical induït per la RF (Llei d'Ampère).
- Principi del **Gradient Alternant (AG) o de focalització forta** (E.D. Courant, M.S. Livingston, H.S. Snyder, 1952).
 - Seqüència de camps quadripolars: els quadripols focalitzen horitzontalment, però desfocalitzen verticalment (o viceversa) Focalització \geq Des-focalització
 - Les forces que generen són proporcionals al desplaçament des de l'eix central.



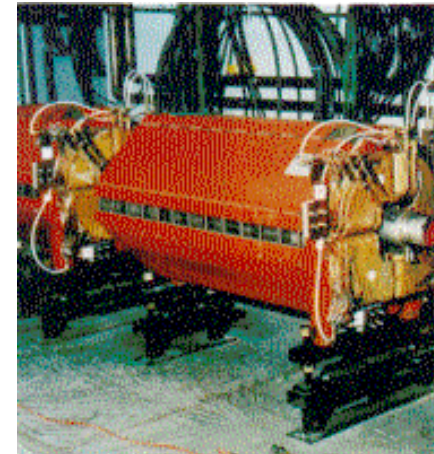
Retícula 'FODO'

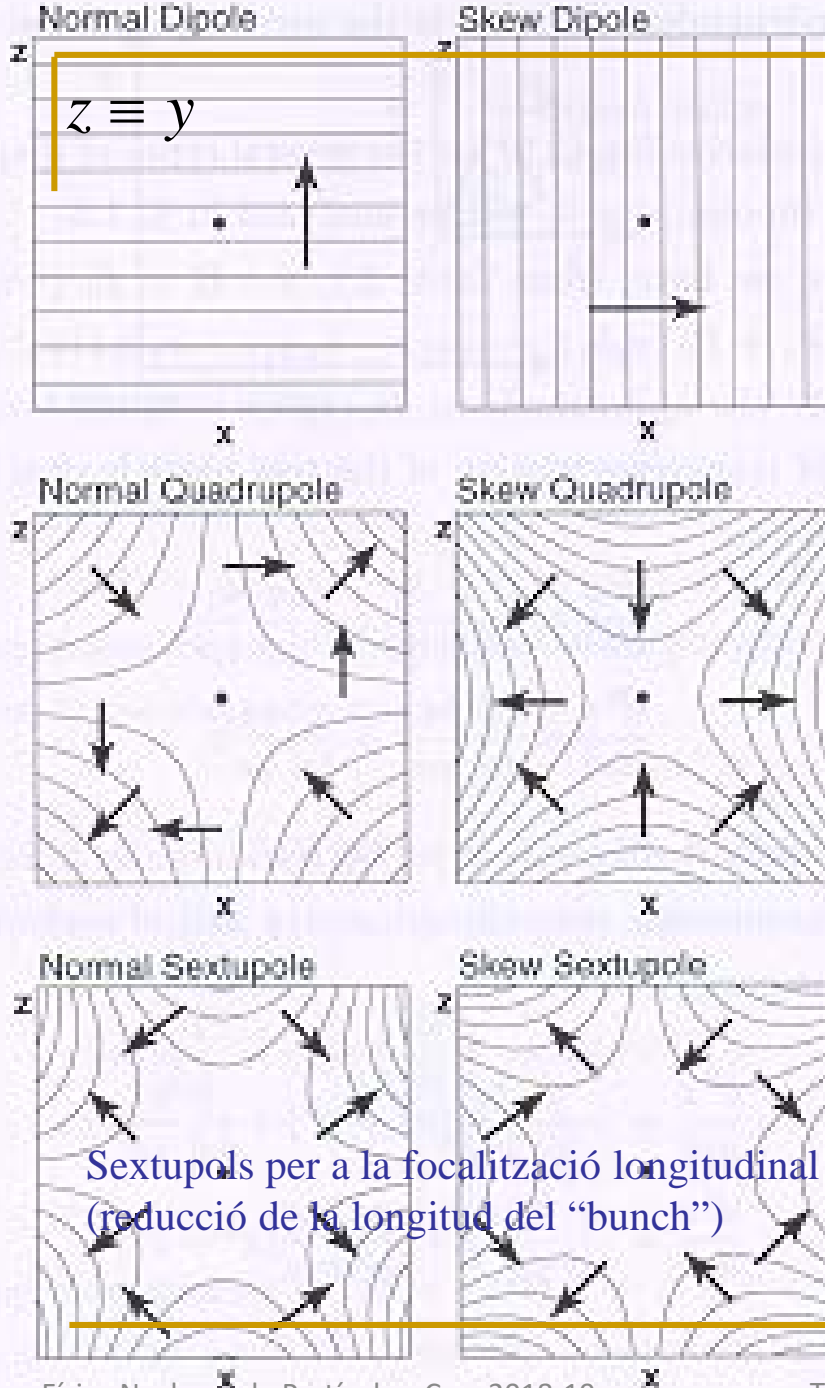


Quadripol normal
(tipus "F", "Focusing")



Quadripol 'skew'
(tipus "D", "Defocusing")





LEP (CERN)

Dipols

Quadripols



SPS (CERN)

Radiació de sincrotró

- Les partícules carregades emeten radiació electromagnètica quan són accelerades (o frenades)
⇒ es produeix emissió quan travessen dipols magnètics de curvatura (acceleració centrípeta).

- Després d'una volta, l'energia total perduda per radiació de sincrotró és:

$$\Delta E [\text{GeV}] = \frac{6.034 \times 10^{-18}}{\rho [\text{m}]} \left(\frac{E [\text{GeV}]}{m_0 [\text{GeV} / c^2]} \right)^4$$

- Com que m_p (protó) / m_e (electró) = 1836, per al mateix radi i energia: $\Delta E_e : \Delta E_p \approx 10^{13}$
- Per tant, en màquines d'electrons hi ha una dependència de la pèrdua molt forta amb l'energia.
- Les pèrdues han de ser compensades introduint cavitats de RF addicionals.
- El límit tecnològic de la màxima energia ΔE_{max} que una cavitat pot subministrar determina la màxima energia E_{max} que l'accelerador d'electrons pot obtenir:

$$E_{\text{max}} [\text{GeV}] \cong 10 \left(\rho [\text{m}] \Delta E_{\text{max}} \right)^{1/4}$$

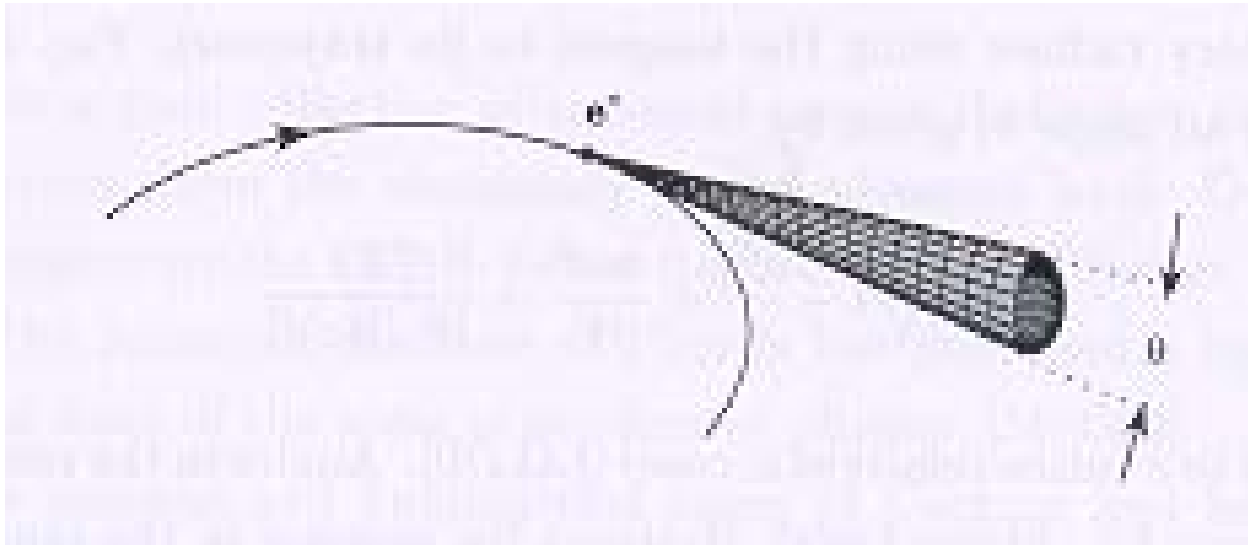
- A altes energies, val més tenir un accelerador més gran per a la mateixa potència de RF
- Exemple: LEP
 - Electrons de $E=50 \text{ GeV}$, $\rho = 3.1 \text{ km}$, circumferència 27 km
 - Pèrdua d'energia per volta = 0.18 GeV per partícula.
 - Per a aconseguir el doble d'energia amb les mateixes cavitats es requeriria un accelerador 16 vegades major.

Exercici

- La radiació de sincrotró s'emet en la direcció tangencial a la trajectòria i forma un con de llum d'angle:

$$\theta \approx \frac{1}{\gamma} = \frac{511}{E[\text{keV}]} \quad \text{Per a velocitats } \approx c$$

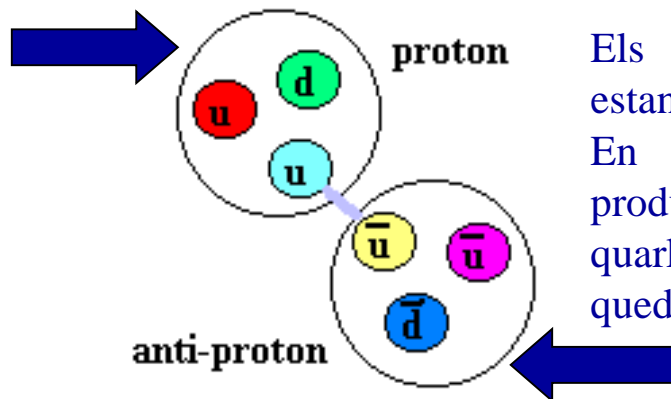
- Per a electrons en el rang 90 MeV - 1 GeV, θ està en el rang $10^{-4} - 10^{-5}$ graus.
- Feixos amb tal grau de col·limació poden ser dirigits amb alta precisió a un blanc →
 - Infinitat d'aplicacions industrials i d'investigació:



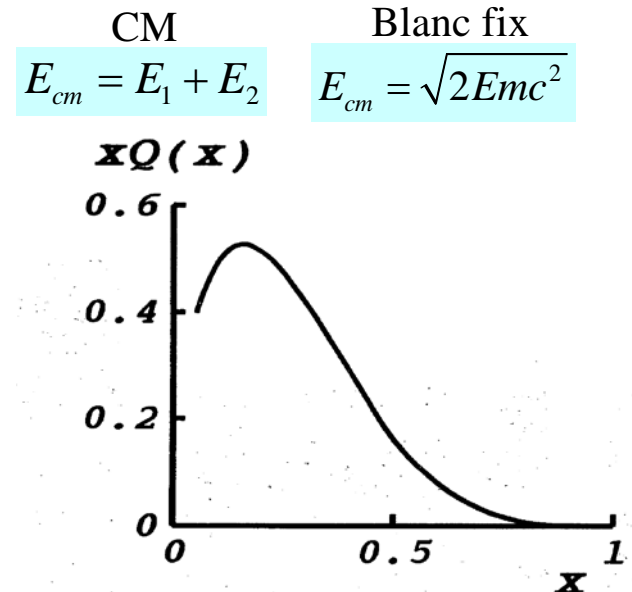
- Un dels grans avantatges dels LINACs d'electrons enfront dels sincrotrons és que no hi ha pèrdues per radiació de sincrotró.

Tipus de sincrotrons

- Dos tipus de sincrotrons:
 - **Anells d'emmagatzemament:**
 - Acumulen partícules i es guarden durant llargs períodes.
 - Usats per a produir feixos d'alta intensitat per a injectar en altres acceleradors de major potència o factories de radiació de sincrotró.
 - **Col·lisionadors:**
 - Els feixos circulen en direccions oposades per a trobar-se en un o més punts (punts de col·lisió).
 - Permeten maximitzar l'energia en centre de masses:
 - Si les partícules accelerades són fonamentals (per ex. electrons i positrons) tota l'energia en centre de masses està disponible.
 - Si no ho són, només una part està disponible.
- Exemple: els col·lisionadors pp:



Els protons (antiprotons) estan compostos per quarks. En les col·lisions pp es produiran col·lisions qq . Els quarks que no col·lideixen queden com a 'espectadors'.



Les funcions d'estructura del protó donen la probabilitat que un dels seus quarks (o gluons) s'emporti una fracció x del moment del protó.

Lluminositat

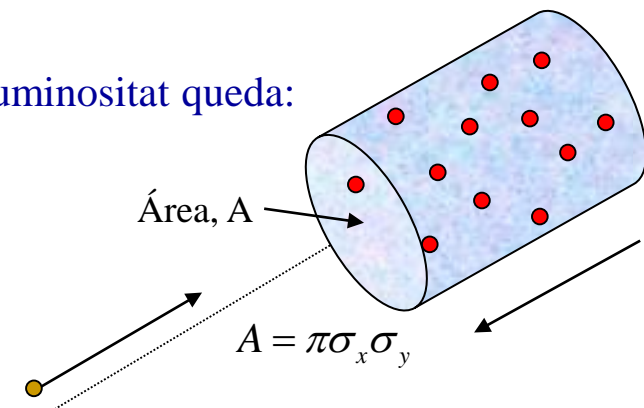
- La lluminositat és una magnitud “geomètrica” que mesura la capacitat dels feixos per a col·lidir.
- Les seues unitats són nombre de partícules per unitat d'àrea i temps (unitats de flux).
Valors típics: $L \sim 10^{30}-10^{31} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$
LEP-1 (e^+e^- , 100 GeV): $L \sim 10^{31} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ PEP-II/KEK-B (e^+e^- , 10.6 GeV): $L \sim 10^{34} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$
Tevatró ($p\bar{p}$, 1.8 TeV): $L \sim 10^{31} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ LHC (pp , 14 TeV): $L \sim 10^{34} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$
- És un dels paràmetres fonamentals de tot col·lisionador, ja que determina la taxa d'interacció per unitat de secció eficaç:

$$\frac{dN}{dt} = L \times \sigma \Rightarrow N = \sigma \int L dt = \sigma L_{\text{int}}$$

- L_{int} és la **lluminositat integrada**, que serveix per a mesurar la quantitat total d'esdeveniments produïts $\Rightarrow L$ és coneguda també com a **lluminositat instantània**
- Model:
 - Suposem dos 'bunches' d'àrea A contenint n_1 i n_2 partícules:
 - Qualsevol partícula de n_1 té una probabilitat d'interacció $\sigma n_2/A$ amb l'altre *bunch*.
 - El nombre total d'interaccions serà per tant $n_1 n_2 \sigma / A$
 - La taxa d'interaccions és $v n_b n_1 n_2 \sigma / A$, amb la qual cosa la lluminositat queda:

$$L = v n_b \frac{n_1 n_2}{A}$$

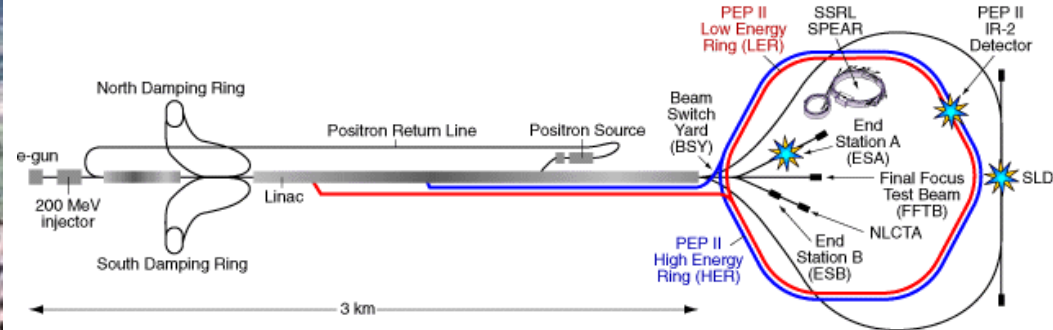
v : freqüència de revolució ($\omega = 2\pi\nu$)
 n_b : nombre de “bunches” per feix



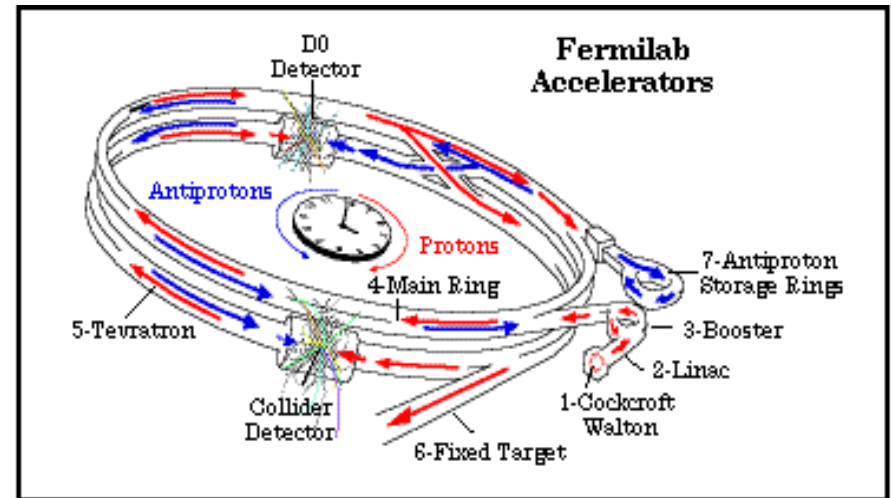
Si el bunch fóra gaussià: $A = 4\pi\sigma_x\sigma_y$

Les majors instal·lacions del món

PEP-II (1998-2008, SLAC, Stanford, EUA). Col·lisionador electró-positró de 10.6 GeV.

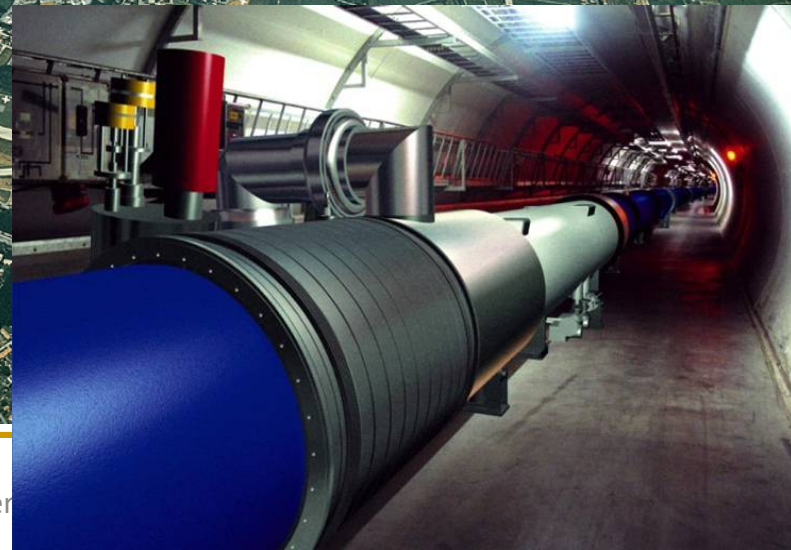
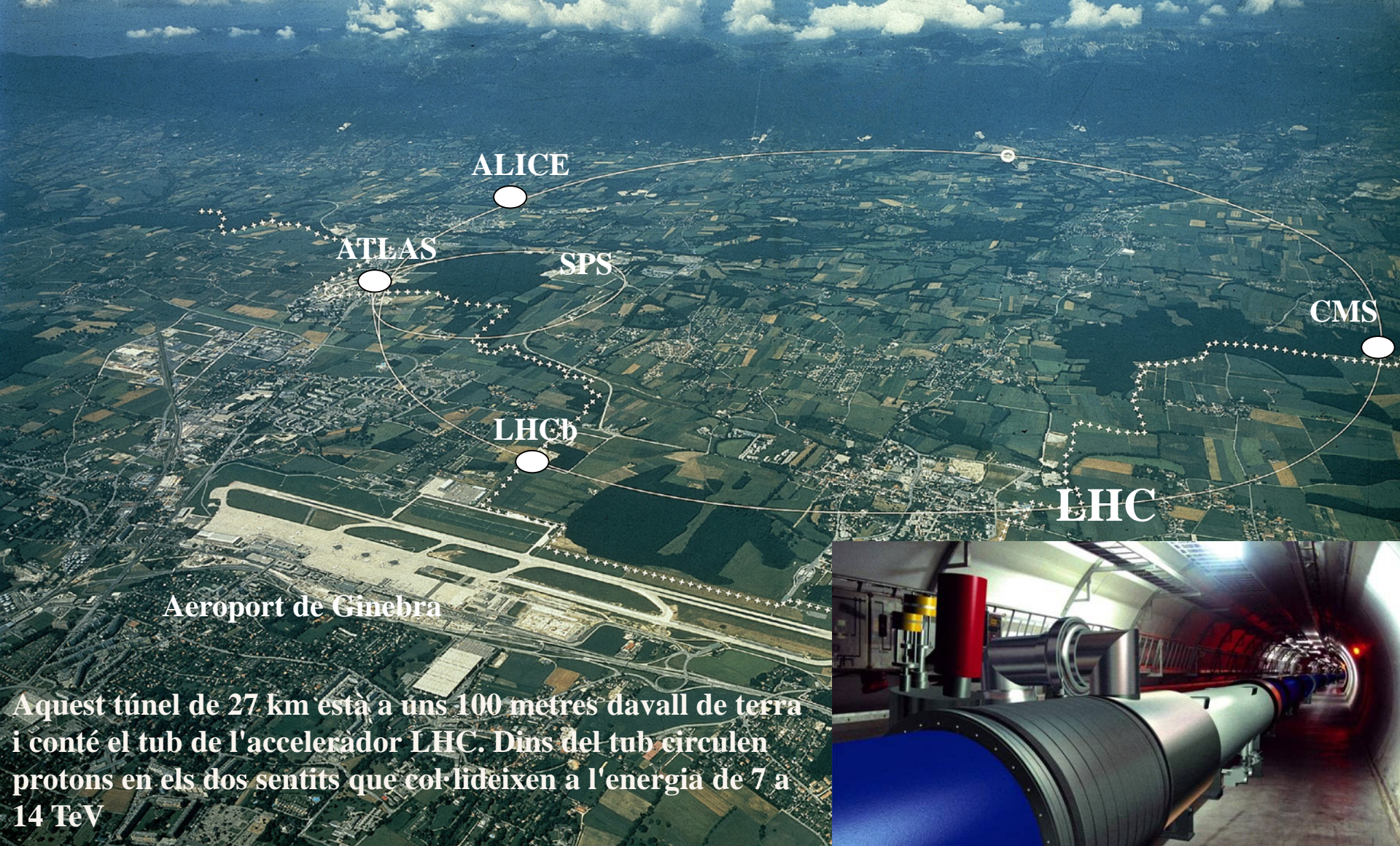


Tevatró (1980-2009, Fermilab, Batavia, EUA). Col·lisionador protó-antiprotó de 1.4 TeV.



LEP (1989-1999, CERN). Col·lisionador electró-positró entre 90 i 200 GeV

LHC (2008-, CERN). Col·lisionador protó-protó de 14 TeV



Tema 3 EXTRA:

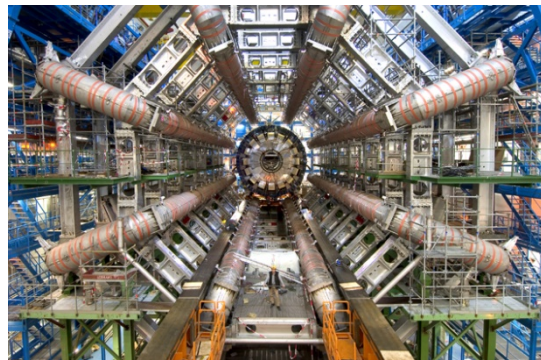
Sistemes experimentals: detectors i acceleradors

Col·lisionador LHC al CERN

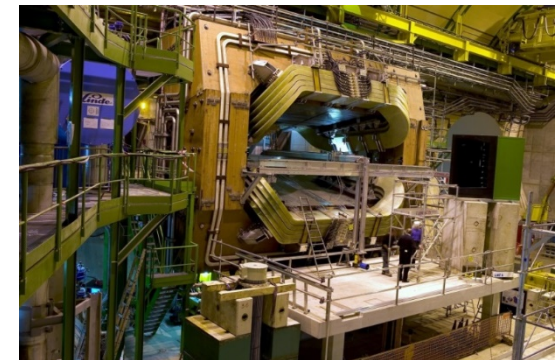


El LHC en grans xifres
Dipols magnètics del LHC
Focalització i retícula FODO del LHC
Sistema de RF del LHC

Detector ATLAS al LHC



Detector LHCb al LHC



El LHC en grans xifres

Paràmetres (protons)

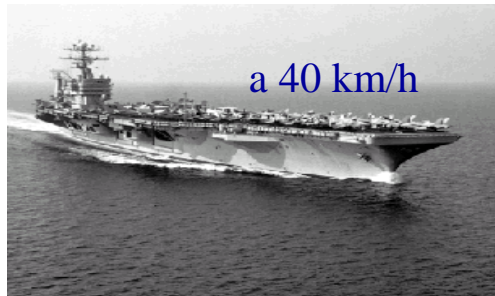
- Energia: **7 TeV**
- Camp magnètic (dipols) per a 7 TeV: **8.3 T**
- **3×10^{14} protons / feix** (agrupats en 3000 bunches)
- Corrent: 0.56 A
- Luminositat: $10^{34} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$

Energia emmagatzemada

Energia en els dos feixos: 0.7 GJ

Energia en els imants: 10.4 GJ

Total:
11 GJ



a 40 km/h



50 tones a 600 km/h

Imants superconductors. Criogenia

12 milions de litres de nitrogen líquid es vaporitzen durant el refredament inicial de 31000 tones de material i posteriorment 700000 litres d'heli líquid seran necessaris per a mantenir-lo per sota de 2 K.

El sistema criogènic total del LHC (imants refredats a 1.9 K, heli superfluid; RF refredada a 4.5 K, heli líquid; sistemes magnètics dels detectors) requereix 5000 tones d'heli líquid, equivalent a la producció mundial d'heli anual.



L'anell de 27 km de distribució criogènica

En el cas de “*quench*” (apagada) l'energia s'ha d'extraure de manera controlada per a evitar danys.

Més informació: http://lhc-closer.es/taking_a_closer_look_at_lhc/1.home

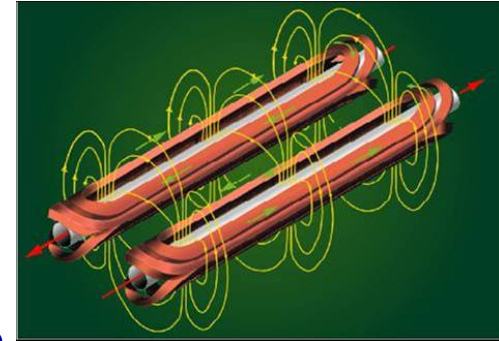
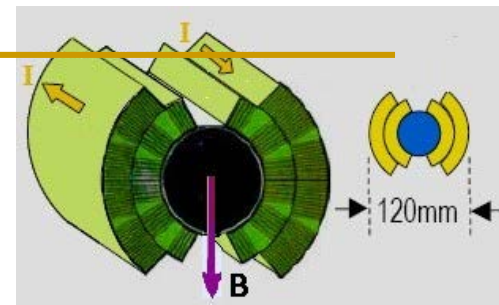
Dipols magnètics del LHC

- Corrents superconductors que circulen en cada costat del tub del feix. El cablejat està disposat en capes dobles individuals al voltant de cada tub, que circula en sentits oposats a cada costat.
- Els camps induïts en la bobina es poden calcular per mitjà de la llei de Biot-Savart. La distància mitjana dels cables (color coure) al centre del tub és de ~ 45 mm:

$$B = \mu_0 I / (2\pi d), \text{ amb } I = 11800 \text{ A i } r = 45 \text{ mm} \Rightarrow B = 0.05 \text{ T}$$
- Per $B = 8,33 \text{ T} \Rightarrow 8,33 / 0,05 \sim 160$ cables superconductors.
- 80 cables col·locats en dues capes van en paral·lel a l'eix del tub a un costat del tub i cap enrere en l'altre costat.
- Els cables contenen un manoll de 36 brins superconductors, cada bri amb exactament $\phi = 0.825$ mm.
- Cada bri conté 6500 filaments superconductors de niobi-titani.
- Cada dipol té 15 m de llarg. La longitud total superconductora en els 1232 dipols (2 tubs per dipol) és:

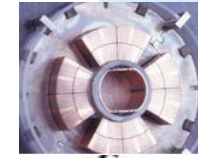
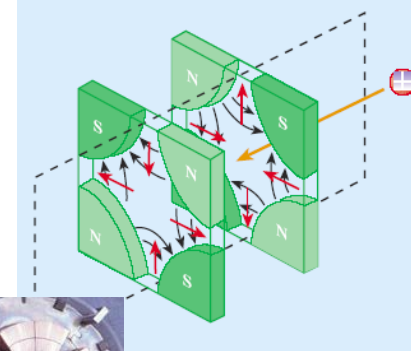
$$L = 2 \times 1232 \times 160 \times 36 \times 6500 \times 15 = 1.38 \times 10^{12} \text{ m } (\times 9 \text{ distància Terra-Sol})$$

- Inductància dipol. Bobina cilíndrica (14,3 m de llarg i 9 cm d'ample de mitjana) amb 80 voltes i un camp magnètic perpendicular de 8,33 T. El flux magnètic al llarg de la superfície és: $\varphi = NBS = 80 \times 8.33 \times (14.3 \times 0.09) \approx 1000 \text{ Wb}$
- Energia emmagatzemada. Com que $\varphi = LI \Rightarrow L = 1000 / 11800 \approx 0,1 \text{ H}$, tenim $E_d = \frac{1}{2} LI^2 \approx 7 \text{ MJ}$
- Tenint 1232 dipols, $E_T \approx 9 \text{ GJ}$, prou per a fondre completament 45 tones d'or de 25°C .
- Considerant un 10% adicional de cablejat per la resta de multipols i els sistemes magnètics dels detectors, $E_T \approx 10.4 \text{ GJ}$.

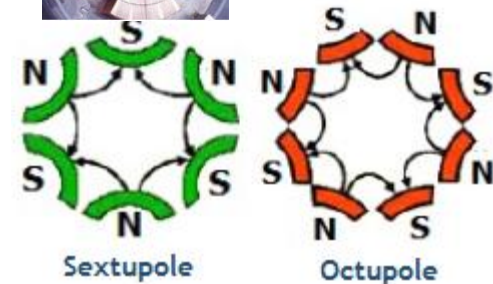


Focalització i retícula FODO del LHC

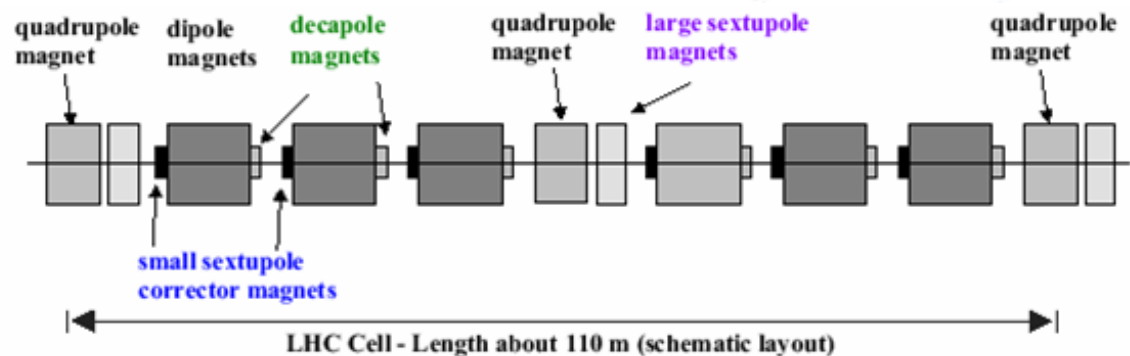
- La focalització del feix mitjançant quadripols magnètics permet mantenir la seua amplada i alçada dintre de la cambra de buit (tub).
- Els quadripols sempre treballen per parelles en els arcs de la màquina, QF i QD, ú focalitzant l'ample del feix i l'altre l'alçada, respectivament.
- La focalització dels quadripols fa que els protons oscil·len transversalment al voltant de l'òrbita de referència (centre del tub). S'anomena Q ó 'tune' al nombre d'oscil·lacions/volta.
- Hi ha un total de 858 imants quadripolars.



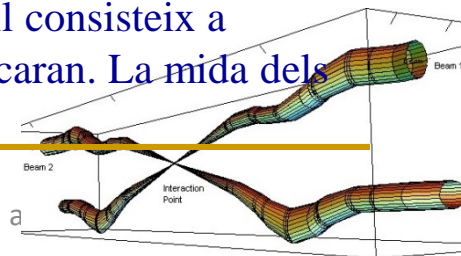
- Els protons tenen una energia lleugerament diferent i segueixen un camí lleugerament diferent. Així que es necessiten diferents 'tunes'. El canvi d'enfocament amb l'energia el fan els imants sextupolars.



- Altres multipols magnètics actuen per ajudar en la focalització del feix i contrarestar altres interaccions (gravitacionals sobre els protons, electromagnètiques entre 'bunches', núvols d'electrons en la paret del tub, etc.).



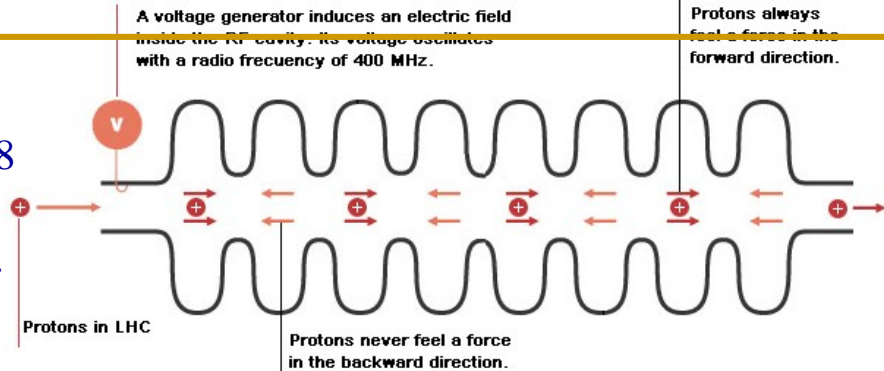
- Hi ha, a més, vuit jocs dels anomenats imants "triplet intern". El seu treball consisteix a enfocar els feixos de partícules en les quatre àrees en què les partícules xocaran. La mida dels 'bunches' passa de 0.2 mm a ~16 micròmetres en els punts d'interacció.





Sistema de RF del LHC

- El seu paper principal és mantenir els 2808 ‘bunches’ de protons estretament agrupats per a maximitzar el nombre de col·lisions.
- També aporten la potència de RF durant l'acceleració a l'energia màxima.
- Cavitats superconductores amb petites pèrdues d'energia (radiació de sincrotró) i amb capacitat per a emmagatzemar gran quantitat d'energia.
- Vuit cavitats per feix, cadascuna lliurant 2 MV (gradient d'acceleració de 5 MV/m) a 400 MHz. Les cavitats funcionen a 4.5 K (els imants de l'LHC fan servir heli superfluid a 1,9 K).
- Les cavitats s'agrupen de quatre en quatre (criomòduls), amb dos criomòduls per feix instal·lats en una secció recta llarga on s'incrementarà la distància entre els feixos des de 195 mm a 420 mm.
- Cada protó que passa a través de les cavitats es veu afectat per $2 \times 8 = 16$ MV \Rightarrow rep una energia extra de 16 MeV/volta.
- Cada protó fa aproximadament 11245 voltes per segon \Rightarrow l'energia total rebuda per segon és $(16 \text{ MeV/volta}) \times (11245 \text{ voltes/s}) = 1.8 \times 10^5 \text{ MeV/s} = 0.18 \text{ TeV/s}$. Cada protó entra al LHC amb 0.45 TeV (SPS, injector) \Rightarrow l'energia que les cavitats han de proporcionar és de $7 - 0.45 = 6.55 \text{ TeV} \Rightarrow$ el temps requerit per a accelerar el feix a l'energia total és de $6.55/0.18 = 36,4 \text{ s}$. El resultat correcte és d'uns 20 minuts. La principal raó d'aquesta diferència és que els protons no estan completament afectats per la tensió total de la cavitat. Més important és mantenir els ‘bunches’ compactes per a maximitzar les col·lisions.



$$f = n\omega = n \frac{v_p}{L_{\text{LHC}}} \Rightarrow n = f \frac{L_{\text{LHC}}}{v_p} \approx 400 \times 10^6 \text{ s}^{-1} \times \frac{27 \times 10^3 \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}} = 36000$$

LHC



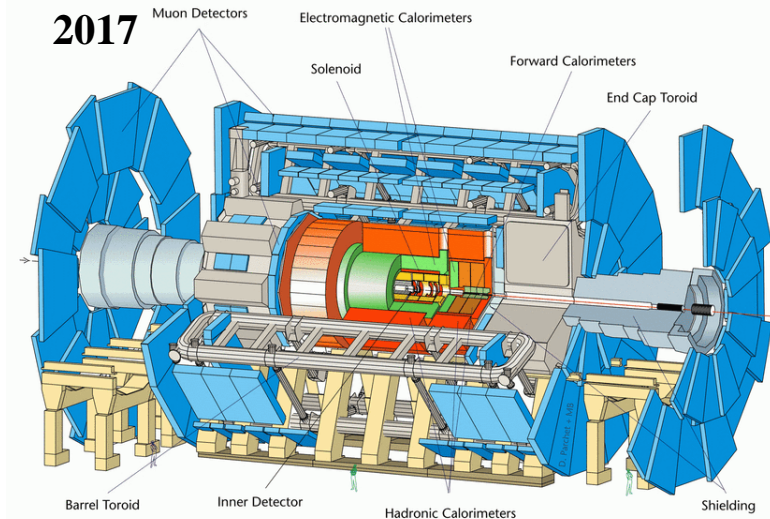
Tema 4: Partícules i simetries

1. Observació i classificació de les partícules. Fites històriques

- 1.1 El positró i el muó
- 1.2 El pió i el kaó
- 1.3 Partícules “estranyes” i la “jungla” de partícules
- 1.4 El model quark
- 1.5 La partícula Ω^-
- 1.6 Prova experimental de l'estructura dels nucleons
- 1.7 La revolució de “novembre” i les seues conseqüències
- 1.8 El neutrí: proves directes
- 1.9 Les tres famílies de quarks i leptons
- 1.10 Oscil·lacions de neutrins
- 1.11 Famílies de leptons i quarks
- 1.12 Hadrons: barions i mesons
- 1.13 Hadrons excitats: ressonàncies, fórmula de Breit-Wigner
- 1.14 Hadrons exòtics. Pentaquarks
- 1.15 Resum de constituents fonamentals

2. El paper de les simetries

- 2.1 Equacions d'Euler-Lagrange en Mecànica Clàssica
- 2.2 Connexió simetria i llei de conservació en MQ
- 2.3 Observació de trencaments de simetria
- 2.4 Lleis de conservació universals i no universals

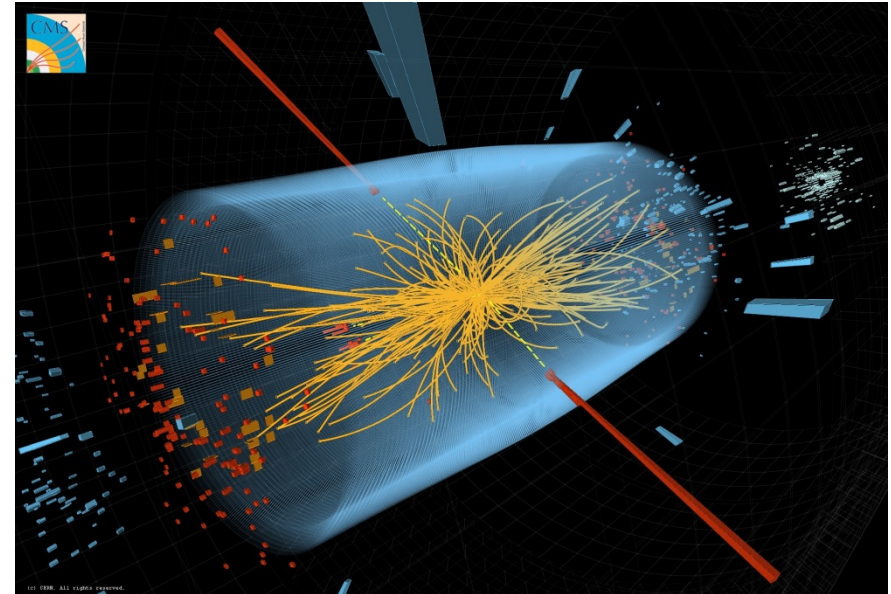


Tema 4:

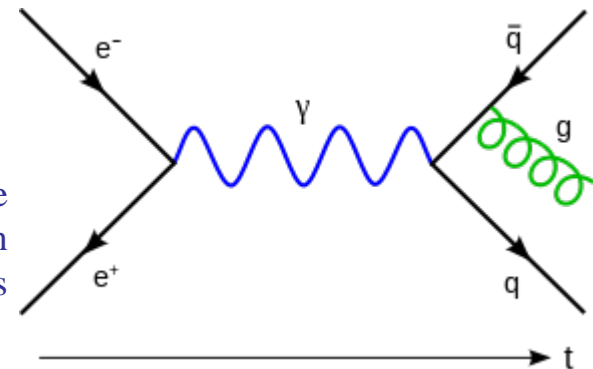
Partícules i simetries (cont)

3. Simetries

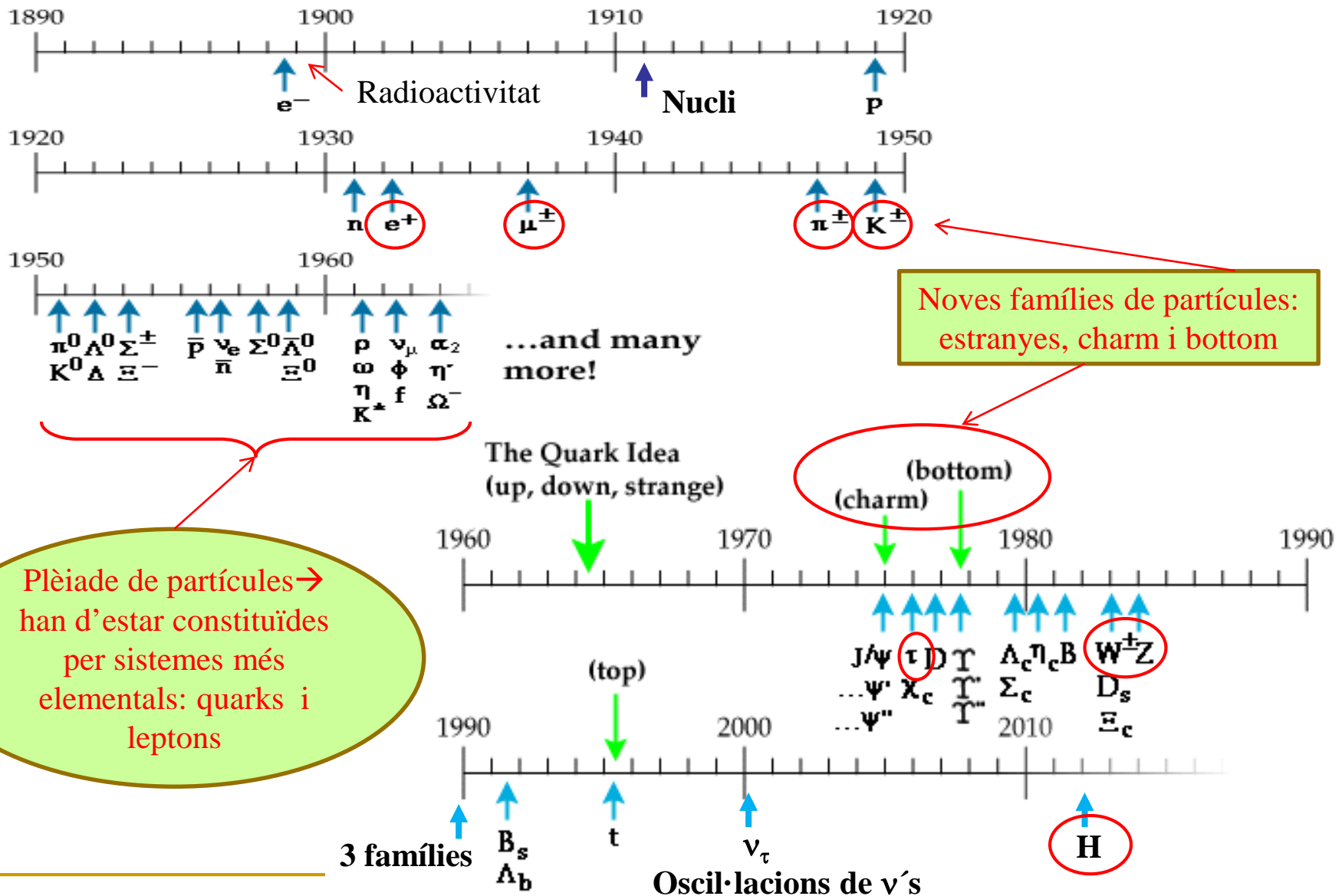
- 3.1 Translacions espacials
- 3.2 Translacions temporals
- 3.3 Rotacions, grup $R(3)$
- 3.4 Grups de Lie
- 3.5 Número leptònic i bariònic
- 3.6 Simetries de sabor: $SU(2)$ isospín
- 3.7 El grup $SU(2)$
- 3.8 Conseqüències de la conservació de l'isospín
- 3.9 Simetries de sabor: l'estranyesa
- 3.10 Altres números quàntics de sabor
- 3.11 Simetries discretes: paritat P
- 3.12 Trencament de P
- 3.13 Simetries discretes: conjugació de càrrega C
- 3.14 Simetria de CP
- 3.15 Trencament de CP i asimetria matèria-antimatèria
- 3.16 Inversió temporal T i el teorema CPT



Els experiments de partícules que s'han desenrotllat després de l'experiment de dispersió de Rutherford i fins als nostres dies, ens han permès construir una teoria dels constituents bàsics i de com estos interaccionen entre ells a la natura, conegut com Model Estàndard.

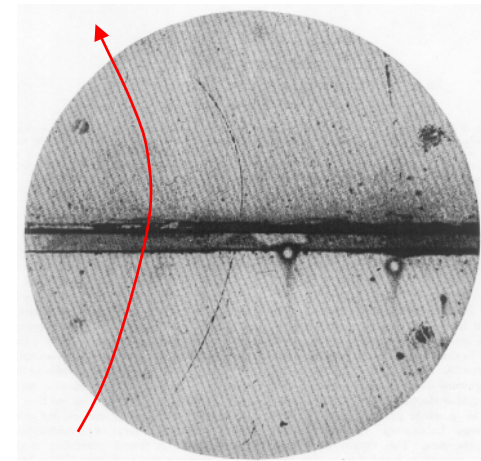


1. Observació i classificació de partícules. Fites històriques



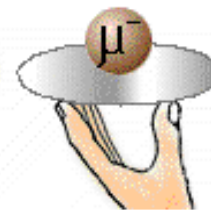
El positró i el muó

- **1928-1931.** Paul Dirac completa la versió relativista de la Mecànica Quàntica, iniciada per Klein-Gordon. Es troben **solucions d'energia negativa** que suposen inicialment un problema. Dirac ho interpreta com un 'buit' (electró de càrrega positiva) en un mar d'electrons.
- **1932.** El positró és descobert per Carl Anderson en els rajos còsmics usant una **cambra de boira**: descobriment de l'antimatèria: interpretació correcta de les solucions de Dirac.



- **1937.** S. Nedermeyer i C. Anderson descobreixen en rajos còsmics partícules penetrants amb la mateixa càrrega que l'electró i massa compresa entre l'electró i el protó (**cambra de boira**).
 - Es desintegra via β (per tant interacció dèbil, amb emissió de neutrinos): $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$
 - Es tracta de la primera partícula fonamental de la **segona generació** (dels denominats **leptons**), i obri el problema de les generacions (encara hui no completament resolt)

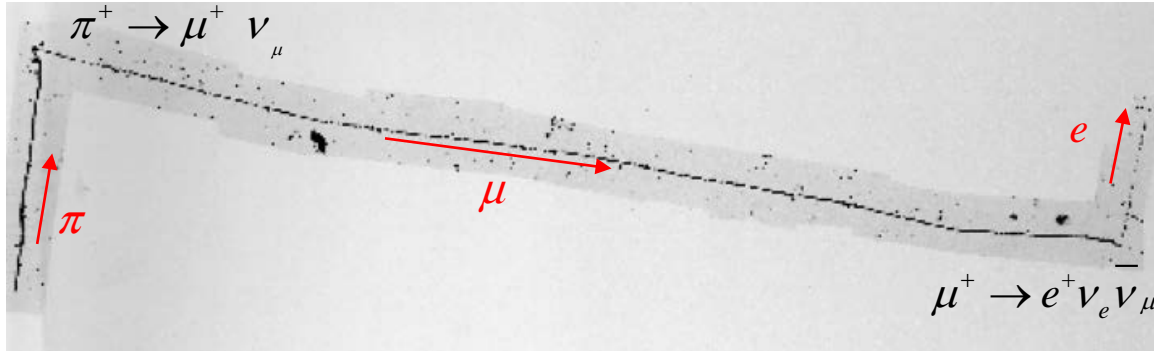
Who ordered
THAT?!?



$\begin{pmatrix} e \\ \nu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mu \\ ? \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix}$
γ	π	γ	$?$

El pió

- **1946.** Descobriment **del pió carregat (π^\pm)** per Cecil Powell, en anàlisi de rajos còsmics capturats en emulsions fotogràfiques (nuclears) exposades en muntanyes.



Powell

$$\tau_\pi \approx 2.6 \times 10^{-8} \text{ s}$$

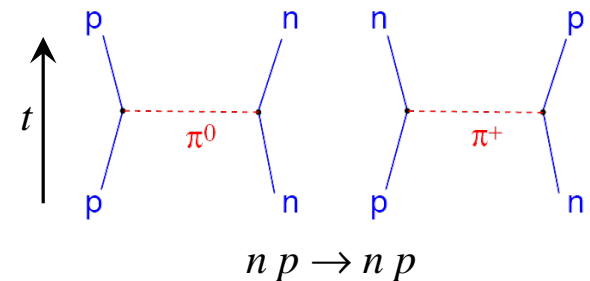
$$\tau_\mu \approx 2.2 \times 10^{-6} \text{ s}$$

- Al contrari que els muons, estos interaccionen (fortament) amb els nuclis.
- Es desintegren en els muons (desintegració dèbil).
- Són els muons de la desintegració del pió les partícules procedents dels rajos còsmics que més abunden a nivell del mar.
- Identificat de seguida com el **propagador de la força nuclear forta** proposat per Yukawa al **1935** per explicar el curt abast d'aquesta, en oposició al concepte de camp utilitzat per les forces d'abast infinit (més al Tema 5).
- La massa del mesó pot estimar-se a partir del P.I.



$$\Delta E \Delta t \sim \hbar, R \sim c \Delta t \sim 1.4 \text{ fm}, \Delta E = mc^2 \sim \frac{\hbar c}{c \Delta t} \sim 140 \text{ MeV}/c^2$$

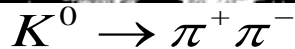
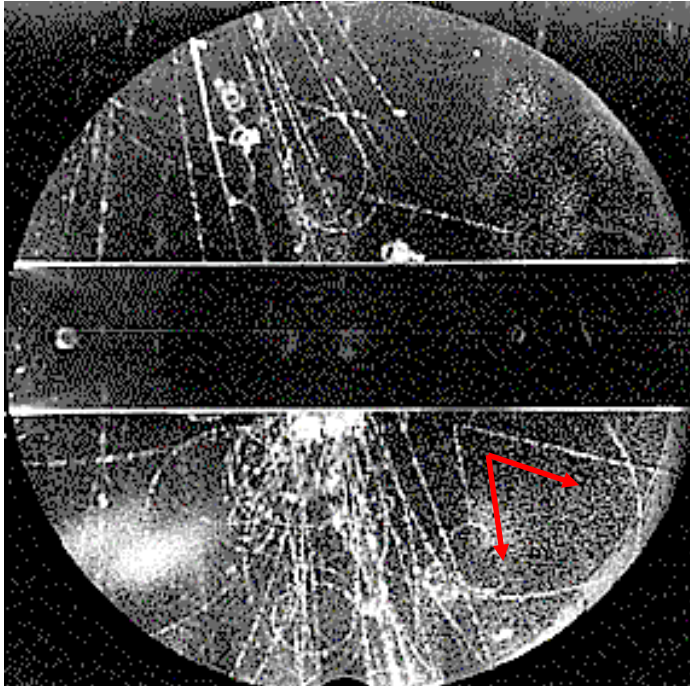
Si $m=0$, el rang del potencial és infinit



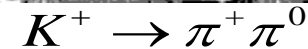
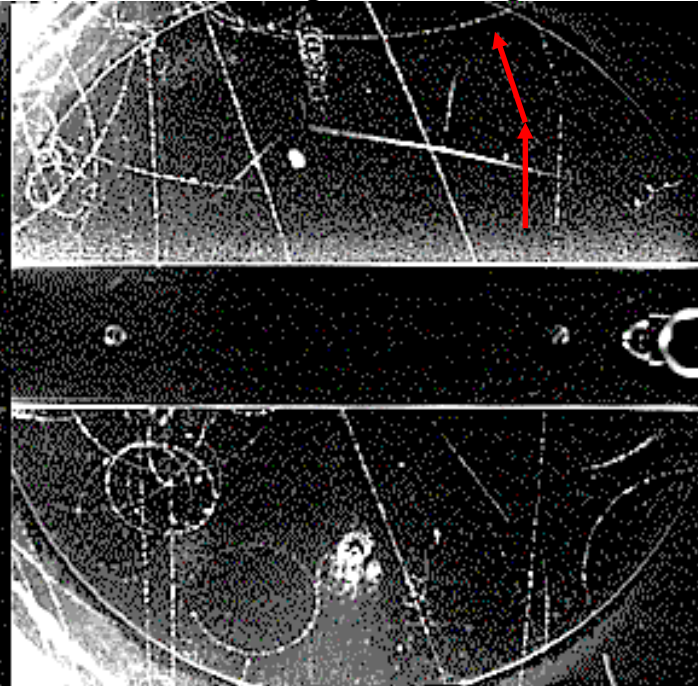
El kaó

- 1946-1947. Descobriment del **kaó carregat i neutre** (K^0, K^\pm) per C. Butler i G. Rochester.

Kaó neutre (15 Octubre 1946)



Kaó carregat (23 Maig 1947)

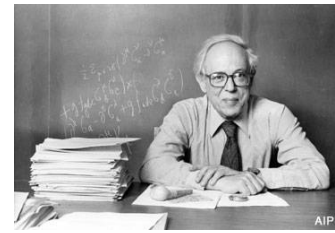


Butler

- Són partícules '**estranyes**' observades en els rajos còsmics, semblants als pions amb una massa intermèdia entre la dels pions i els protons (**mesons**), i que es desintegren en forma de 'V'.
- Constitueixen partícules de la 'segona generació' (els 'mesons' estranys més lleugers).
- S'observen molts més successos en 'V' i són confirmats immediatament després en rajos còsmics i en acceleradors (**Cosmotró de Brookhaven, NY**) a partir de 1953.

L'estranyesa i la “jungla” de partícules

- Les partícules estranyes, a més de per inesperades, són estranyes perquè:
 - Es produeixen copiosament i **per parelles**, amb temps típics $\sim 10^{-23}$ s
 - Es **desintegren lentament** ($\sim 10^{-10}$ s) i en una topologia en forma de ‘V’.
- 1953.** Abraham Pais, Murray Gell-Mann i K. Nishijima proposen que són produïdes per interacció forta però es desintegren via interacció dèbil.



De la mateixa manera que a la càrrega elèctrica, s'assigna una nova *càrrega*, **l'estranyesa** (primer nombre quàntic de '**sabor**'), que es **conserva en la interacció forta** però al contrari de la càrrega elèctrica, **es viola en la interacció dèbil**.

- Exemple:

$$\pi^- + p \rightarrow K^+ + \Sigma^-, K^0 + \Sigma^0, K^0 + \Lambda$$

Producció associada

$$K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$$

$$\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0, n + \pi^+$$

$$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda \gamma$$

$$\Lambda \rightarrow p + \pi^-$$

$$\Sigma^- \rightarrow n + \pi^-$$

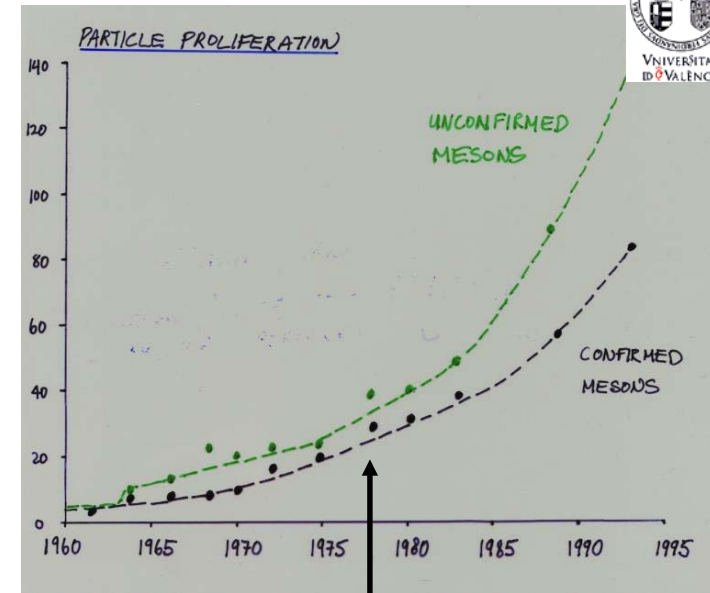
Desintegracions dèbils, no conserven sabor

$$S(\Lambda, \Sigma^0, \Sigma^\pm) = -1 \quad S(K^+, K^0) = +1$$

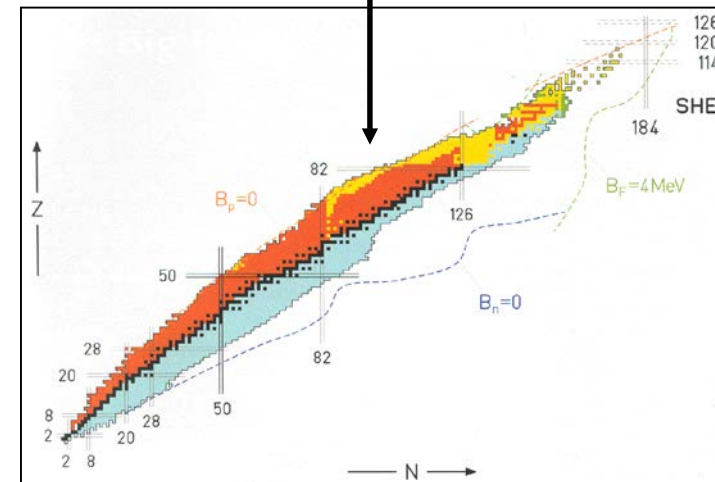
$$S(\pi, p, n) = 0 \quad S(K^-, \bar{K}^0) = -1$$

Desintegració electromagnètica, conserva sabor

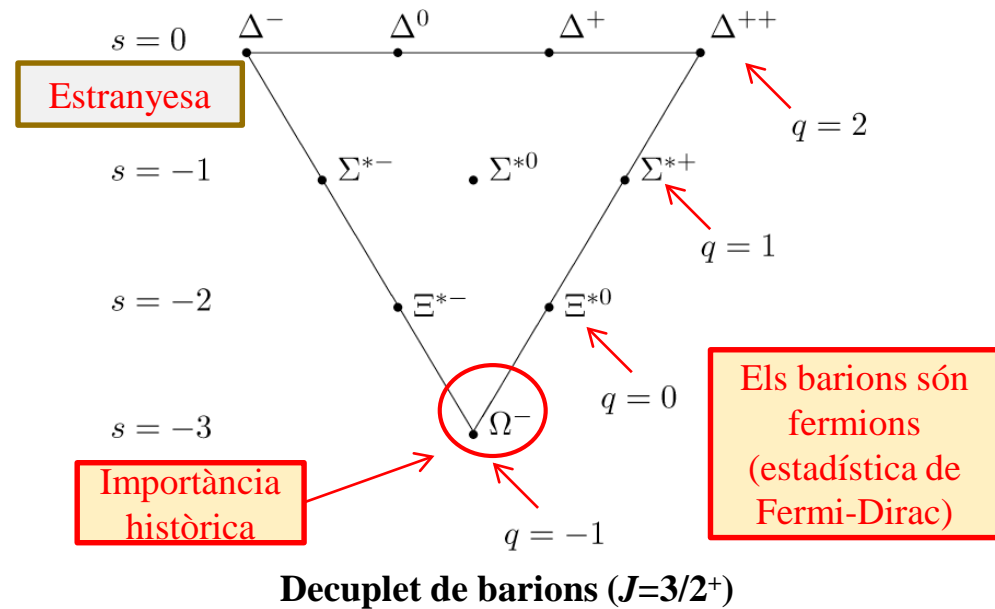
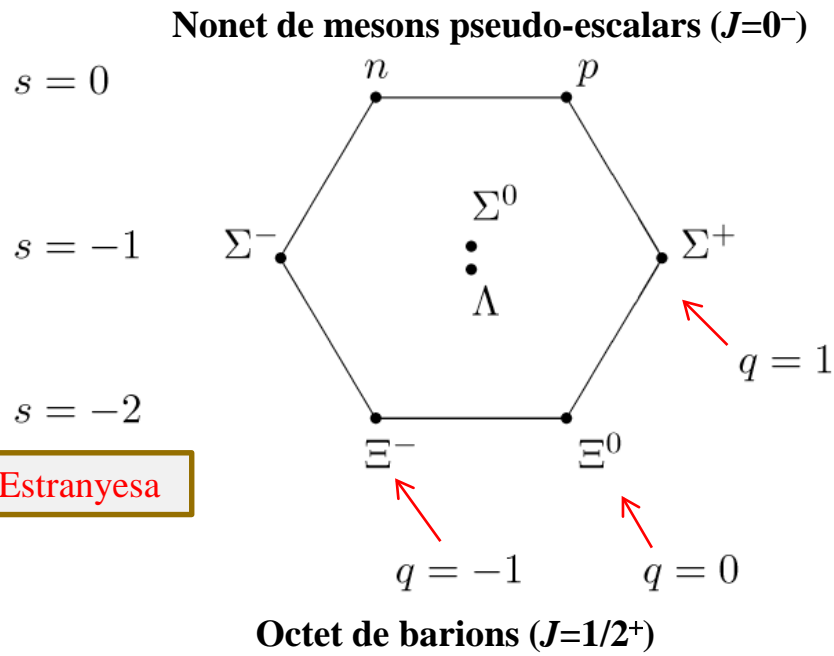
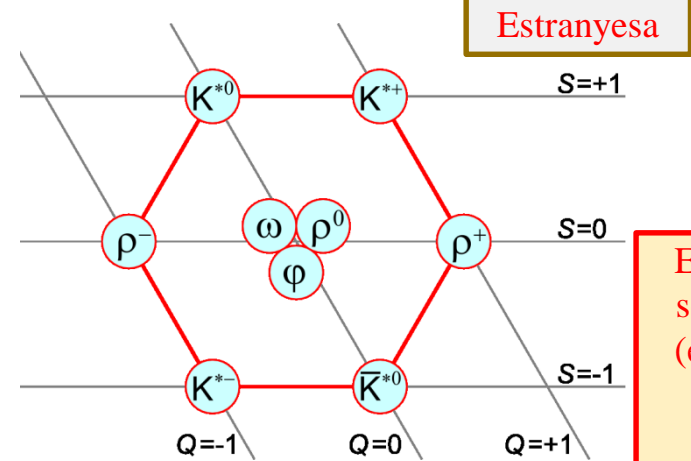
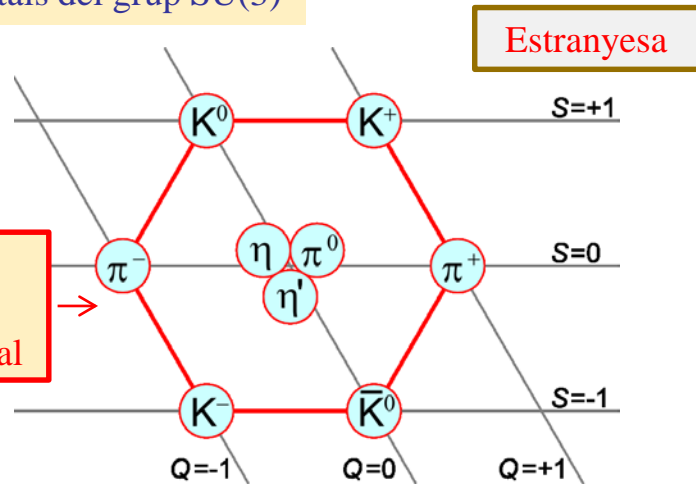
- **1960s-1970s.** Es descobreixen més d'un centenar de partícules (ρ , ω , K^* , ..., Δ , Σ ...una verdadera jungla). Els estudis de les seues propietats i números quàntics van revelar algunes regularitats:
 - Algunes són semblants al pió, amb massa intermitja \Rightarrow **mesons**.
 - Altres ho són al protó, més pesades \Rightarrow **barions**.
 - N'hi ha d'estranyes i no estranyes.
 - Els barions i mesons (**hadrons**) senten la interacció forta, al contrari que els 5 leptons coneguts al moment (e^\pm , μ^\pm , ν) que senten la interacció dèbil i l'electromagnètica (si estan carregats).
 - Els hadrons tenen estats excitats de vides mitges molt curtes ($\sim 10^{-23}$ s), que anomenem **ressonàncies**, i són objectes amb **estructura interna** (com es demostrà després en experiments de difusió d'electrons sobre nucleons).
- **1961.** M. Gell-Mann i Yuval Ne'eman observen que les partícules amb el mateix J^P formen part del mateix **multiplet d'isospín** (interacció forta, és a dir, masses molt semblants, en horitzontal) amb distinta estranyesa, i les ordenen en patrons geomètrics definits basant-se en la càrrega elèctrica i estranyesa (pàg. següent).



Situació semblant a la proliferació d'isòtops en la Física Nuclear



Multiplet (representacions) no fonamentals del grup SU(3)



El model quark

- Per què els hadrons segueixen estos curiosos patrons?
- 1964. M. Gell-Mann i G. Zweig proposen que totes estes partícules s'expliquen per **combinacions** de 3 'quarks' fonamentals (u, d, s) i els seus antiquarks ($\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$)
- Els **mesons** són combinacions $q_1\bar{q}_2$ els **barions** $q_1q_2q_3$



Relació de Gell-Mann-Nishijima

$$Q = \frac{1}{2}(BA + S) + I_3$$

Q : càrrega elèctrica

BA : número bariònic

S : estranyesa

I_3 : tercera component d'isospín

$$I_3(u) = -I_3(d) = 1/2, \quad I_3(s) = 0$$

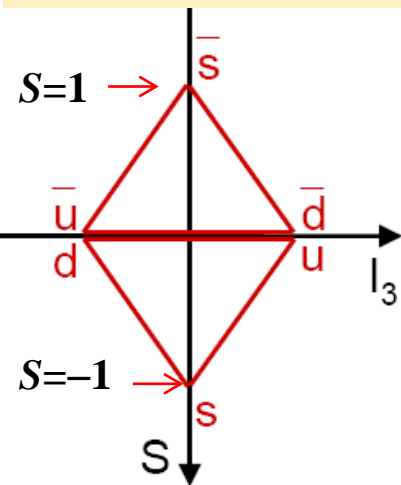
$$S(u, d) = 0, \quad S(s) = -1$$

$$Q(u) = 2/3, \quad Q(d, s) = -1/3$$

$$BA(u, d, s) = 1/3$$

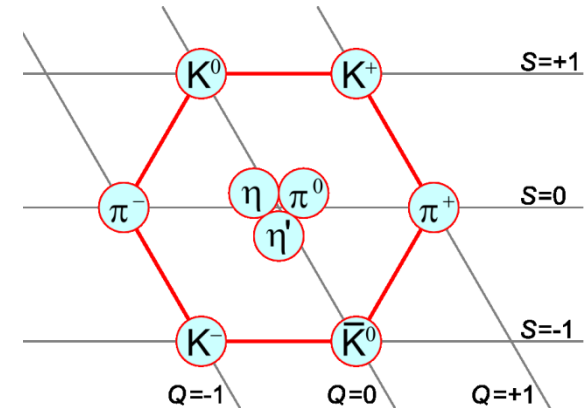
Càrregues contraries per a ($\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$)

Multiplet (representació)
fonamental del grup SU(3)



$$m_d \approx m_u \approx 0.1 \text{ GeV}/c^2$$

$$m_s \approx 0.3 \text{ GeV}/c^2$$

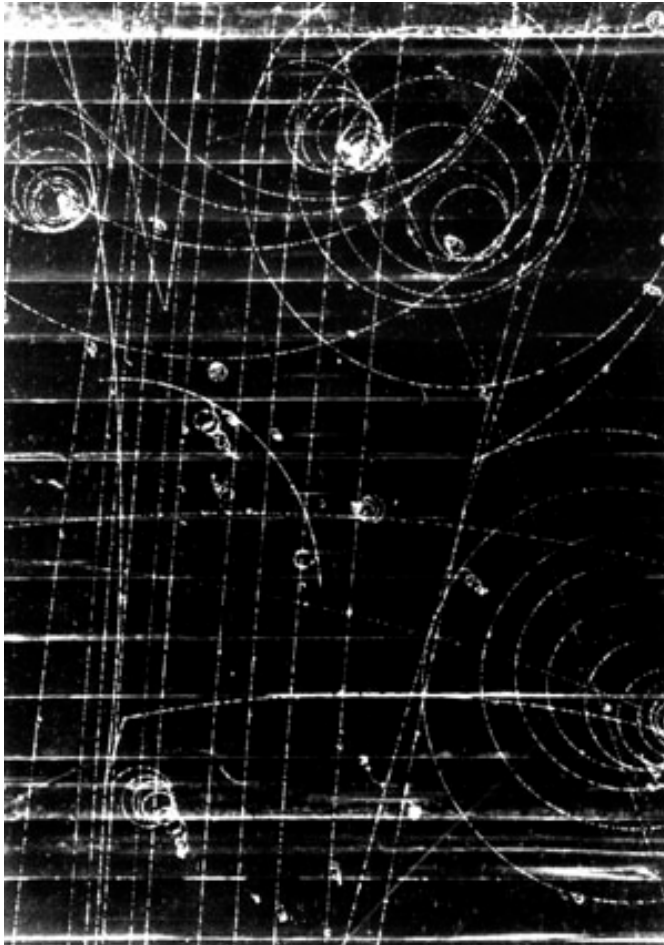


Exemples	$\pi^- = [d\bar{u}]$	$K^- = [s\bar{u}]$
Q	$-2/3 - 1/3 = -1$	$-2/3 - 1/3 = -1$
BA	$-1/3 + 1/3 = 0$	$-1/3 + 1/3 = 0$
S	$0 + 0 = 0$	$0 - 1 = -1$
I_3	$-1/2 - 1/2 = -1$	$-1/2 + 0 = -1/2$
Q (Gell-Mann-Nishijima)	$1/2(0+0) - 1 = -1$	$1/2(0-1) - 1/2 = -1$

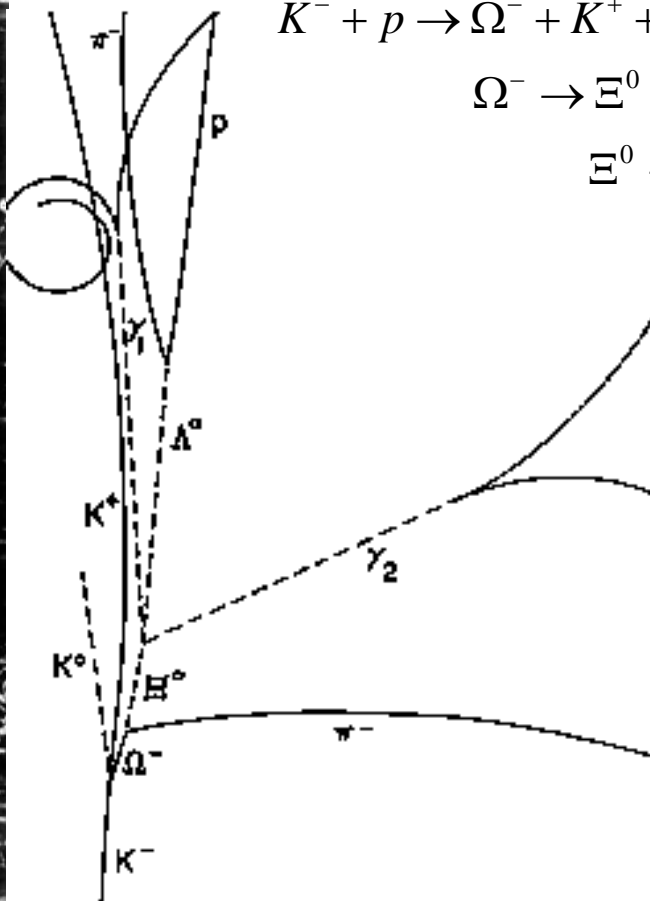
- Res prohibeix teòricament que puguen existir hadrons “exòtics” (per exemple combinacions de 5 quarks). Fins ara, sols hi ha evidència experimental (recent, 2015) de **pentaquarks**.

El barió Omega menys

- **1964.** Descobriment del barió Omega menys (Ω^-), partícula predita prèviament pel model quark amb 3 quarks estranys. El seu descobriment en Brookhaven va ser un èxit espectacular del nou model de quarks i va conduir a la seua immediata acceptació.



Fotografia de la cambra de bombolles



$$K^- + p \rightarrow \Omega^- + K^+ + K^0$$

$$\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^-$$

$$\Xi^0 \rightarrow \Lambda + \pi^0$$

$$\Lambda \rightarrow p + \pi^-$$

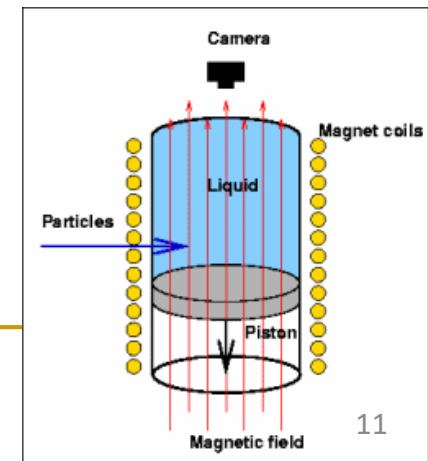
$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$$

Producció
associada (força)

Desintegracions
dèbils

Desintegració
electromagnètica

Cambra de bombolles. Líquid sobre calfat (generalment H_2), és a dir, en **equilibri inestable** a una pressió inferior a la de vapor saturat al retirar-se sobtadament el pistó



Prova experimental directa de l'estructura nucleònica

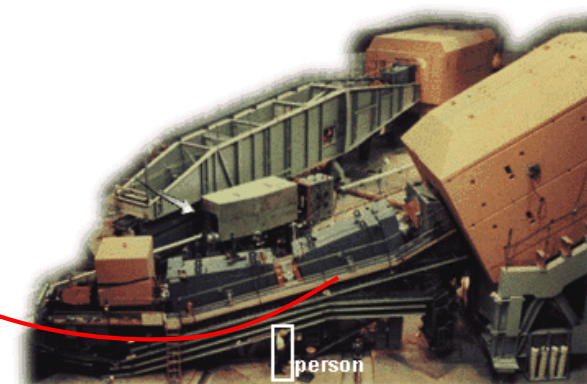
- Però els quarks no existeixen en estat lliure (concepte del **confinament quark**: originat per una interacció molt intensa i que augmenta amb la distància entre els quarks).
- **1968.** Els estudis de difusió d'electrons per nucleons realitzats en SLAC (Stanford Linear Accelerator) per J. I. Friedman, H. W. Kendall, i R. E. Taylor proven que el protó està constituït al seu torn per tres constituents (els 'partons' de Feynman i Bjorken) d'**espín $\frac{1}{2}$** i **càrrega fraccionària**. Són experiments semblants al de difusió de Rutherford, amb molta més energia i per tant menor $\lambda \rightarrow$ resoldre estructures a escala menor.



...els quarks, 57 anys després



El nucli...



La “revolució de novembre” i les seues conseqüències

- **1964.** B.J. Bjorken i S.L. Glashow suggereixen l’existència d’un quart quark: Per què 4 leptons i sols 3 quarks? A més, Cronin i Fitch decobreixen el **trencament de la simetria de CP**
- **1970.** S.L. Glashow, J. Iliopoulos i L. Maiani proposen l’existència d’un quart quark amb arguments molt més tècnics (mecanisme GIM, a veure).
- **1973.** El mecanisme GIM generalitzat a tres generacions per Kobayashi y Maskawa permet entendre el trencament de CP i prediu l’existència una tercera família de quarks.

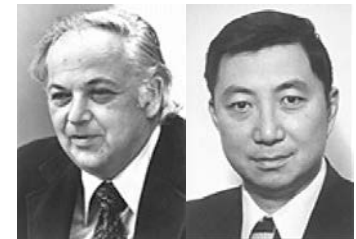
- **1974 (novembre)**

$$m_c \approx 1.5 \text{ GeV}/c^2$$

Descobriments de la partícula J/Ψ , independentment a Stanford (B.

Richter) i Brookhaven (S. Ting). Es tracta d’un mesó neutre, molt pesat ($> 3 \times m_p$) i de vida mitjana extraordinàriament llarga (10^{-20} s front a 10^{-23} s típics dels hadrons de massa semblant, regla OZI).

El model quark, amb la introducció d’un **quart quark, anomenat “charm” (encant, c)**, permet explicar les propietats del nou mesó: $[J/\Psi] = c \bar{c}$



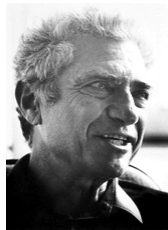
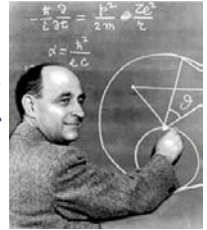
- La confirmació d’aquest nou quark es produeix amb l’observació d’hadrons amb c obert: al **1975**, el primer barió ($\Lambda_c^+ = udc$), i al **1976** els primers mesons ($D^0 = c \bar{u}$ y $D^+ = c \bar{d}$).



- **1975.** Descobriments del **tercer leptó carregat, el “tau” (τ)**, a Stanford (M. Perl)
- **1978.** Descoberta d’un nou mesó molt pesat, el Y (Upsilon), a Fermilab (Chicago). Ràpidament s’identifica como un estat lligat d’un **cinquè quark, el “bottom” o “beauty” (bellesa, b)**: $[Y] = b \bar{b}$.
- **1981-83.** Observacions dels primers barions ($\Lambda_b = udb$) i mesons ($B^0 = b \bar{d}$ y $B^- = b \bar{u}$) amb bellesa.
- **1995.** El **quark top** es descobreix a Fermilab (Chicago), amb una massa de $\approx 175 \text{ GeV}/c^2$.

El neutrí: les proves directes

- **1930.** 1930. W. Pauli proposa la idea de l'emissió d'una tercera partícula, neutra i que no deixa “senyal detectable” en la desintegració β nuclear com explicació a l'espectre continu d'energia dels electrons. Altres, com N. Bohr, estaven disposats a admetre la violació de la conservació de l'energia!
- **1933.** E. Fermi formula la seua teoria de la desintegració β (interacció dèbil). Donat el valor màxim de l'energia de l'electró cal concloure que la partícula de Pauli ha de ser molt lleugera o sense massa \Rightarrow no pot ser el neutró, i Fermi la va cridar ‘neutrí’.
- **1956.** Experiment de Frederic Reines i Clyde Cowan, prova l'existència del neutrí, utilitzant un flux estimat d'antineutrins de $\approx 10^{13} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ produït pel reactor nuclear de Savannah River (South Carolina) per a detectar la reacció β inversa: $\bar{\nu} p \rightarrow n e^+$.
- **1959.** R. Davis i D.S. Harmer proven que la reacció $\nu p \rightarrow n e^+$ no és possible \Rightarrow neutrino \neq antineutrino \Rightarrow **conservació del número leptònic**.
- **1964.** L. Lederman, M. Schwartz i J. Steinberger observen (usant $\sim 10^{14}$ anti-neutrinos produïts en desintegracions $\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$) reaccions $\bar{\nu}_\mu p \rightarrow n \mu^+$ però cap $\bar{\nu}_\mu p \rightarrow n e^+$.
 \Rightarrow **hi ha (al menys) dos tipus de neutrins** (electrònic i muònic).
 \Rightarrow **conservació del número leptònic electrònic i muònic (per separat)**.
- Hui sabem que existeixen fins a 3 tipus de neutrins “lleugers” (1990) tots ells observats en els experiments, i encara que el més lleuger podria tindre massa nul·la, els dos restants tenen massa no nul·la (1998, experiments d'oscil·lació dels neutrinos).



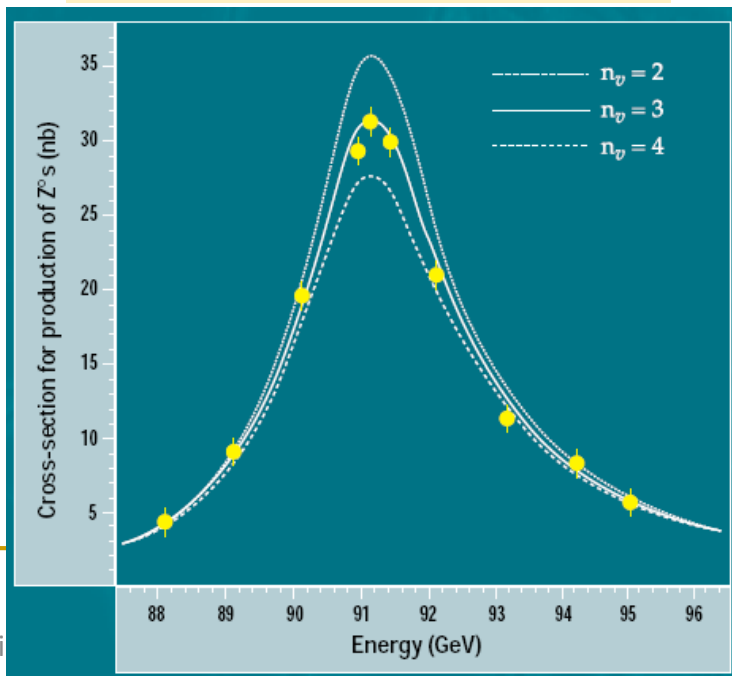
Sis quarks, sis leptons, però tres famílies

- **1990.** El nombre de neutrinos es limita a 3 a partir de les mesures del LEP (CERN, Ginebra) i del SLC (SLAC, Stanford), la qual cosa implica un total de sis quarks, sis leptons i tres famílies.
- Determinat a partir de la mesura de l'amplària i forma de la secció eficaç de la ressonància del bosó Z.

$$e^+ + e^- \rightarrow Z \text{ o } \gamma \rightarrow q\bar{q}$$

$$\rightarrow l^+l^- \quad \sqrt{s} \approx 91\text{GeV}$$

$$\rightarrow \nu_l\bar{\nu}_l$$



Ressonàncies: fórmula de Breit-Wigner (NR)

- El procés de desintegració pot descriure's per una pertorbació dependent del temps sobre el Hamiltonià del sistema estacionari:

$$H = H_0 + H'(t) \quad [H'(t) \ll H_0] \quad H_0 |E_n\rangle = E_n |E_n\rangle$$

$|E_n\rangle$ representa un conjunt complet de funcions d'ona base

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = H |\psi\rangle \Rightarrow |\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) e^{-iE_n t/\hbar} |E_n\rangle$$

Factor d'evolució temporal dels estats estacionaris

- Si $H' = 0 \Rightarrow a_n(t)$ són constants i la probabilitat de trobar l'estat ψ en l'energia ben definida E_n és constant en el temps i el seu valor és $|a_n|^2 \leftarrow$ (estats estacionaris).
- Si $H' \neq 0$, a partir de l'equació de Schrödinger (cancel·la la contribució de H_0):

$$i\hbar \sum_n \dot{a}_n(t) e^{-iE_n t/\hbar} |E_n\rangle = \sum_n a_n(t) H' e^{-iE_n t/\hbar} |E_n\rangle$$

$$\dot{a}_f(t) = -\frac{i}{\hbar} \sum_n a_n(t) H'_{fn} e^{i(E_f - E_n)t/\hbar}$$

$$H'_{fn} \equiv \langle E_f | H' | E_n \rangle \text{ constant}$$

- Si inicialment ens trobem en un estat definit $n = 0$ amb $E_0 = M$:

$$\dot{a}_f(t) = -\frac{i}{\hbar} a_0(t) H'_{f0} e^{i(E_f - M)t/\hbar}$$

Les probabilitats de transició seran constants entre els estats estacionaris

- Ara bé, si l'estat és inestable amb vida mitjana τ (aplicant-hi el P. d'indeterminació):

$$|a_0(t)|^2 \propto e^{-t/\tau} \equiv e^{-\Gamma t/\hbar} \Rightarrow a_0(t) \propto e^{-\Gamma t/2\hbar} \quad [H'_{f0} \text{ constant}] \quad [\Gamma/\hbar \equiv 1/\tau]$$

- Per tant: $\dot{a}_f(t) \propto -\frac{i}{\hbar} H'_{f0} e^{[i(E_f - M) - \Gamma/2]t/\hbar}$
- Integrant ara:

$$M \rightarrow M - i\frac{\hbar}{2\tau} \equiv M - i\frac{\Gamma}{2} \quad \text{És com si l'energia del sistema haguera canviat}$$

$$a_f(t) \propto -i/\hbar H'_{f0} \int e^{[i(E_f - M) - \Gamma/2]t/\hbar} dt = -\frac{H'_{f0}}{(E_f - M) + i\Gamma/2} e^{[i(E_f - M) - \Gamma/2]t/\hbar} \Rightarrow |a_f(t)|^2 \propto \frac{|H'_{f0}|^2 e^{-\Gamma t/\hbar}}{(E_f - M)^2 + \Gamma^2/4}$$

Transformada de Fourier

- La probabilitat normalitzada d'observar una determinada E_f serà:

$$P(E_f) = C |a_f(t)|^2, \quad \int P(E_f) dE_f = C \frac{2\pi}{\Gamma} |H'_{f0}|^2 e^{-\Gamma t/\hbar} = 1$$

Demostrar que:

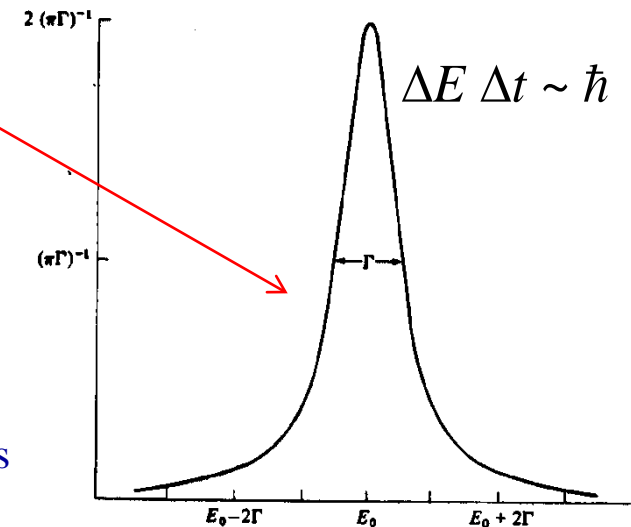
$$\int \frac{dE_f}{(E_f - M)^2 + \Gamma^2/4} = \frac{2\pi}{\Gamma}$$

$$P(E_f) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(E_f - M)^2 + \Gamma^2/4}$$

Fórmula de Breit-Wigner (NR)

- És a dir, pel fet de desintegrar-se, l'estat estacionari no té ja energia ben definida $E_0 = M$ sinó que té una **amplària intrínseca** $\Delta E = \Gamma = \hbar/\tau$

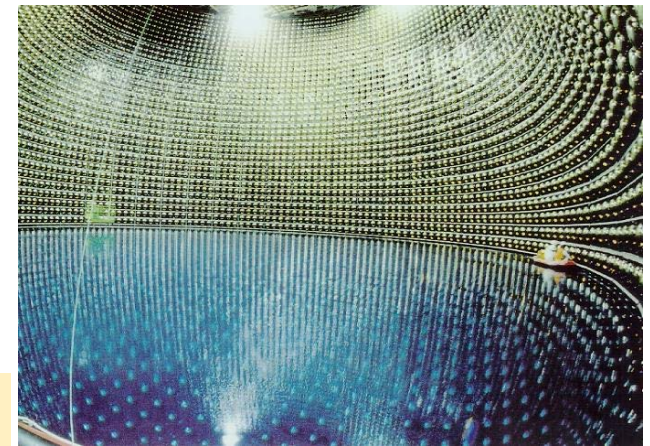
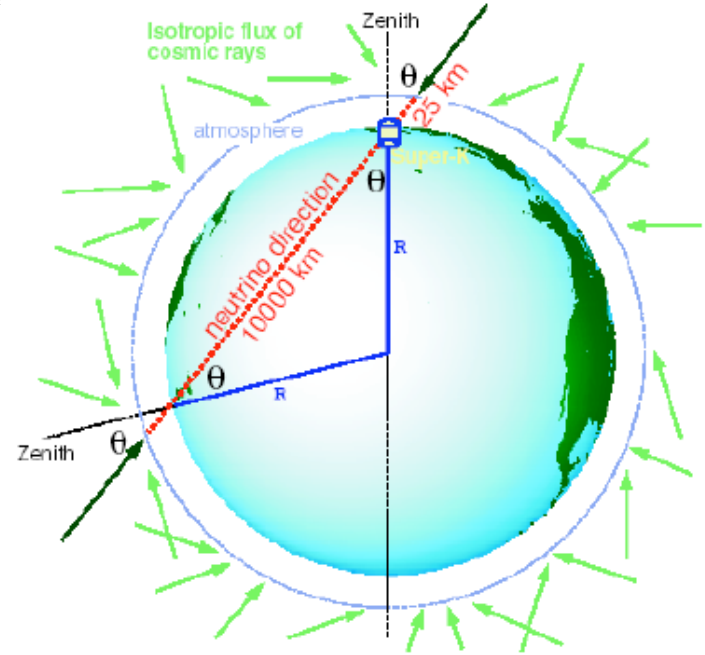
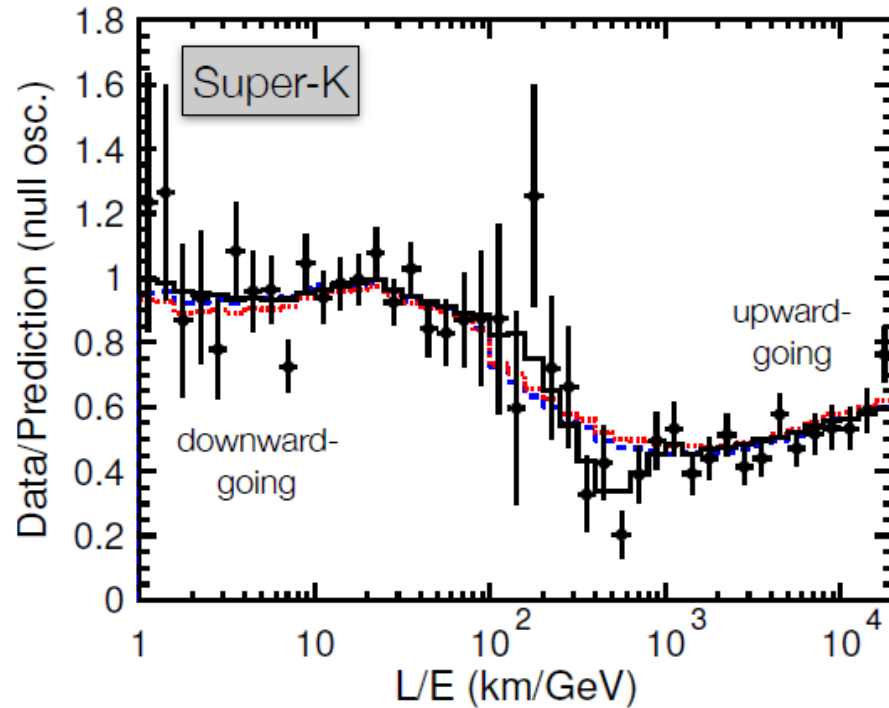
- Mesurant **l'amplària** d'esta distribució de probabilitat (per exemple mitjançant la massa invariant dels productes de desintegració), s'obtindrà la vida mitjana de l'estat.
- Per a determinar un estat amb una precisió ΔE l'observació no pot fer-se per un temps inferior a la vida mitjana τ de l'estat (P. de indeterminació).



Oscil·lacions de neutrins

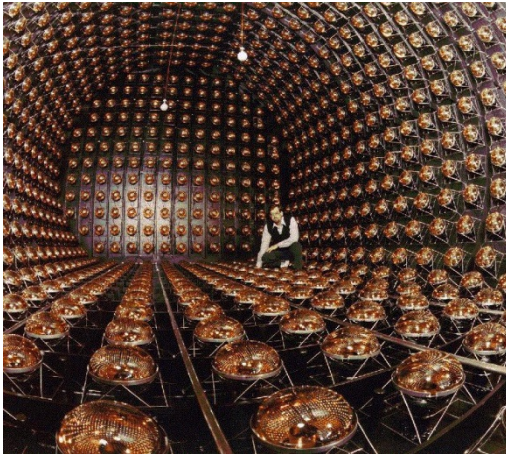
$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$$

- **1998.** Observació en Super-Kamiokande (Japó) d'una diferència (factor $\approx 1/2$) en el flux de neutrins muònics atmosfèrics “des de dalt” (atmosfera) i “des de baix” (que han creuat l'atmosfera i La Terra) \Rightarrow desaparició de ν_μ per la seua transformació (oscil·lació) en altre tipus (segurament ν_τ) al creuar La Terra \Rightarrow evidència de la massa no nul·la del ν_μ .



$$\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^+ \nu_e$$

- **2002.** Dèficit en el flux de neutrins electrònics solars (factor $\approx 1/2$ en base a models astronòmics a l'experiment Sudbury (SNO, Canadà) \Rightarrow forta evidència de la transformació de neutrins electrònics en altre tipus (mescla de neutrins ν_μ i ν_τ).

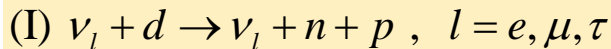


NEUTRINOS FROM THE SUN

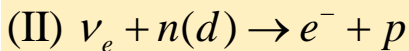
Electron-neutrinos are produced in the Sun center.

ν

SNO



Dissociació del deuteró ($B=2.2$ MeV) possible per qualsevol tipus de neutrí.



Sols el neutrí electrònic pot interaccionar amb el n del d produint el p i l'electró que es detecta per la seua llum Cherenkov.

El procés (I) era compatible amb els models astronòmics de producció de ν_e , però hi havia un dèficit $\approx 1/2$ del (II).

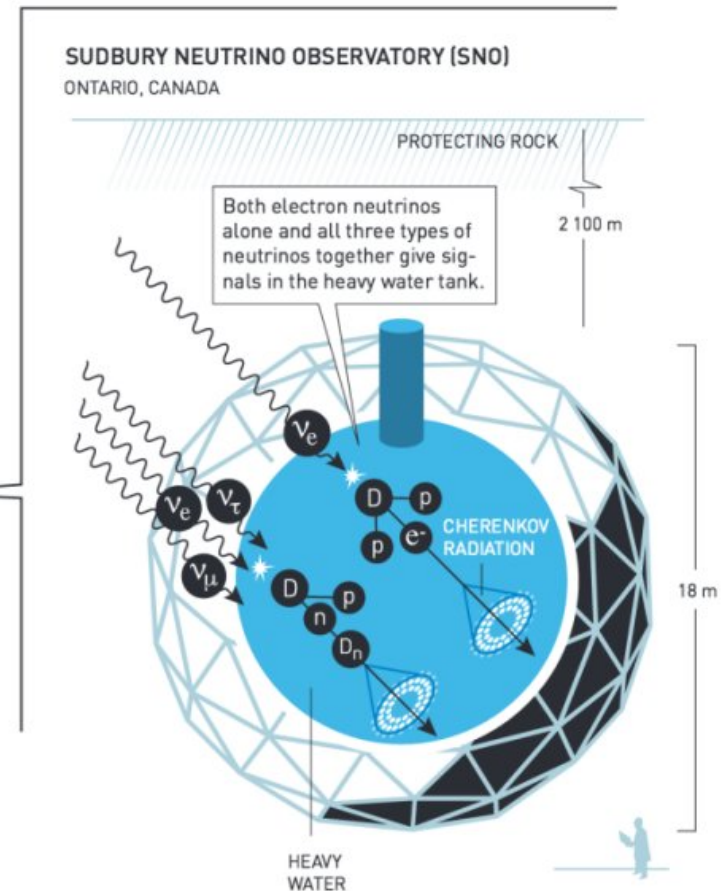


Illustration: © Johan Jarnestad/The Royal Swedish Academy of Sciences

- El període de l'oscil·lació entre parelles de neutrins depèn de la diferència quadràtica $\Delta m^2 \Rightarrow$ el més lleuger podria tindre massa nul·la, però els dos restants no!

Oscil·lacions de neutrins

- El fenomen d'oscil·lacions de neutrins és semblant al de sistemes de mesons neutres (com kaons o mesons B i D), conegut com oscil·lacions de sabor (estranyesa, bellesa i encant), predit per Gell-Mann i Pais al 1955, poc després d'introduir l'hipòtesi de l'estranyesa.
- Els neutrins es produeixen com estats propis de número leptònic (per família), però evolucionen en el temps com estats combinació lineal de les diferents famílies. Per a dues famílies:

$$\left. \begin{aligned} |\nu_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\nu_e\rangle - |\nu_\mu\rangle) \\ |\nu_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\nu_e\rangle + |\nu_\mu\rangle) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} |\nu_e\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\nu_1\rangle + |\nu_2\rangle) \\ |\nu_\mu\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\nu_1\rangle - |\nu_2\rangle) \end{aligned}$$

- Els ν_e i ν_μ no són els estats d'evolució temporal, sinó que ho són el ν_1 i ν_2 . Per a una partícula estable amb massa m :

$$|\psi(t)\rangle = |\psi(0)\rangle e^{-imt}$$

- En t la funció d'ones d'un feix inicial de ν_e serà doncs:

$$|\nu_e(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\nu_1(t)\rangle + |\nu_2(t)\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\nu_1(0)\rangle e^{-im_1 t} + |\nu_2(0)\rangle e^{-im_2 t}) \quad \begin{aligned} |\nu_e\rangle &\equiv |\nu_e(0)\rangle \\ |\nu_\mu\rangle &\equiv |\nu_\mu(0)\rangle \end{aligned}$$

$$|\nu_e(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\nu_1(0)\rangle e^{-im_1 t} + |\nu_2(0)\rangle e^{-im_2 t}) = \frac{1}{2}[(e^{-im_1 t} + e^{-im_2 t})|\nu_e\rangle - (e^{-im_1 t} - e^{-im_2 t})|\nu_\mu\rangle]$$

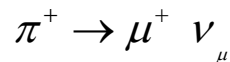
- La probabilitat de trobar l'estat $\nu_e(t)$ en un estat ν_e ó ν_μ serà doncs:

$$\left| \langle \nu_e | \nu_e(t) \rangle \right|^2 = \frac{1}{4} \left| e^{-im_1 t} + e^{-im_2 t} \right|^2 = \frac{1}{4} \left| 1 + e^{-i\Delta m t} \right|^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \cos(\Delta m t) \right] = \cos^2 \left(\frac{\Delta m}{2} t \right) \quad \Delta m = m_2 - m_1$$

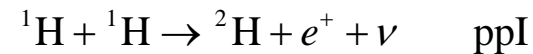
$$\left| \langle \nu_\mu | \nu_e(t) \rangle \right|^2 = \frac{1}{4} \left| e^{-im_1 t} - e^{-im_2 t} \right|^2 = \frac{1}{4} \left| 1 - e^{-i\Delta m t} \right|^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \cos(\Delta m t) \right] = \sin^2 \left(\frac{\Delta m}{2} t \right) \quad T = \frac{2\pi}{\Delta m}$$

- La probabilitats per a tot t val la unitat, però hi ha oscil·lacions d'un estat a l'altre de manera que per a $t = T/2$, la probabilitat de trobar un ν_e és nul·la, i la de trobar un ν_μ és la unitat. Es tracta d'un fenomen de pulsacions entre dos estats monocromàtics.
 - Per a que hi hagen oscil·lacions **les masses han de diferir** \Rightarrow una al menys $\neq 0$.
 - El signe de la diferència de masses no queda ací definit.**
- L'estat inicial del feix (ν_e ó ν_μ) el determina el procés de producció:

Neutrins atmosfèrics

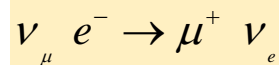


Neutrins solars, per exemple

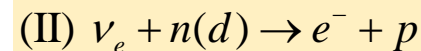
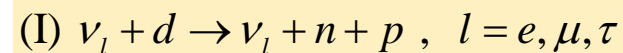


- Cóm es pot establir si l'estat final (en t) correspon a ν_e ó ν_μ ?

Super-Kamiokande



Sudbury



Famílies de leptons

- Els doblets de leptons formen tres famílies i els **seus números leptònics** associats són:

$$\begin{array}{cccccc}
 L_e = +1 & L_\mu = +1 & L_\tau = +1 & & L_e = -1 & L_\mu = -1 & L_\tau = -1 \\
 \left(\begin{array}{c} e^- \\ \nu_e \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} \mu^- \\ \nu_\mu \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} \tau^- \\ \nu_\tau \end{array} \right) & \begin{array}{c} \leftarrow \text{Partícules} \\ \text{Antipartícules} \rightarrow \end{array} & \left(\begin{array}{c} e^+ \\ \bar{\nu}_e \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} \mu^+ \\ \bar{\nu}_\mu \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} \tau^+ \\ \bar{\nu}_\tau \end{array} \right)
 \end{array}$$

Espín, són
fermions

Leptons ($S=1/2, BA=0$)	Q/e	L_e	L_μ	L_τ	Massa (MeV/c ²)	τ (s)
e^-	-1	1	0	0	0.511	-
ν_e	0	1	0	0	≤ 2 eV (^3H)	-
μ^-	-1	0	1	0	105.66	2.197×10^{-6}
ν_μ	0	0	1	0	[0.009, 2] eV	-
τ^-	-1	0	0	1	1777.0	0.291×10^{-12}
ν_τ	0	0	0	1	[0.05, 2] eV	-

- Hui sabem que els neutrins han de tindre massa, encara que molt xicoteta i el seu valor absolut és encara desconegut (les oscil·lacions de neutrins corroboren que tenen massa).
- Cada sabor leptònic ha de conservar-se separatament en qualsevol reacció (**conservació del número leptònic per família**). El número leptònic en una reacció es calcula com:

$$L_e = N(e^-) - N(e^+) + N(\nu_e) - N(\bar{\nu}_e)$$

Aplicable a cada família.

- Els leptons carregats interaccionen tant a través de la interacció electromagnètica com de la interacció dèbil. Els neutrins només ho fan dèbilment (cap d'estos interacciona fortament).
- Els leptons són fermions (espín $1/2$) i tenen **número bariònic nul, $BA = 0$** .

Famílies de quarks

- Presentem els doblets de quarks i les seues **càrregues** associades: (números quàntics de càrrega elèctrica, sabor, isospín, color). Cal remarcar que existeix un paral·lelisme entre les famílies de quarks i dels leptons:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

$$Q = 2/3$$

$$Q = -1/3$$

Estranyesa S

A més els **antiquarks**, amb números quàntics oposats

Els quarks són fermions, així com els barions i els leptons ($S = 1/2$)

Sabors ($S=1/2$, $B=1/3$)	$Q/ e $	U	D	C	S	T	B	I	I_3	Massa (aprox.)
u ("up")	+2/3	1	0	0	0	0	0	1/2	1/2	2 MeV/c ²
d ("down")	-1/3	0	-1	0	0	0	0	1/2	-1/2	5 MeV/c ²
c ("charm")	+2/3	0	0	1	0	0	0	0	0	1.3 GeV/c ²
s ("strange")	-1/3	0	0	0	-1	0	0	0	0	0.1 GeV/c ²
t ("top" o "truth")	+2/3	0	0	0	0	1	0	0	0	173 GeV/c ²
b ("bottom" o "beauty")	-1/3	0	0	0	0	0	-1	0	0	4.2 GeV/c ²

Estos quarks generen els multiplets d'isospín

- Les masses dels quarks han de prendre's a títol indicatiu (no existeixen quarks en estat lliure).
- Cada quark té a més associada **la càrrega de color**: roig, verd, blau. La "càrrega" de color és la responsable de que interaccionen fortament (Tema 5).
- Els quarks tenen número bariònic $BA \equiv B = 1/3$.
- Els quarks senten les tres interaccions: forta, electromagnètica i dèbil, a més de la gravitatòria.

Hadrons: barions i mesons

- Només poden observar-se en estat lliure **combinacions “incolores” de quarks** (conseqüència del confinament quark) \Rightarrow els quarks formen els hadrons \Rightarrow sensibles a la interacció forta.
- S'han descobert més de 200 hadrons “meta-estables”, tots ells amb **càrrega elèctrica entera**:
 - Catalogats pel '*Particle Data Group*':
 - Disponible online: <http://pdg.lbl.gov/>
 - Publicat cada dos anys, per revisat periòdicament en la versió online ('*pdgLive*')
- **Dos tipus d'hadrons**, que són combinacions de quarks:
 - **Barions**: estats lligats (per interacció forta) de tres quarks ($q_1 q_2 q_3$) \rightarrow número bariònic $BA = 1$.
 - Són **fermions**, $BA = 1$ (Els barions són **fermions**, doncs tenen espín semi-enter).
 - Per raons històriques, es denominen **hiperons** als barions de massa major a la del neutró (en la pràctica, tots els barions excepte els nucleons). També existeixen els anti-barions.
 - **Mesons**: estats lligats (per interacció forta) quark-antiquark $q_1 \bar{q}_2 \rightarrow$ número bariònic $BA = 0$.
 - Són **bosons**, $BA = 0$ (Els mesons són **bosons**, doncs tenen el seu espín enter).
- Els números quàntics de sabor (U, D, C, S, T, B) dels hadrons són funció del número de quarks constituents:

Igual que el número leptònic
contarem ara el número quàntic
de sabor en una reacció com:

$$\begin{aligned}
 U &= N_U = [N(u) - N(\bar{u})] \\
 C &= N_C = [N(c) - N(\bar{c})] \\
 T &= N_T = [N(t) - N(\bar{t})]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D &= -N_D = -[N(d) - N(\bar{d})] \\
 S &= -N_S = -[N(s) - N(\bar{s})] \\
 B &= -N_B = -[N(b) - N(\bar{b})]
 \end{aligned}$$

- En les interaccions **fortes i electro-magnètiques** entre quarks **sempre es conserva el sabor**:

$$K^- + p \rightarrow \Lambda + \pi^0 \quad (s\bar{u} + uud \rightarrow sud + u\bar{u})$$

- En els processos dèbils pot **canviar el sabor dels quarks** seguint les regles: $\Delta S = \pm 1$, $\Delta C = \pm 1$, etc.)

$$\Lambda \rightarrow p\pi^- \quad (sud \rightarrow uud + d\bar{u})$$

- Anàlogament per al número bariònic:

$$BA = \frac{1}{3} [N(q) - N(\bar{q})] = \frac{1}{3} \sum_q N_q = \frac{1}{3} (U - D + C - S + T - B)$$

- La conservació del número fermiònic implica la **conservació del número bariònic** (barions i antibarions són creats o destruïts per parelles).

- Està per tant associat a la conservació del número de quarks.
- No hi ha llei de conservació anàloga per als mesons (conseqüència de l'absència de llei de conservació del número bosònic).

- I per a la càrrega elèctrica es verifica:

$$\text{Per la primera família, isospín } I = \frac{1}{2}, \quad I_3 = \frac{1}{2}(U + D)$$

$$Q = \frac{2}{3} [N_u + N_c + N_t] - \frac{1}{3} [N_d + N_s + N_b] = \frac{2}{3} [U + C + T] + \frac{1}{3} [D + S + B] = I_3 + \frac{BA + S + C + B + T}{2}$$

- Definició de l'hipercàrrega Y :

$$Y = BA + S + C + T + B$$

(Y és la hipercàrrega)

Relació generalitzada de Gell-Mann-Nishijima

Exercici: comprovar directament, ja siga sobre els propis hadrons o substituint directament el valor de BA .

- Per tant, els números quàntics dels hadrons es determinen en funció dels números quàntics dels quarks que els constitueixen:
 - Les càrregues i números quàntics additius Q, B, S, C, B, T són perfectament reproduïts.
 - Les funcions d'ona de les partícules es poden construir a partir dels quarks constituents.
 - Els moments magnètics es reproduïxen també amb prou precisió.
 - Hi ha diferències de massa entre els elements d'un multiplet pel fet que **la simetria d'isospín no és exacta**, a causa dels efectes electromagnètics, dèbils i masses constituents:
 - **Exemple:** $\Sigma^+(1189) = [uus]$ $\Sigma^0(1193) = [uds]$ $\Sigma^-(1197) = [dds]$

$$M(\Sigma^+) = M_0 + m_s + 2m_u + \delta(z_u^2 + z_u z_s + z_u z_s) = M_0 + m_s + 2m_u$$

$$M(\Sigma^0) = M_0 + m_s + m_d + m_u + \delta(z_u z_d + z_u z_s + z_d z_s) = M_0 + m_s + m_d + m_u - \delta/3$$

$$M(\Sigma^-) = M_0 + m_s + 2m_d + \delta(z_d^2 + z_d z_s + z_d z_s) = M_0 + m_s + 2m_d + \delta/3$$

Contribució interacció forta. Masses dels quarks. Contribució electrostàtica.
La interacció forta no depèn del sabor dels quarks \Rightarrow contribució idèntica M_0

$$m_d - m_u = \frac{1}{3} [M(\Sigma^-) + M(\Sigma^0) - 2M(\Sigma^+)] = 3.7 \text{ MeV}/c^2 \quad \delta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

Notes

- La massa del multiplet M_0 és pràcticament la mateixa per invariància d'isospín i representa la contribució a la massa per part de la interacció forta (a diferència de la física atòmica i nuclear és >0).
- Les diferències en la massa es deuen a la interacció coulombiana. Així podem calcular que les diferències en la càrrega dels quarks originen diferències en massa del tipus:

$$\delta_{\text{coul}}(z_u z_s) = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3} \right) \delta = -\frac{2}{9} \delta$$

Barions estables (no es desintegren via forta)
($J^P = 1/2^+$, exceptuat Ω^- , amb $J^P = 3/2^+$)

Mesons pseudo-escalars ($J^P = 0^-$), que no es desintegren via interacció forta

 No existixen barions amb $S > 0$

Partícula (estructura en quarks)	Masa MeV/c ²	Vida media τ (s)	Modos de desintegración
Bariones sin extrañeza			
p (<i>uud</i>)	938,272	-	estable
n (<i>udd</i>)	939,565	885,7 \pm 0,8	$p e^- \bar{\nu}_e$
Bariones con $S = -1$			
Λ^0 (<i>uds</i>)	1115,7	2,6 $\times 10^{-10}$	$p \pi^-, n \pi^0$
Σ^+ (<i>uus</i>)	1189,4	0,8 $\times 10^{-10}$	$p \pi^0, n \pi^+$
Σ^0 (<i>uds</i>)	1192,6	7,4 $\times 10^{-20}$	$\Lambda \gamma$
Σ^- (<i>dds</i>)	1197,4	1,5 $\times 10^{-10}$	$n \pi^-$
Bariones con $S = -2$			
Ξ^0 (<i>uss</i>)	1314,8	2,9 $\times 10^{-10}$	$\Lambda \pi^0$
Ξ^- (<i>dss</i>)	1321,3	1,6 $\times 10^{-10}$	$\Lambda \pi^-$
Bariones con $S = -3$			
Ω^- (<i>sss</i>)	1672,5	0,82 $\times 10^{-10}$	$\Lambda K^-, \Xi^0 \pi^-, \Xi^- \pi^0$
Bariones con encanto			
Λ_c^+ (<i>udc</i>)	2284,9	0,20 $\times 10^{-12}$	$\Lambda X, p K^- \pi^+, p K^0$
Σ_c (<i>uuc, udc, ddc</i>)	2452,8	-	$\Lambda_c^+ \pi$
Ξ_c^+ (<i>usc</i>)	2466,3	0,44 $\times 10^{-12}$	$\Lambda K^- \pi^+ \pi^+, \Sigma^+ K^- \pi^+$
Ξ_c^0 (<i>dsc</i>)	2471,8	0,1 $\times 10^{-12}$	$\Xi^- \pi^+, \Xi^- \pi^+ \pi^+ \pi^-$
Ω_c^+ (<i>ssc</i>)	2697,5	0,06 $\times 10^{-12}$	$\Sigma K K \pi, \Omega^- \pi^+, \Xi K \pi \pi$
Bariones con belleza			
Λ_b^0 (<i>udb</i>)	5624	1,23 $\times 10^{-12}$	$J/\psi(1S) \Lambda, p D^0 \pi^-$

Partícula (estructura en quarks)	Masa MeV/c ²	Vida media τ (s)	Modos de desintegración
Mesones sin extrañeza			
π^\pm (<i>u\bar{d}, $\bar{u}d$</i>)	139,57	2,6 $\times 10^{-8}$	$\mu \nu$
π^0 (<i>u\bar{u}, $\bar{d}d$</i>)	134,98	0,84 $\times 10^{-16}$	$\gamma \gamma$
η^0 (<i>u\bar{u}, $\bar{d}d$</i>)	547,3	5,58 $\times 10^{-19}$	$\gamma \gamma, 3 \pi^0, \pi^+ \pi^- \pi^0$
Mesones con extrañeza			
K^\pm (<i>u\bar{s}, $\bar{u}s$</i>)	493,68	1,24 $\times 10^{-8}$	$\mu \nu \mu, \pi^\pm \pi^0, 3 \pi, \pi^0 \ell^\pm \nu_\ell$
K^0, \bar{K}^0 (<i>d\bar{s}, $\bar{d}s$</i>)	497,67		50 % K_S^0 , 50 % K_L^0
K_S^0		0,89 $\times 10^{-10}$	$\pi^+ \pi^-, 2 \pi^0$
K_L^0		5,17 $\times 10^{-8}$	$\pi^+ \pi^- \pi^0, 3 \pi^0, \pi^\pm \ell^\mp \nu_\ell$
Mesones con encanto			
D^\pm (<i>c\bar{d}, $\bar{c}d$</i>)	1869,3	1,05 $\times 10^{-12}$	$e X, K^\pm X, K^0/\bar{K}^0 X$
D^0, \bar{D}^0 (<i>c\bar{u}, $\bar{c}u$</i>)	1864,5	0,412 $\times 10^{-12}$	$e X, \mu X, K X, K^0/\bar{K}^0 X$
Mesones con encanto y con extrañeza			
D_s^\pm (<i>c\bar{s}, $\bar{c}s$</i>)	1968,5	0,490 $\times 10^{-12}$	$K X, K^0/\bar{K}^0 X$
Mesones con belleza			
B^\pm (<i>u\bar{b}, $\bar{u}b$</i>)	5279,0	1,67 $\times 10^{-12}$	$D X, D^0 X/\bar{D}^0 X, D^* X$
B^0, \bar{B}^0 (<i>d\bar{b}, $\bar{d}b$</i>)	5279,4	1,54 $\times 10^{-12}$	$D X, D^0 X/\bar{D}^0 X, D^* X$
Mesones con belleza y con extrañeza			
B_s^0 (<i>s\bar{b}, $\bar{s}b$</i>)	5369,6	1,46 $\times 10^{-12}$	$D_s^- X, D_s^- \pi^+$

<http://pdg.lbl.gov/2015/tables/rpp2015-qtab-baryons.pdf>

<http://pdg.lbl.gov/2015/tables/rpp2015-qtab-mesons.pdf>

Hadrons excitats: ressonàncies

- Els barions i mesons “**estables**” corresponen a estats lligats de quarks per interacció forta i són els de menor massa de la família (per tant, s’han de desintegrar mitjançant interacció dèbil).
- Les **ressonàncies** són estats excitats i lligats de quarks que es des-exciten per interacció forta.
- La secció eficaç de producció segueix una distribució de Breit-Wigner (relativista):

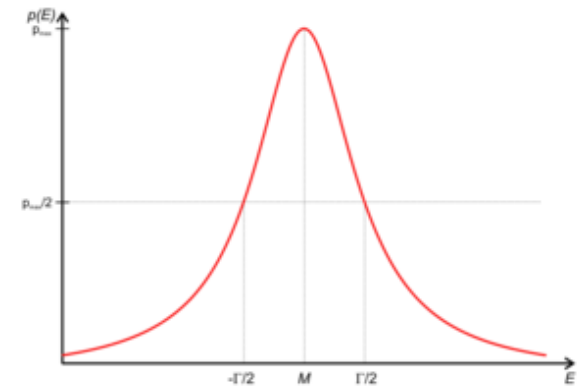
$$\sigma = \frac{2J+1}{(2s_1+1)(2s_2+1)} \frac{4\pi\hbar^2}{k^2} \frac{\Gamma^2/4}{(E-M)^2 + \Gamma^2/4}$$

k : moment del projectil en CM

s_1, s_2 : espín partícules de l’estat inicial

J, Γ, M : espín, amplària (FWHM) i massa de la ressonància

σ : promig dels estats inicials i suma sobre els estats finals.



- La primera ressonància observada va ser la Δ^{++} , produïda en col·lisions pió-protó.
- Les ressonàncies tenen números quàntics ben definits.
- Exemples:

□ $\Delta(1232): J = 3/2, I = 3/2, \Gamma = 120 \text{ MeV} \Rightarrow \tau = \hbar / \Gamma = 5.4 \times 10^{-24} \text{ s}$

□ $J/\psi, \Upsilon(4S), Z, \dots$

Quarkonia

$2S+1 L_J$	J^{PC}	$u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}$ $I = 0$	$u\bar{d}, u\bar{u}, d\bar{d}$ $I = 1$	$u\bar{s}, d\bar{s}$ $I = \frac{1}{2}$
1S_0	0^{-+}	$\eta, \eta'(958)$	π	K
3S_1	1^{--}	$\phi(1020), \omega(783)$	$\rho(770)$	$K^*(892)$
3P_2	2^{++}	$f'_2(1525), f_2(1270)$	$a_2(1320)$	$K_2^*(1430)$

Amb estranyesa S

Assignacions del model quark per als mesons “lleugers”

$n^{2s+1}\ell_J$	J^{PC}	$l=1$ $u\bar{d}, \bar{u}d, \frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{d} - u\bar{u})$	$l=\frac{1}{2}$ $u\bar{s}, d\bar{s}, \bar{d}s, -\bar{u}s$	$l=0$ f'	$l=0$ f	θ_{quad} [°]	θ_{lin} [°]
1^1S_0	0^{-+}	π	K	η	$\eta'(958)$	-11.4	-24.5
1^3S_1	1^{--}	$\rho(770)$	$K^*(892)$	$\phi(1020)$	$\omega(782)$	39.1	36.4
1^1P_1	1^{+-}	$b_1(1235)$	K_{1B}^\dagger	$h_1(1380)$	$h_1(1170)$		
1^3P_0	0^{++}	$a_0(1450)$	$K_0^*(1430)$	$f_0(1710)$	$f_0(1370)$		
1^3P_1	1^{++}	$a_1(1260)$	K_{1A}^\dagger	$f_1(1420)$	$f_1(1285)$		
1^3P_2	2^{++}	$a_2(1320)$	$K_2^*(1430)$	$f_2'(1525)$	$f_2(1270)$	32.1	30.5
1^1D_2	2^{-+}	$\pi_2(1670)$	$K_2(1770)^\dagger$	$\eta_2(1870)$	$\eta_2(1645)$		
1^3D_1	1^{--}	$\rho(1700)$	$K^*(1680)$		$\omega(1650)$		
1^3D_2	2^{--}		$K_2(1820)$				
1^3D_3	3^{--}	$\rho_3(1690)$	$K_3^*(1780)$	$\phi_3(1850)$	$\omega_3(1670)$	31.8	30.8
1^3F_4	4^{++}	$a_4(2040)$	$K_4^*(2045)$		$f_4(2050)$		
1^3G_5	5^{--}	$\rho_5(2350)$	$K_5^*(2380)$				
1^3H_6	6^{++}	$a_6(2450)$			$f_6(2510)$		
2^1S_0	0^{-+}	$\pi(1300)$	$K(1460)$	$\eta(1475)$	$\eta(1295)$		
2^3S_1	1^{--}	$\rho(1450)$	$K^*(1410)$	$\phi(1680)$	$\omega(1420)$		

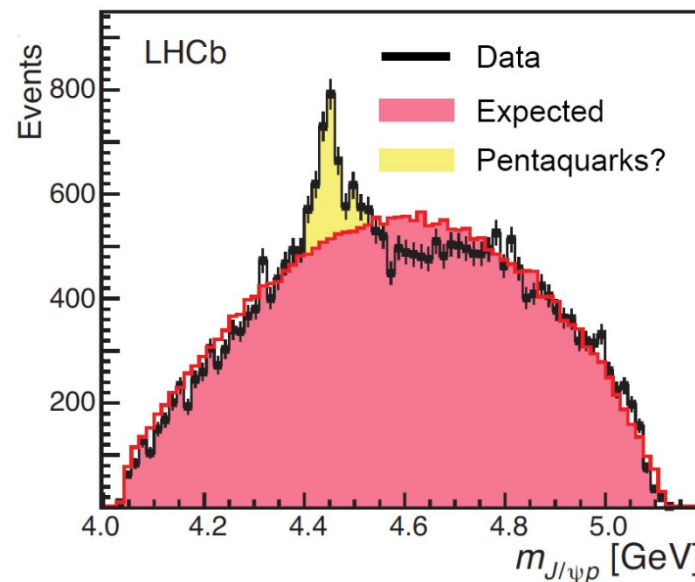
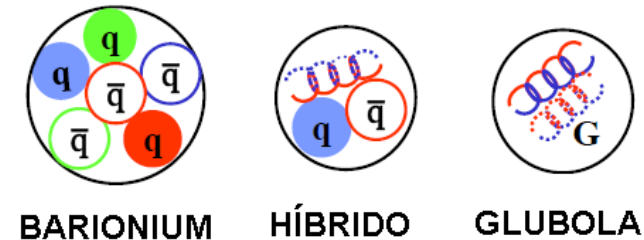
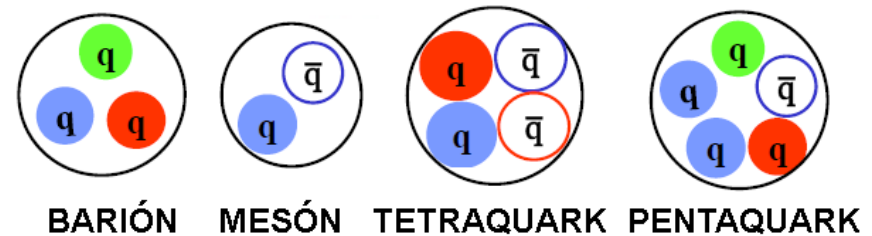
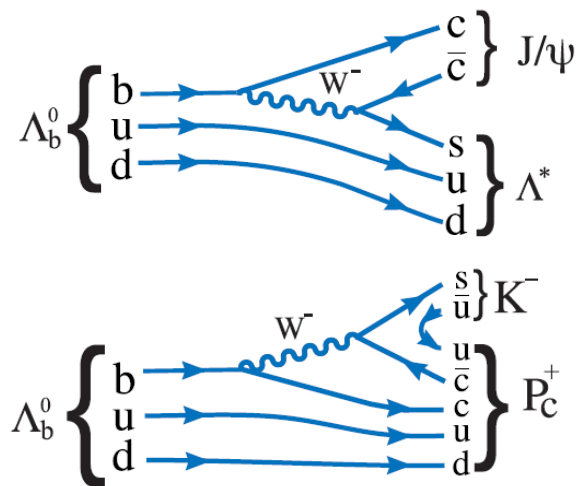
Assignacions del model quark per als mesons “pesats”

$n^{2s+1}\ell_J \quad J^{PC}$	$l=0$ $c\bar{c}$	$l=0$ $b\bar{b}$	$l=\frac{1}{2}$ $c\bar{u}, c\bar{d}; \bar{c}u, \bar{c}d$	$l=0$ $c\bar{s}, \bar{c}s$	$l=\frac{1}{2}$ $b\bar{u}, b\bar{d}; \bar{b}u, \bar{b}d$	$l=0$ $b\bar{s}, \bar{b}s$	$l=0$ $b\bar{c}, \bar{b}c$
$1^1S_0 \quad 0^{-+}$	$\eta_c(1S)$	$\eta_b(1S)$	D	D_s^\pm	B	B_s^0	B_c^\pm
$1^3S_1 \quad 1^{--}$	$J/\psi(1S)$	$\Upsilon(1S)$	D^*	$D_s^{*\pm}$	B^*	B_s^*	
$1^1P_1 \quad 1^{+-}$	$h_c(1P)$	$h_b(1P)$	$D_1(2420)$	$D_{s1}(2536)^\pm$	$B_1(5721)$	$B_{s1}(5830)^0$	
$1^3P_0 \quad 0^{++}$	$\chi_{c0}(1P)$	$\chi_{b0}(1P)$	$D_0^*(2400)$	$D_{s0}^*(2317)^{\pm\frac{1}{2}}$			
$1^3P_1 \quad 1^{++}$	$\chi_{c1}(1P)$	$\chi_{b1}(1P)$	$D_1(2430)$	$D_{s1}(2460)^{\pm\frac{1}{2}}$			
$1^3P_2 \quad 2^{++}$	$\chi_{c2}(1P)$	$\chi_{b2}(1P)$	$D_2^*(2460)$	$D_{s2}^*(2573)^\pm$	$B_2^*(5747)$	$B_{s2}^*(5840)^0$	
$1^3D_1 \quad 1^{--}$	$\psi(3770)$			$D_{s1}^*(2700)^\pm$			
$2^1S_0 \quad 0^{-+}$	$\eta_c(2S)$		$D(2550)$				
$2^3S_1 \quad 1^{--}$	$\psi(2S)$	$\Upsilon(2S)$					
$2^1P_1 \quad 1^{+-}$		$h_b(2P)$					
$2^3P_{0,1,2} \quad 0^{++}, 1^{++}, 2^{++}$	$\chi_{c2}(2P)$	$\chi_{b0,1,2}(2P)$					

Hadrons exòtics. Pentaquarks

- Des dels inicis del model quark es busquen altres estats d'agregació dels quarks.
- Després de moltes falses indicacions sembla hi haver una forta evidència de l'existència dels pentaquarks produïts en la desintegració de barions amb bellesa:

$$\Lambda_b^0 \rightarrow J/\psi K^- p$$



Resum dels constituents fonamentals

Les tres famílies dels leptons i dels quarks

+ antipartícules

FERMIONS

matter constituents
spin = 1/2, 3/2, 5/2, ...

Leptons spin = 1/2			Quarks spin = 1/2		
Flavor	Mass GeV/c ²	Electric charge	Flavor	Approx. Mass GeV/c ²	Electric charge
ν_L lightest neutrino*	$(0-2) \times 10^{-9}$	0	u up	0.002	2/3
e electron	0.000511	-1	d down	0.005	-1/3
ν_M middle neutrino*	$(0.009-2) \times 10^{-9}$	0	c charm	1.3	2/3
μ muon	0.106	-1	s strange	0.1	-1/3
ν_H heaviest neutrino*	$(0.05-2) \times 10^{-9}$	0	t top	173	2/3
τ tau	1.777	-1	b bottom	4.2	-1/3

Baryons qqq and Antibaryons $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$

Baryons are fermionic hadrons.

There are a few of the many types of baryons.

Symbol	Name	Quark content	Electric charge	GeV/c ²	Spin
p	proton	uud	1	0.938	1/2
\bar{p}	antiproton	$\bar{u}\bar{u}\bar{d}$	-1	0.938	1/2
n	neutron	udd	0	0.940	1/2
Λ	lambda	uds	0	1.116	1/2
Ω^-	omega	sss	-1	1.672	3/2

Fermions

Mesons $q\bar{q}$

Mesons are bosonic hadrons

There are a few of the many types of mesons.

Symbol	Name	Quark content	Electric charge	GeV/c ²	Spin
π^+	pion	u\bar{d}	+1	0.140	0
K^-	kaon	s\bar{u}	-1	0.494	0
ρ^+	rho	u\bar{d}	+1	0.770	1
B^0	B-zero	d\bar{b}	0	5.279	0
η_c	eta-c	c\bar{c}	0	2.980	0

Bosons

Els hadrons: mesons i barions, constituïts per quarks

Més les antipartícules...

2. El paper de les simetries

- Entenem per **Simetria** en Física la **invariància** (dinàmica) de les equacions d'un sistema baix una certa transformació.
- Les Simetries en Física són un instrument fonamental per:
 - Restringir la descripció matemàtica de les equacions de moviment quan aquestes no són completament conegudes o resolubles.
 - Establir propietats de la dinàmica del sistema, verificables experimentalment (inclús quan la dinàmica es completament coneguda, no cal resoldre així resoldre tot el problema dinàmic).
- Cada **Simetria** està associada a una **Llei de conservació** i viceversa (**Teorema de Noether**).
- Les lleis de conservació en MQ impliquen l'existència (introducció) de **números quàntics**.
- Les transformacions de simetria en Física tenen estructura de **grup** (abelià o no), i podent ser:
 - **Contínues (Grups de Lie)**: translacions i rotacions rígides, transformacions de Lorentz (Grup de Poincaré, de Lorentz), transformacions “gauge”,... \Rightarrow **números quàntics additius**.
 - **Discretes**: paritat, conjugació de càrrega, etc. \Rightarrow **números quàntics multiplicatius**.
- Tipus de ruptura de simetria:
 - **Ruptura explícita**: no totes les interaccions respecten la simetria, o bé la respecten sols aproximadament \Rightarrow llei de conservació i números quàntics vàlids per certes interaccions.
 - **Ruptura espontània**: matemàticament el H de la interacció respecta la simetria, però no així els estats (per ej. el mecanisme de Higgs, Tema 5).
- Alguns dels grups més interessants en Física de Partícules estan representats per matrius, com ara $SU(2)$ ó $SU(3)$ (grup especial de les matrius 2×2 ó 3×3 unitàries i unimodulars).

Equacions d'Euler-Lagrange en Mecànica Clàssica

- El **principi d'acció** en mecànica clàssica descriu el moviment d'un sistema entre dos configuracions definides inicial A i final B en funció de les **coordenades generalitzades** del sistema:

$$\mathbf{q}(t), \mathbf{q} = \{q_j\}, \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$$

Aplicant-hi el mètode variacional amb els punts A i B determinats, i sent L la funció de *Lagrange* del sistema, la trajectòria i evolució del sistema serà aquella que faça mínim l'acció:

$$S(\mathbf{q}) = \int_A^B L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt \text{ estacionaria} \Rightarrow \delta_{\mathbf{q}} S(\mathbf{q}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \Rightarrow \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \text{ Quantitat de moviment conjugada}$$

Equacions d'Euler-Lagrange

\Rightarrow El principi d'acció estacionaria (mínima) governa la dinàmica del sistema.

- Quan considerem una simetria dinàmica estem tractant amb un grup de transformacions:

$$G = \{g_j\}, \text{ tal que } q'_i = g_i(\mathbf{q}) \quad \text{Invariància} \Rightarrow S[\mathbf{q}'] = S[\mathbf{g}(\mathbf{q})] = S[\mathbf{q}] \Rightarrow \delta_{\mathbf{q}'} S(\mathbf{q}') = 0$$

\Rightarrow Que el sistema presente simetria sobre esta transformació comporta **la invariància de l'acció**.

- Si L no depèn explícitament d'una coordenada generalitzada q_j (encara que puga dependre de la velocitat generalitzada corresponent), és a dir, q_j és cíclica:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \Rightarrow \frac{dp_i}{dt} = 0$$

\Rightarrow La quantitat de moviment generalitzada d'una coordenada cíclica se conserva.

Connexió simetria i llei de conservació en Mecànica Quàntica

- L'extensió del Teorema de Noether de les **simetries dinàmiques** a la MQ implica reformular el principi de simetria doncs ara l'evolució del sistema ve determinada pel Hamiltonià H i no el Lagrangià L . A més poden haver simetries internes con ara C .
- Comparació entre les imatges de Schrödinger i Heisenberg **d'evolució temporal** dels sistemes: en la imatge de Schrödinger l'evolució es descriu mitjançant la funció d'ona, mentre que en la de Heisenberg es fa per un operador U d'evolució temporal:

□ Schrödinger: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$
(la més habitual)

H no depén explícitament del temps (sistema conservatiu)

Notació:

$$|\psi(t)\rangle \equiv |\psi_S(t)\rangle$$

$$|\psi(t_0)\rangle \equiv |\psi_H(t_0)\rangle$$

$$H \equiv H_S$$

□ Heisenberg: $|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$

$$U(t, t_0) = \exp \left[\frac{-iH(t-t_0)}{\hbar} \right]$$

- Com U és un operador unitari es conserva **la probabilitat**, i les dues imatges descriuen els mateixos resultats físics: $U^\dagger U = U U^\dagger = 1 \Rightarrow \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t_0) U^\dagger | U \psi(t_0) \rangle = \langle \psi(t_0) | \psi(t_0) \rangle$

- Siga ara D un operador (observable dinàmic) que representa una transformació de simetria, i suposem que puga dependre del temps. Per ser una transformació de simetria haurà de conservar la normalització de les funcions d'ona:

$$\langle \psi(t) | D | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t_0) | U^\dagger D U | \psi(t_0) \rangle = \langle \psi(t_0) | D_0 | \psi(t_0) \rangle \Rightarrow U^\dagger D U = D_0 \Rightarrow D = U D_0 U^\dagger$$

Notació:

$$D \equiv D_S(t)$$

$$D_0 \equiv D_H(t_0)$$

- Derivant respecte al temps:

$$\frac{dD}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [H, D] + U \frac{\partial D_0}{\partial t} U^\dagger$$

$\frac{\partial D}{\partial t}$

Notació:

$$D \equiv D_S(t)$$

$$D_0 \equiv D_H(t_0)$$

- Si D no depèn explícitament del temps, i commuta amb el Hamiltonià H del sistema \Rightarrow serà una constant de moviment:

$$dD/dt = 0 \quad \forall t$$

- Amb D unitari,

$$[H, D] = 0 \Rightarrow HD = DH \Rightarrow D^\dagger HD = H$$

és a dir, H roman invariant baix la transformació generada per D :

Emmy
Noether



Per a D unitari i no depèn explícitament del temps:

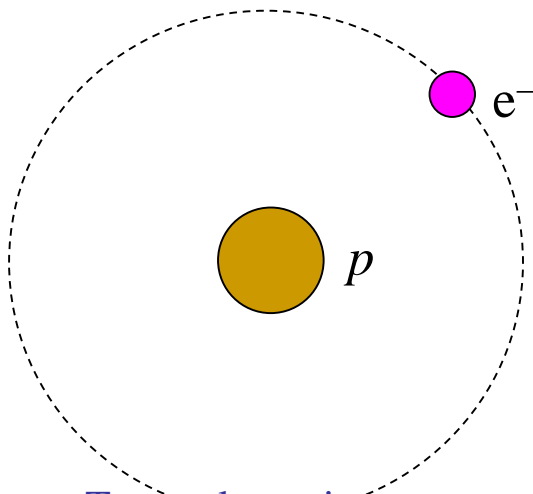
H és invariant baix D (D es simetria de H) $\Leftrightarrow [H, D] = 0 \Leftrightarrow D$ és una constant de moviment (és una magnitud conservada i el seu número quàntic associat serà constant del moviment)

- L'operador D es diu que forma el grup de simetria de H , i pot representar transformacions espai-temporals (translacions espacials, translacions temporals, rotacions, transformacions de Lorentz) o actuar sobre altres variables internes del H que determina la dinàmica i propietats de la interacció.

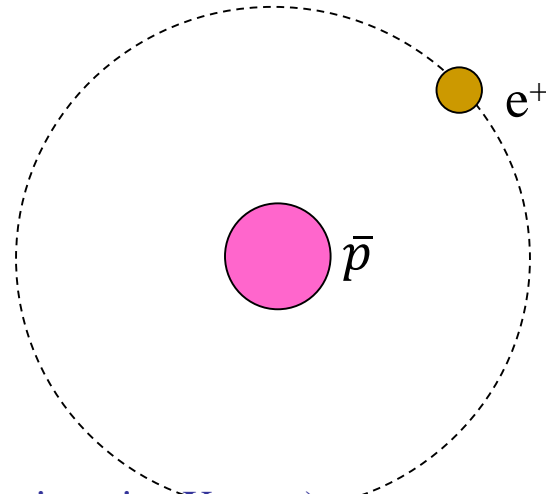
Observació de ruptures de simetria

- Concepte de **ruptura d'una simetria**: analitzem el procés real i ens imaginem el procés sota la corresponent transformació de simetria, i ens preguntem:
 - És possible el procés transformat? Si no existeix diem que la simetria està totalment trencada (o violada), si existeix amb una probabilitat diferent, la simetria està parcialment trencada.
 - Té les mateixes propietats (taxes de producció, probabilitats ...) ? Quant més es desvia del què esperem diem que està més i més trencada. Per exemple: siga C un operador que canvia una partícula per la seua antipartícula (operador de conjugació de la càrrega):

Univers (Àtom de hidrogen)



Univers conjugat (per l'operador C)



Tenen el mateix comportament? (en nivells d'energia, rajos X, etc.:).

No \Rightarrow Hi ha violació de C (intercanvi partícula per antipartícula).

Sí \Rightarrow No hi ha violació de C . La interacció electromagnètica presenta simetria sota C .

Lleis de conservació (universals o no universals)

Simetria o invariància	Llei i magnitud conservada	Forta	E.m.	Feble
Translacions temporals	Energia E	Si	Si	Si
Translacions espacials	Moment P	Si	Si	Si
Rotacions espacials, R3 ó SU(2)	Moment angular J	Si	Si	Si
Invariància gauge escalar U(1)	Càrrega elèctrica e	Si	Si	Si
Invariància gauge SU(3)	Color	Si	Si	Si
Simetria interna	Número bariònic BA	Si	Si	Si
Simetria interna	Número leptònic: L_e, L_μ, L_τ	Si	Si	Si
Rotacions internes, R3 ó SU(2)	Isospín I	Si	No	No
Rotacions internes SU(3)	Model quark, Sabor (u, d, s)	\approx Si	Si	No
Simetria discreta interna	Paritat P	Si	Si	No
Simetria discreta interna	Conjugació de càrrega C	Si	Si	No
Simetria discreta interna	CP	Si	Si	No
Simetria discreta interna	Inversió temporal T^*	Si	Si	No
Simetria discreta interna	CPT^*	Si	Si	Si

Algunes lleis de conservació s'han establert '*a posteriori*', a partir de la **NO observació** de processos que les lleis de conservació conegudes fins a eixe moment sí les permetien.

*No existeix llei de conservació perquè l'operador no és hermític

Quan es troba una nova llei de conservació cal postular nous números quàntics que són els que es conserven en les reaccions. Així es va postular l'existència de l'**estranyesa** i que posteriorment amb el model de quarks podem interpretar el que significa: la conservació d'estranyesa és la conservació del 'sabor' estrany, és a dir, el número de quarks estranys menys el número d'antiquarks estranys es conserva (per les interaccions forta i electromagnètica).

3. Simetries

Translacions espacials

- Translació infinitesimal en l'espai sobre un sistema descrit per la funció d'ona ψ :

$$\psi' = \psi(x + \delta x) = \psi(x) + \delta x \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} = \underbrace{\left(1 + \delta x \frac{\partial}{\partial x}\right)}_D \psi \quad \psi'(x) = D\psi(x)$$

Operador de les translacions espacials en MQ

En funció de l'operador quàntic del moment, $p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ es té que $D = \left(1 + ip_x \frac{\delta x}{\hbar}\right)$

Operador de translació finita: $\Delta x = n\delta x$ $D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + ip_x \frac{\delta x}{\hbar}\right)^n = \exp\left(\frac{i}{\hbar} p_x \Delta x\right)$

Generalitzant a tres dimensions:

$$D = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}\right)$$

Generador de translacions espacials

- D és un operador unitari i forma una representació del grup de les translacions espacials.

- Com a grup, es verifiquen les propietats de tancament, l'existència de l'element identitat, de l'invers de cada element i l'associativitat.
- **El grup és abelià.**
- El generador del grup és el moment lineal p .

- Si el Hamiltonià és invariant baix translacions espacials llavors $[D, H] = 0 \Rightarrow [\vec{p}, H] = 0$ i el moment lineal es conserva:

$$\frac{dD}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

Es a dir, la transformació D forma ella mateixa un grup que té la mateixa estructura del grup original (el de les translacions espacials), i és una expressió matricial (representació) que fa el “mapping” entre l'espai dels generadors (espai-temps) l'espai de Hilbert (dels rajos, funcions d'ona)

L'espai és homogeni: podem escollir l'origen de coordenades on vullgam, les lleis de la física romanen invariants

Translacions temporals

- La Física i les seues equacions han de ser independents de l'origen del temps, que òbviamment el podem escollir a voluntat. Així, podem realitzar una translació **infinitesimal** en el temps sobre el sistema que ve descrit per la funció d'onda ψ :

$$\psi' = \psi(t + \delta t) = \psi(t) + \delta t \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = \underbrace{\left(1 + \delta t \frac{\partial}{\partial t}\right)}_D \psi$$

Operador de les translacions temporals en MQ

- En funció de l'operador quàntic energia: $E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ $D = \left(1 - iE \frac{\delta t}{\hbar}\right)$

- El operador que representa una translació finita: $\Delta t = n\delta t$

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - iE \frac{\delta t}{\hbar}\right)^n = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E \Delta t\right)$$

→ Generador de translacions temporals

- D és un operador unitari i forma una representació del grup de les translacions temporals.

□ El grup és abelià.

□ El generador del grup és l'energia.

- Si el Hamiltonià és invariant baix translacions temporals llavors $[D, H] = 0 \Rightarrow [E, H] = 0$ i l'energia es conserva:

$$\frac{dD}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$$

L'homogeneïtat del temps, és a dir, que pugam traslladar el nostre sistema en el temps (transformació activa) o que pugam elegir l'origen de coordenades en l'instant desitjat (posició passiva) sense que la física quede alterada comporta que l'energia del sistema ha de romandre constant (constant del moviment).

Rotacions, grup $R(3)$

- Com hem vingut fent, efectuem una rotació infinitesimal $\delta\phi$ al voltant d'un eix z :

$$\psi' = \psi(x + \delta\phi y, y - \delta\phi x, z) = \psi(x, y, z) + \delta\phi \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi(x, y, z) = \underbrace{\left[1 + \delta\phi \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) \right]}_D \psi(x, y, z)$$

En funció d'operador moment angular (3^a component):

$$L_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \quad D = 1 - \frac{i}{\hbar} L_z \delta\phi$$

En una rotació finita $\Delta\phi$ s'obté: $D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{i}{\hbar} L_z \delta\phi \right)^n = \exp \left(-\frac{i}{\hbar} L_z \phi \right)$ Generador de les rotacions

on D és un operador unitari i forma una representació del grup de les rotacions espacials.

- El grup és **no abelià** (les rotacions en l'espai no commuten).
- El generador del grup és el moment angular (orbital o total).
- Si el Hamiltonià és invariant baix rotacions espacials llavors $[D, H] = 0 \Rightarrow [L_z, H] = 0$ i la tercera component del moment angular es conserva:

$$\frac{dD}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = 0$$

- Si es generalitza a una rotació entorn de qualsevol eix: $D = \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \phi \vec{n} \cdot \vec{L} \right)$
 $\Rightarrow [D, H] = 0 \Rightarrow [\vec{n} \cdot \vec{L}, H] = 0$
 \Rightarrow La component sobre l'eix de gir del vector moment angular es conserva.

La isotropia de l'espai, és a dir, que pugam rotar el sistema físic a voluntat (activa) o elegir l'orientació dels eixos coordinats com vullgam (passiva), ha de deixar la física invariant i condueix a la conservació del moment angular del sistema. Ara bé, a diferència d'abans, les tres components del moment angular no commuten, pel què només J^2, J_z , seran bons números quàntics.

Grups de Lie

- Tots estos grups de translacions i rotacions poden generar-se a partir de successives transformacions infinitesimals \Rightarrow Grups de Lie (continus)
- Els grups de Lie queden determinats por les relaciones de conmutació (àlgebra) dels seus generadors:

$$[J_i, J_k] = i\epsilon_{jkl}\hbar J_l$$

ϵ_{ijl} : constants d'estructura del grup

- Per al grup de las rotacions $\epsilon_{jkl} = +1, -1, 0$, per a jkl cíclic, anticíclic, altre cas
- Operador de Casimir: operador que conmuta amb tots els generadors del grup
- Per al grup de les rotaciones sols existeix un operador de Casimir:

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$$

$$[J^2, J_i] = 0, \quad i = x, y, z$$

- Els operadors de Casimir permeten construir autoestats juntament amb un dels generadors:

$$J^2 |j, m\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j, m\rangle$$

$$J_z |j, m\rangle = m\hbar |j, m\rangle, \quad m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$$

- Amb els altres generadors se poden construir les combinacions lineals (operadors de “pujada” i “baixada”) que verifiquen:

$$J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$$

$$[J_z, J_{\pm}] = \pm\hbar J_{\pm}$$

$$J_{\pm} |j, m\rangle = [j(j+1) - m(m \pm 1)]^{1/2} |j, m \pm 1\rangle$$

- La suma de dos moments angulars és també un moment angular:

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

$$|j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} C(j_1, j_2, j | m_1, m_2, j) |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$$

Coeficientes de Clebsch-Gordan

Número leptònic L (per a cada família)

Cada generació té associat un número quàntic leptònic **independent**:

$$L_e = 1 \quad \text{per a } e^-, \nu_e \quad \text{i} \quad L_e = -1 \quad \text{per a } e^+, \bar{\nu}_e$$

$$L_\mu = 1 \quad \text{per a } \mu^-, \nu_\mu \quad \text{i} \quad L_\mu = -1 \quad \text{per a } \mu^+, \bar{\nu}_\mu$$

$$L_\tau = 1 \quad \text{per a } \tau^-, \nu_\tau \quad \text{i} \quad L_\tau = -1 \quad \text{per a } \tau^+, \bar{\nu}_\tau$$

Per a la resta de partícules és 0.

Es conserven els 3 números quàntics per separat.

Exemples: $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (L_e)_{\text{inicial}} = 0, \quad (L_e)_{\text{final}} = 0$
 $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad (L_e)_i = (L_e)_f = 0, \quad (L_\mu)_i = (L_\mu)_f = 1$

L'electró com és el leptó carregat més lleuger ha de ser estable.

Número bariònic (BA)

$BA = +1$ per a barions

$BA = -1$ per a anti-barions

$BA = 0$ resta (leptons i mesons)

Exemples:

$$p + \bar{p} \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0 \quad (\text{permesa, conserva } BA, Q...)$$

$$p + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0 \quad (\text{prohibida, no conserva } BA)$$

$$p + p \rightarrow p + \bar{p} + p + p \quad (\text{permesa, conserva } BA, Q...)$$

$$p + p \rightarrow p + \bar{p} \quad (\text{prohibida, no conserva } BA, Q...)$$

El protó en ser el barió més lleuger ha de ser estable.

Simetries de sabor: SU(2) isospín

- Els hadrons **amb propietats semblants** (espín-paritat, etc.) i **masses quasi idèntiques** es poden agrupar i classificar en els denominats **multiplets d'isospín**, com per exemple:

$$(p, n) \quad (\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-) \quad (\pi^+, \pi^0, \pi^-) \quad (\Lambda) \quad (\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-)$$

- Un multiplet d'isospín es caracteritza per un número quàntic intern ***I*** anomenat isospín, que caracteritza a un vector ***I*** en l'espai d'isospín, amb terceres components I_3 associades a cada partícula del multiplet (cada partícula del multiplet té diferent I_3 , mateix ***I***).
- A cada hadró de càrrega Q (en unitats de la càrrega e de l'electró) se li assigna un valor (fórmula de Gell-Mann-Nishijima):

$$I_3 = Q - Y / 2, \quad Y = BA + S + C + B + T$$

Y : hipercàrrega

BA : número bariònic

S : estranyesa, C encant, B bellesa...

amb $BA = 1$ per a barions, $BA = -1$ per a antibarions i $BA = 0$ per als mesons.

- Exemples:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_3(p) = 1 - \frac{1}{2} = +\frac{1}{2} \\ I_3(n) = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow I_{p,n} = \frac{1}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_3(\pi^+) = 1 - 0 = +1 \\ I_3(\pi^0) = 0 - 0 = 0 \\ I_3(\pi^-) = -1 - 0 = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow I_\pi = 1$$

- **L'isospín es conserva en les interaccions fortes** (\rightarrow independència de la càrrega en la interacció forta entre quarks), però no en els processos electromagnètics ni en els dèbils:
 - $\eta'(958, I=0) \rightarrow \eta(547, I=0) + \pi^0(I=1)$ prohibit per interacció forta (no conserva ***I***).
 - $\eta' \rightarrow \eta + \pi^0 + \pi^0$ permès per interacció forta (conserva ***I***).

- La invariància d'isospín és una conseqüència de la no dependència de la interacció forta amb el sabor dels quarks. La interacció electromagnètica depèn de I_3 (Q).
- El tractament matemàtic de l'isospín és anàleg al de moment angular, grup SU(2), amb **dues diferències**:

- Les transformacions tenen lloc en un **espai intern**, en lloc de l'espai-temps.
- No té unitats.

- Exemple: estats d'isospín d'un sistema de dos nucleons: $I=1/2$

$$N \equiv \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$$

$$\zeta_{0,0}(1,2) \equiv |0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|p\rangle|n\rangle - |n\rangle|p\rangle) \quad \text{Estat singlet d'isospín, antisimètric, } I=0, \text{ deuteró.}$$

$$\zeta_{1,I_3}(1,2) \equiv \begin{cases} |1,1\rangle = |p\rangle|p\rangle \\ |1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|p\rangle|n\rangle + |n\rangle|p\rangle) \\ |1,-1\rangle = |n\rangle|n\rangle \end{cases} \quad \text{Estats triplet d'isospín, simètric, } I=1.$$

- Es pot generalitzar la funció doncs d'un estat de partícula incloent la funció de l'isospín:

$$\psi = \phi(\text{espacial})\chi(\text{espín})\zeta(\text{isospín})$$

- Si tenim un sistema constituït per partícules pertanyents a un mateix multiplet d'isospín, per exemple dos nucleons, $NN=(pp, pn, nn)$, es pot construir com:

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = \phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\chi_{s,m_s}(1,2)\zeta_{I,I_3}(1,2)$$

i com ara són partícules “idèntiques” i fermions, es podrà aplicar el **principi d'exclusió de Pauli generalitzat** → funció d'ona antisimètrica baix l'intercanvi de dos nucleons.

El mateix es podrà aplicar a les partícules constituïdes per quarks

El grup SU(2)

- És el grup especial de les matrius 2x2 unitàries i unimodulars:

$$D = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \quad DD^\dagger = D^\dagger D = 1 \quad \det D = 1$$

- Si D es unitari i unimodular:

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = D|\psi\rangle \quad \langle\phi||\psi\rangle = \langle\phi'||\psi'\rangle = \langle\phi|D^\dagger D|\psi\rangle \Rightarrow D^\dagger D = 1$$

$$\det(DD^\dagger) = (\det D)(\det D^\dagger) = (\det D)(\det D)^* = |\det D|^2 = 1 \Rightarrow \det D = \exp(i\phi), \quad \phi \text{ real}$$

- El grup amb $\phi=0$ ($\det D = 1$) és el grup especial SU(2).

- Per a una matriu hermítica X : $X = X^\dagger \Rightarrow \det[\exp(iX)] = \exp[i\text{Tr}(X)] = 1 \Rightarrow \text{Tr}(X) = 0$

$$D = \exp(iX), \text{ amb } X = X^\dagger \text{ i } \text{Tr} X = 0$$

\Rightarrow El grup SU(2) es pot generar a través de matrius hermítiques i de traça nul·la.

- Las matrius de Pauli són hermítiques i de traça nul·la:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \sigma_i \sigma_i^\dagger = \sigma_i^\dagger \sigma_i = 1, \quad \det \sigma_i = -1, \quad \text{Tr}(\sigma_i) = 0$$

Constitueixen a la seua vegada una representació (fonamental) del grup SU(2)

- Són una representació (fonamental, menor dimensió -2-) dels generadors del grup SU(2).

$$\text{Àlgebra del grup: } [J_i, J_k] = i\epsilon_{jkl}\hbar J_l \quad J_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$$

- Les representacions de major dimensió es poden formar a partir de la representació fonamental.
- Noteu que el grup R3 és equivalent a SU(2).

$$D = \exp\left(-\frac{i}{2}\vec{\phi}\cdot\vec{\sigma}\right) = \cos\frac{\theta}{2}I - i\sin\frac{\theta}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$$

Conseqüències de la conservació de l'isospín

$$[H_{\text{forta}}, I] = 0 \Rightarrow \text{conservació de l'isospín en I.F.}$$

- **Conseqüència 1:** La principal conseqüència de la conservació d'isospín en les interaccions fortes és que els hadrons **formen multiplets d'isospín, amb massa, paritat i espín similars.**
- Exemple: la massa del triplet de pions és la mateixa amb només un 4% de diferència (Coulomb)
- Massa d'una partícula \Rightarrow autovalor del Hamiltonià en el sistema de referència de la partícula:

$$H = H_{\text{forta}} + H_{\text{em}} + H_{\text{dèbil}}$$

Els hadrons no són estats purs de la I.F.

- Hi ha diferències en la massa per contribució e.m. i/o dèbil \Rightarrow la simetria d'isospín és aproximada.
- **Conseqüència 2:** Les **probabilitats de desintegració i seccions eficaces** de processos forts que involucren partícules **dels mateixos multiplets d'isospín** depenen només de les regles d'acoblament d'isospín (coeficients de Clebsch-Gordan). Així per a Γ o σ es tindrà:

Regla daurada de Fermi

$$\left\{ \begin{matrix} \Gamma \\ \sigma \end{matrix} \right\} \propto |\langle f | H | i \rangle|^2 \rho(E)$$

$\rho(E)$: densitat d'estats o espai de fase disponible per a la desintegració/reacció a energia E .

Com les masses d'un mateix multiplet són iguals $\Rightarrow \rho(E)$ és pràcticament el mateix.

■ Exemple 1. Desintegració de la ressonància $\Delta(1232) \rightarrow N \pi$

- La desintegració transcorre via interacció forta, doncs és una ressonància, conserva I
- Quatre estats de càrrega: $++, +, 0, -1 \Rightarrow I(\Delta) = 3/2, J=3/2$
- $I(N) = 1/2, I(\pi)=1 \Rightarrow I = 3/2, 1/2$ però **1/2 està prohibida** per conservació $I \Rightarrow I_f=3/2$

$$\begin{array}{lll}
 \Delta^+(1232) \rightarrow n\pi^+ & |n\pi^+\rangle \equiv \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle |1, 1\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle & A[\Delta^+(1232) \rightarrow n\pi^+] = \sqrt{\frac{1}{3}} A_{3/2} \\
 \Delta^+(1232) \rightarrow p\pi^0 & |p\pi^0\rangle \equiv \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle |1, 0\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle & A[\Delta^+(1232) \rightarrow p\pi^0] = \sqrt{\frac{2}{3}} A_{3/2} \\
 \Delta^+(1232) \equiv \left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle & \text{Prohibit per conservació de l'isospín en I.F.} & A_{3/2} = \left\langle \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \left| H \right| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\
 [\Delta^+] = uud & &
 \end{array}$$

$$\frac{\Gamma[\Delta^+(1232) \rightarrow p\pi^0]}{\Gamma[\Delta^+(1232) \rightarrow n\pi^+]} = \left| \frac{A[\Delta^+(1232) \rightarrow p\pi^0]}{A[\Delta^+(1232) \rightarrow n\pi^+]} \right|^2 = 2$$

Exemple 2. Seccions eficaces $\pi + N \rightarrow \pi + N$

$$(a) \pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p : |1,1\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle$$

$$(d) \pi^+ + n \rightarrow \pi^+ + n : |1,1\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$(b) \pi^0 + p \rightarrow \pi^0 + p : |1,0\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$(e) \pi^0 + n \rightarrow \pi^0 + n : |1,0\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$(c) \pi^- + p \rightarrow \pi^- + p : |1,-1\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$(f) \pi^- + n \rightarrow \pi^- + n : |1,-1\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle$$

$$(g) \pi^+ + n \rightarrow \pi^0 + p$$

$$(i) \pi^0 + n \rightarrow \pi^- + p$$

$$(h) \pi^0 + p \rightarrow \pi^+ + n$$

$$(j) \pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$$

Inelàstiques

$$A_a = A_f = A_{3/2}$$

$$A_c = A_d = \frac{1}{3} A_{3/2} + \frac{2}{3} A_{1/2}$$

$$A_b = A_e = \frac{2}{3} A_{3/2} + \frac{1}{3} A_{1/2}$$

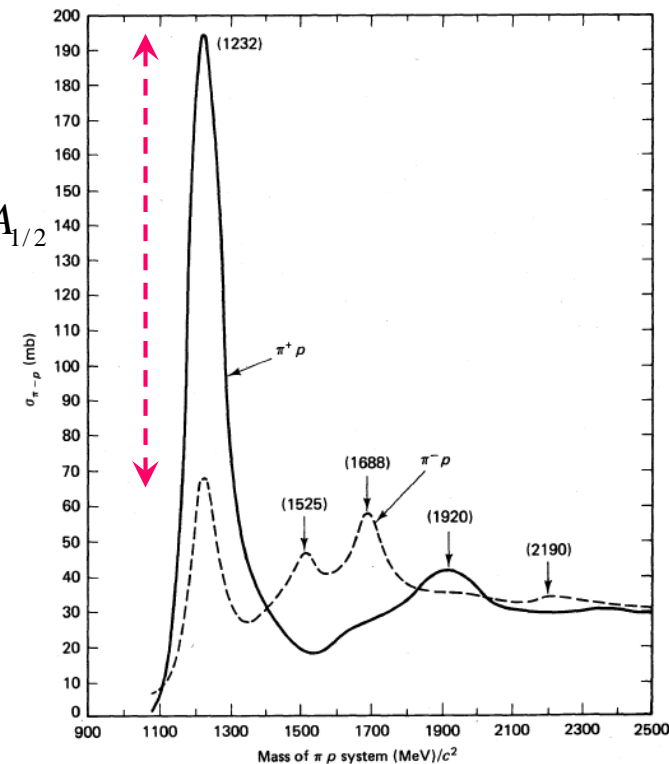
$$A_g = A_h = A_i = A_j = \frac{\sqrt{2}}{3} A_{3/2} - \frac{\sqrt{2}}{3} A_{1/2}$$

$$\sigma_a : \sigma_c : \sigma_j = 9 |A_{3/2}|^2 : |A_{3/2} + 2A_{1/2}|^2 : 2 |A_{3/2} - A_{1/2}|^2$$

$$A \sqrt{s} \approx 1232 \text{ MeV}, A_{3/2} \gg A_{1/2} \Rightarrow \sigma_a : \sigma_c : \sigma_j = 9 : 1 : 2$$

Sobre la ressonància

$$\Rightarrow \frac{\sigma_{tot}(\pi^+ + p)}{\sigma_{tot}(\pi^- + p)} = \frac{\sigma_a}{\sigma_c + \sigma_j} = 3$$



Altres exemples: $\pi^\pm + p \rightarrow K + \Sigma$

$N + N \rightarrow d + \pi$

Es conserva la tercera component I_3
(es conserva sabor) i per interacció
fora també ho fa l'isospín I

Simetries de sabor: l'estranyesa

$$[K^-] = \bar{u}s, K^+ = u\bar{s}, [\Sigma^-] = dds, [\Lambda] = uds$$

- S'introdueix l'estranyesa com un número quàntic que es conserva en les I.F. i E.M, però que es viola en una unitat en els processos dèbils, a fi d'explicar la fenomenologia de les partícules 'estranyes':

$$\pi^- + p \rightarrow n + K^+ + K^-$$

- Es produeixen copiosament i a parelles (producció associada):

$$S = 0 + 0 \rightarrow 0 + 1 - 1$$

- Es desintegren amb vides mitges massa llargues per que ho facen

via interacció forta (les desintegracions fortes tenen vides mitges molt curtes $\sim 10^{-23}$ s):

$$\pi^- + p \rightarrow \Sigma^- + K^+$$

Producció associada (I.F.)

$$\Sigma^- \rightarrow n + \pi^- \quad (\tau = 10^{-10} \text{ s})$$

Desintegració dèbil

$$K^+ \rightarrow \begin{cases} \mu^+ + \nu_\mu & (63.5\%) \\ \pi^+ + \pi^0 & (21.16\%) \end{cases} \quad (\tau = 1.24 \times 10^{-8} \text{ s})$$

Temps característics

Exemples

I. Forta $\tau \approx 10^{-20} - 10^{-24} \text{ s}$ $\Delta^+ \rightarrow p\pi^-$

I. E.M. $\tau \approx 10^{-16} - 10^{-20} \text{ s}$ $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$

I. Dèbil $\tau \approx 10^{-10} - 10^{-12} \text{ s}$ $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-, \mu^+\nu_\mu$

- Arbitràriament s'assigna l'estranyesa: $S(K^+) = 1 \Rightarrow S(K^-) = -1$

- La resta es determina per la seua conservació en les reaccions fortes.

- Els kaons són els mesons estranys més lleugers, per la qual cosa es desintegren dèbilment.

- Hi ha ressonàncies de les partícules estranyes (estats excitats) que són més pesades que els kaons i que es desintegren en mesons estranys lleugers sense violar estranyesa.

Exemple: $K^*(892) \rightarrow K + \pi$ ($\tau \approx 10^{-23} \text{ s}$, desintegració forta, conserva estranyesa).

- El barió estrany més lleuger és el $\Lambda(1116)$ ($\pi^+ + n \rightarrow \Lambda + K^+$) que no pot desintegrar-se fortament en protó-kaó ($m_p + m_K = 1431.9 \text{ MeV}$) (per conservació de l'energia)

i ho fa dèbilment violant estranyesa:

$$\Lambda \rightarrow p + \pi^- \quad 64\% \quad (\tau \approx 10^{-10} \text{ s})$$

$$\rightarrow n + \pi^0 \quad 36\%$$

Altres números quàntics de sabor

- Hui s'entén que el número quàntic anomenat estranyesa és la conservació del sabor “estrany”.

$S = -1$ (+1) si la partícula té un quark s (antiquark s)

- En aparèixer nous quarks també es poden associar nous números quàntics. En la taula següent s'indica el seu valor per als diferents quarks (els antiquarks tenen signes contraris):

Sabors ($S=1/2$, $B=1/3$)	Q/e	U	D	C	S	T	B	I	I_3	Massa (aprox.)
u (“up”)	+2/3	1	0	0	0	0	0	1/2	1/2	2 MeV/c ²
d (“down”)	-1/3	0	-1	0	0	0	0	1/2	-1/2	5 MeV/c ²
c (“charm”)	+2/3	0	0	1	0	0	0	0	0	1.3 GeV/c ²
s (“strange”)	-1/3	0	0	0	-1	0	0	0	0	0.1 MeV/c ²
t (“top” o “truth”)	+2/3	0	0	0	0	1	0	0	0	173 GeV/c ²
b (“bottom” o “beauty”)	-1/3	0	0	0	0	0	-1	0	0	4.2 GeV/c ²

Les interaccions fortes i e.m. **conserven sabor**, mentre que la dèbil el viola.

No sol parlar-se de números quàntics de sabor associats a u ni a d per raons històriques doncs estos quarks contribueixen a la simetria d'isospín.

Simetries discretes: Paritat P

- Transformació discreta que inverteix les coordenades espacials (reflexió respecte a l'origen):

$$P|\psi(\vec{r})\rangle = e^{i\alpha}|\psi(-\vec{r})\rangle \quad P^2|\psi(\vec{r})\rangle = e^{2i\alpha}|\psi(\vec{r})\rangle = |\psi(\vec{r})\rangle \Rightarrow P_a \equiv e^{i\alpha} = \pm 1$$

\Rightarrow El grup consisteix de sols dos elements, P y 1.

$\Rightarrow P^2 = 1$, y P unitari $\Rightarrow P$ es hermític ($P = P^\dagger$).

\Rightarrow La paritat del sistema pot ser $P_a = \pm 1$ (autovalors de P reals, donat que és hermític).

- La **paritat intrínseca** d'una partícula es defineix per a la partícula en repòs ($p = 0$):

$$\psi_p(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)/\hbar} \Rightarrow P\psi_p(\vec{r}, t) = P_a\psi_p(-\vec{r}, t) = P_a\psi_{-p}(\vec{r}, t)$$

- Per conveni, als **quarks** i als **leptons negatius** se'ls assigna $P = +1$.
- P (antiquarks) = $-P$ (quarks), P (leptons positius) = $-P$ (leptons negatius).

- Esta propietat és una conseqüència de l'equació de Dirac (MQ relativista).

- A més, tots els estats tenen una paritat associada al seu **moment angular orbital**:

$$P\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-1)^l R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^l \psi(\vec{r}) \Rightarrow \text{Paritat orbital} = (-1)^l$$

- La paritat és un **número quàntic multiplicatiu**:

- $P = e^{i\pi K} \Rightarrow$ l'operador K jugaria el paper de generador de la rotació discreta.
- Dos possibles autovalors: $K_a = 0, 1 \Rightarrow P_a = +1, -1$.
- Suma d'autovalors de $K_a \bmod 2 \Rightarrow$ multiplicació de P_a .

- La paritat es conserva rigorosament en les interaccions forta i electromagnètica, però es trenca (en grau màxim) en les interaccions dèbils (és la seua "signatura").

- En un sistema constituït per tres partícules quasi lliures (quasi sense interacció):

$$\psi = \phi_a \phi_b \phi_c \dots$$

l : moment angular orbital de a respecte del sistema bc

$$P(\psi) = P_a P_b P_c (-1)^l (-1)^{l'} \dots$$

l' : moment angular orbital de b respecte de c

$$P_{\text{mesó}} = P_{q_1} P_{q_2} (-1)^L = (-1)^{L+1}$$

$$P_{\overline{\text{mesó}}} = P_{\text{mesó}}$$

$$P_{\text{fermió} \overline{\text{fermió}}} = (-1)^{L+1}$$

$$P_{\overline{\text{bosó}}} = P_{\text{bosó}}$$

$$P_{\text{barió}} = P_{q_1} P_{q_2} P_{q_3} (-1)^{L_{12}} (-1)^{L_3}$$

$$P_{\overline{\text{barió}}} = -P_{\text{barió}}$$

$$P_{\overline{\text{fermió}}} = -P_{\text{fermió}}$$

- Per conveni les **paritats** del **protó**, el **neutró** i l'**hiperó** Λ s'assignen positives.
 - Per altres hadrons se determina mitjançant processos que conserven paritat (veure exemples).
- Per a estudiar el comportament d'un sistema baix paritat és necessari utilitzar observables que canvien baix una transformació P . Un exemple important és l'**operador d'helicitat**:

$$\Lambda = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{\sigma} \cdot \vec{p}|}$$

\Rightarrow Pseudoescalar (canvia de signe baix P)

$\Rightarrow \lambda = +1$ (dextrogir)

$\Rightarrow \lambda = -1$ (levogir)

$\Rightarrow \lambda = 0$ (transversal)

Experiment de Wu (^{60}Co)

Experiment de Garwin, Lederman i Weinrich

$$\langle \Lambda \rangle = \langle \psi | \Lambda | \psi \rangle = \langle \psi | \Lambda P^2 | \psi \rangle_{\Lambda P = -P \Lambda} =$$

$$-\langle \psi | P \Lambda P | \psi \rangle_{\substack{P \text{ conservada} \\ P \text{ Hermític}}} = -\langle \psi | \Lambda | \psi \rangle = -\langle \Lambda \rangle \Rightarrow \langle \Lambda \rangle = 0$$

- Inclús en absència de camps externs la velocitat d'una partícula defineix una direcció en qualsevol sistema de referència (projecció de l'espín en la direcció de moviment).
- Només les partícules sense massa poden tindre helicitat definida: per a una partícula amb massa es pot canviar a un sistema de referència en que esta es desplace en sentit contrari (quiralitat).

■ Exemple 1: paritat del mesó $\phi(1020)$ ($J^P = 1^-$)

□ Desintegració forta: $\phi(1^-) \rightarrow K^+(0^-)K^-(0^-)$ ($\Gamma = 4.43\text{MeV} \Rightarrow \tau = \frac{\hbar}{\Gamma} \approx 10^{-22}\text{s}$)

□ Conservació del moment angular: $\vec{J}(\phi) = \vec{1} = \underbrace{\vec{s}_1 + \vec{s}_2}_0 + \vec{L} \Rightarrow L = 1$

□ Conservació de la paritat: $P(\phi) = \underbrace{P(K^+)P(K^-)}_{+1}(-1)^L$

□ Per tant la paritat intrínseca del ϕ serà: $P(\phi) = (+1)(-1)^L = -1 \Rightarrow J^P(\phi) = 1^-$

■ Exemple 2: paritat del pió carregat ($J^P = 0^-$)

□ S'observa la reacció forta $\pi^- + d \rightarrow n + n$ però no s'observa $\pi^- + d \rightarrow n + n + \pi^0$

□ Estat inicial:

■ La captura del pió pel deuteró té lloc en onda S (pions de baixa energia) $\Rightarrow L_i = 0$.

■ $J^P(\text{deuteró}) = 1^+, J(\pi) = 0 \Rightarrow J_i = 1$.

□ Estat final:

■ Fermions idèntics \Rightarrow estat antisimètric. Dos possibilitats:

□ $S_f = 0$ (espín antisimètric), $L_f = 0$ (angular simètric) $\Rightarrow J_f = 0 \Rightarrow$ No és possible

□ $S_f = 1$ (espín simètric), $L_f = 1$ (angular antisimètric) $\Rightarrow J_f = 0, 1, 2 \Rightarrow$ Possible $J_f = J_i = 1$

□ Per tant:

$${}^3P_1 \left. \begin{array}{l} P(nn) = (-1)^{L_f} = -1 \\ P(d\pi) = P(\pi)P(d)(-1)^{L_i} = P(\pi) \end{array} \right\} \Rightarrow P(\pi) = -1 \Rightarrow J^P(\pi^\pm) = 0^-$$

- Exemple 3: paritat del barió $\Sigma^0(1192)$ ($J^P = 1/2^+$):
 - Desintegració electromagnètica: $\Sigma^0(\frac{1}{2}^?) \rightarrow \Lambda(\frac{1}{2}^+) + \gamma(1^-)$ ($\tau = 7,4 \times 10^{-20} \text{ s}$)
 - Conservació del moment angular: $\frac{\vec{1}}{2} = \frac{\vec{1}}{2} + \vec{L} \Rightarrow L = 0, 1$
 - Però els fotons no poder arrastrar moment angular nul $\Rightarrow L=1$.
 - Per conservació de paritat: $P(\Sigma) = P(\Lambda)P(\gamma)(-1)^L = (+1)(-1)(-1)^L = +1 \Rightarrow J^P(\Sigma, \Lambda) = 1/2^+$
 - Amés, experimentalment se verifica que els fotons tenen caràcter dipolar magnètic $M1 \Rightarrow$ no hi ha canvi de paritat (Tema 7)

Trencament de P

- Fins 1956, la conservació de P (simetria especular o esquerra-dreta) era un dogma, ja que s'havia demostrat la seua utilitat a més que es considerava que no era possible la ruptura d'una simetria espai-temporal.
- Eixe any, C.N. Yan i T.D. Lee, intentant comprendre l'anomenat **puzle τ - θ** , es van adonar que no hi existia cap experiment que fora sensible a una possible ruptura de P
 - En 1953 s'havia demostrat l'existència de dos partícules τ^+ i θ^+ que tenien propietats experimentalment compatibles (massa, càrrega elèctrica, espí i paritat) però es desintegren a $\pi^+ \pi^+ \pi^-$ i $\pi^+ \pi^0$ respectivament.
 - La solució proposada per Lee i Yang passava per admetre la ruptura de P en la desintegració d'una única partícula, hui coneguda com K^+ .
 - Desintegracions febles:

$K^+(0^-) \rightarrow \pi^+(0^-) + \pi^0(0^-)$	21%	(I)
$\rightarrow \pi^+(0^-) + \pi^+(0^-) + \pi^-(0^-)$	5.6%	(II)

$(\tau = 1.2 \times 10^{-8} \text{s})$
 - Conservació de moment: $L_f^{(I)} = 0$

$$L_{f,12}^{(II)} = L_{f,(12)3}^{(II)} = L_f^{(II)}$$
 - Paritat: $P_f^{(I)} = (-1)^2(-1)^0 = +1$

$$P_f^{(II)} = (-1)^3(-1)^1 = -1 \Rightarrow \text{es trenca } P.$$
- Van proposar diversos possibles experiments, entre ells el del ^{60}Co , i es van dirigir explícitament a C.S. Wu.
- L'essència de **l'experiment de Wu** és polaritzar ^{60}Co (alinear l'espí al llarg d'un eix de quantificació) i observar si les partícules β són emeses preferentment en un sentit o l'altre de l'eix.



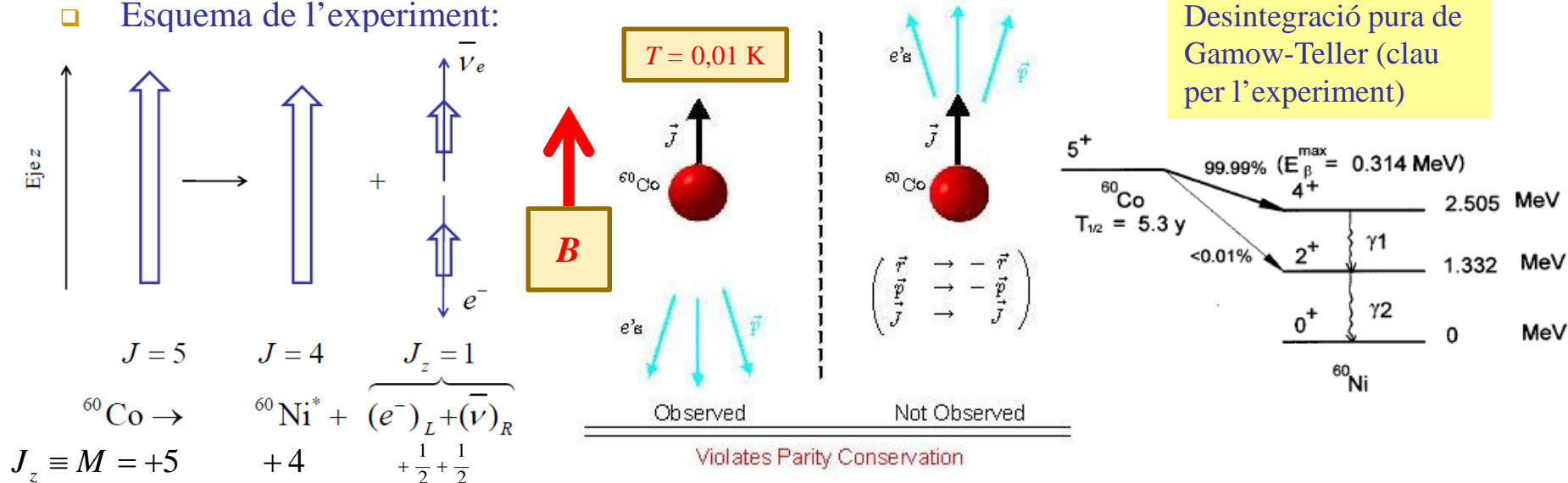
- La polarització s'obté orientant els moments magnètics dipolars μ del ^{60}Co en un camp magnètic intens (~ 100 T) i a molt baixa temperatura ($\sim \text{cK}$), doncs la probabilitat d'orientació és:

$$P = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-} = \tanh\left(-\frac{g\mu_N B J}{kT}\right) \approx 1 \text{ per } T \approx 0.01 \text{ K i } B \approx 100 \text{ T}$$

Experiment Parity Inversion

$$N_{\pm} \propto \exp\left(-\frac{E_{\pm}}{kT}\right), \quad E_{\pm} = \mp g\mu_N B J$$

- Esquema de l'experiment:



- Els espins dels leptons ixen paral·lels i els electrons ixen preferentment en sentit oposat al de polarització (no s'observa la imatge especular) \Rightarrow Violació de Paritat (màxima, ja que no existeix a la natura l'antineutrí levògir) \Rightarrow es prova la component axial (i per tant l'estructura V-A, a veure) de la interacció feble responsable de les desintegracions β :

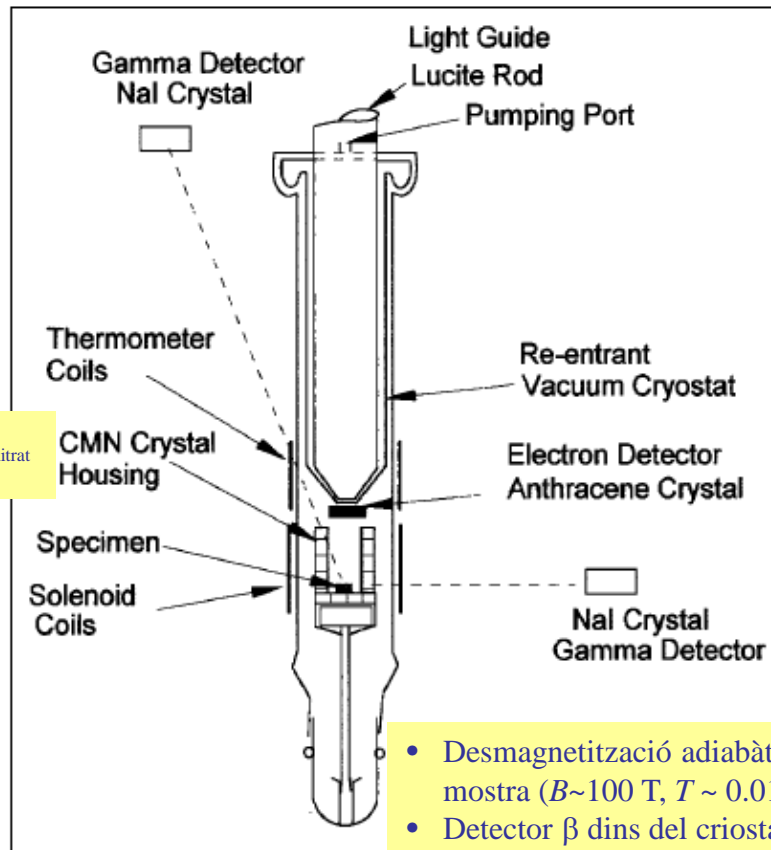
Helicitat
Cas R

$$\Lambda = \frac{\vec{J} \cdot \vec{p}}{|\vec{J} \cdot \vec{p}|}$$

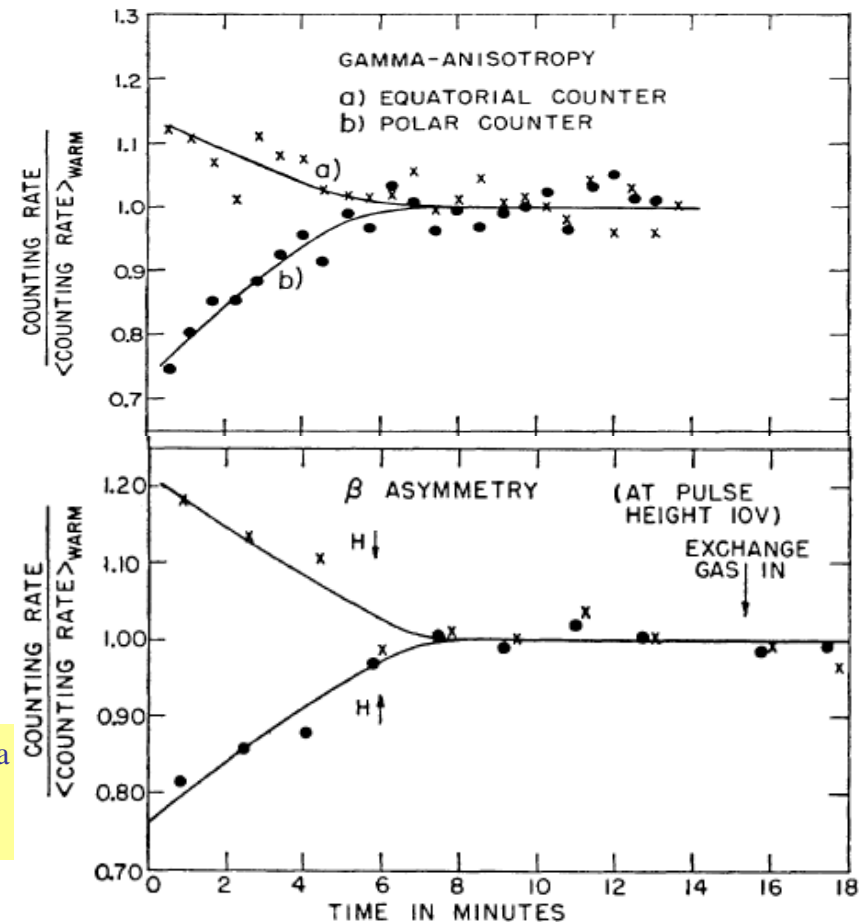
$$\langle \Lambda \rangle \xrightarrow{\vec{r} \rightarrow -\vec{r}} -\langle \Lambda \rangle \Rightarrow \langle \Lambda \rangle = -\langle \Lambda \rangle \text{ si } \langle \Lambda \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \text{Si } \langle \Lambda \rangle \neq 0 \Rightarrow \text{Violació de paritat}$$

□ **Detalls del muntatge experimental de Wu i el resultats obtinguts:**



- Desmagnetització adiabàtica de la mostra ($B \sim 100$ T, $T \sim 0.01$ K)
- Detector β dins del criostat



□ Quasi al mateix temps, **Garwin, Lederman i Weinrich** van demostrar també la violació de paritat era màxima en la desintegració (feble) del pió:

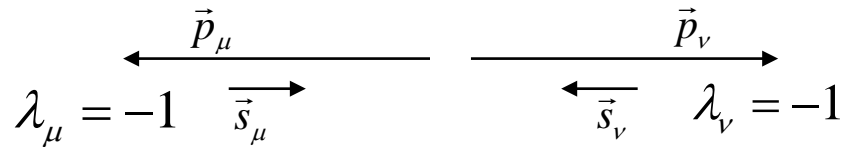
$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu, \quad \mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$$

- Desintegració **dèbil** del mesó π^+ : $\pi^+(0^-) \rightarrow \mu^+(\frac{1}{2}) + \nu_\mu(\frac{1}{2})$ ($\tau = 2.6 \times 10^{-8} \text{s}$)

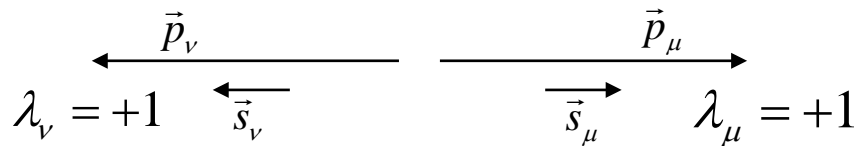
- Conservació del moment angular: $\vec{0} = \frac{\vec{1}}{2} + \frac{\vec{1}}{2} + \vec{L} \Rightarrow \begin{cases} L = 0 \\ \text{espins antiparalels } (S = 0) \end{cases}$

El moment angular orbital podria ser no nul, però seria perpendicular a la velocitat, pel que no afecta als arguments.

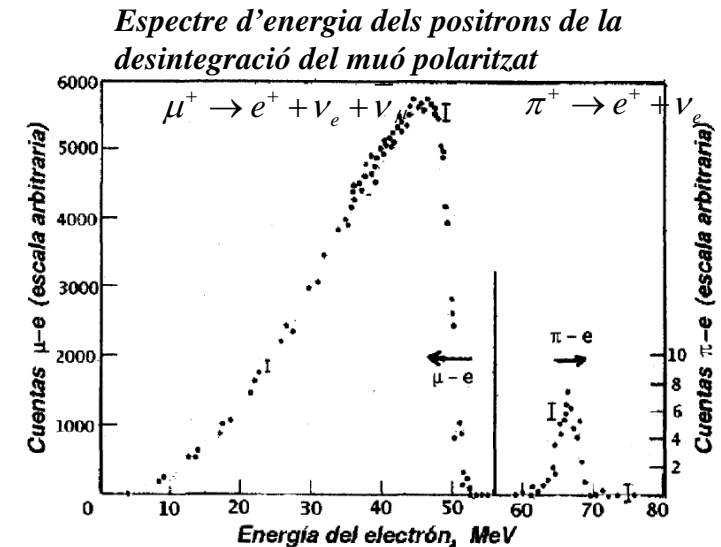
- El muó i el neutrí son col·lineals, i els seus espins son antiparalels:



- Experimentalment s'observa que els muons estan polaritzats levogirs \Rightarrow els neutrins són levogirs
- Baix una transformació de paritat el procés seria



- Però este procés no s'observa \Rightarrow **no hi ha neutrins dextrogirs \Rightarrow es trenca P màximament.**
- En altres processos (e.m.) s'han observat muons dextrogirs.
- Aquests experiments van suposar una revolució i van establir l'estructura V-A de la interacció feble (Tema 5), i la introducció de les transicions Gamow-Teller dels processos β (Tema 7).



Simetries discretes: Conjugació de la càrrega C

- L'operació de **conjugació de càrrega C** transforma una **partícula en la seua antipartícula**, deixant invariants el seu moment i el seu espín: Exemples

$$C|\psi(A, \vec{p}, \vec{\sigma})\rangle = e^{i\alpha} |\psi(\bar{A}, \vec{p}, \vec{\sigma})\rangle \quad A = \begin{cases} Q, BA, L_{e,\mu,\tau} & (\text{càrregues internes}) \\ I_3, S, C, T, B & (\text{sabor}) \end{cases}$$

$C|p\rangle \rightarrow |\bar{p}\rangle$
 $C|\pi^+\rangle \rightarrow |\pi^-\rangle$

- La conjugació de càrrega inverteix els signes dels números quàntics additius (càrregues internes) i els números quàntics de sabor. També canvia el signe del moment magnètic en canviar la càrrega (però no els espins).
- Valors propis de l'operador C :

$$C^2|\psi(A, \vec{p}, \vec{\sigma})\rangle = e^{2i\alpha} |\psi(A, \vec{p}, \vec{\sigma})\rangle = |\psi(A, \vec{p}, \vec{\sigma})\rangle \Rightarrow C_a \equiv e^{i\alpha} = \pm 1$$

\Rightarrow El grup consisteix de sols dos elements, C y 1 .

$\Rightarrow C^2 = 1$, C unitari i hermític.

\Rightarrow La conjugació de càrrega pot ser $C_a = \pm 1$.
- Un estat pot ser estat propi de C **només i només si totes les seues càrregues internes i números quàntics** de sabor són nuls (ni barions ni leptons ho són, docs $BA = \pm 1$, $L = \pm 1$)

- Només els **bosons completament neutres** respecte de totes les seues càrregues, que siguin a més les seues pròpies antipartícules ($S = I = B = C = 0$) poden ser estats propis de l'operador C , com ara:

$$\gamma, \pi^0, \eta^0, \eta', \rho^0, \omega^0, \phi, J/\psi, \Upsilon$$

$$C|\gamma\rangle = -|\gamma\rangle, \quad C|\pi^0\rangle = +|\pi^0\rangle$$

$$\pi^0, \eta^0, \eta', \rho^0, \phi \text{ són combinacions de } [u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}]$$

$$J/\psi \text{ és } [c\bar{c}] \text{ i } \Upsilon \text{ és } [b\bar{b}]$$

- Però es poden construir sistemes compostos de partícula-antipartícula que siguen propis de C :

- Pió-pió: $C \left| \pi^+ \pi^-; L \right\rangle = (-1)^L \left| \pi^+ \pi^-; L \right\rangle$

El factor de moment orbital apareix per l'intercanvi de posicions de la partícula amb l'antipartícula

- Fermió-antifermió: $C \left| f \bar{f}; {}^{2S+1}L_J \right\rangle = -(-1)^L (-1)^{S+1} \left| f \bar{f}; {}^{2S+1}L_J \right\rangle = (-1)^{L+S} \left| f \bar{f}; {}^{2S+1}L_J \right\rangle$

- Barió-antibarió: $C \left| B \bar{B}; {}^{2S+1}L_J \right\rangle = (-1)^{L+S} \left| B \bar{B}; {}^{2S+1}L_J \right\rangle$

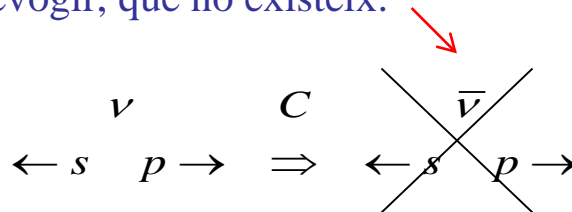
- Les interaccions fortes i electromagnètiques són invariants baix C , és a dir, conserven $C \rightarrow$

- Es produiran mesons amb “càrregues” (Q , BA , S ...) positives i negatives en proporcions iguals.

$$\begin{aligned} p + \bar{p} &\rightarrow \pi^+ + \pi^- + \dots \\ &\rightarrow K^+ + K^- + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta &\rightarrow \pi^+ + \pi^- + \gamma \\ &\rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0 \end{aligned}$$

- **Les interaccions dèbils** també **trenquen C** . Un neutrí levogir es transforma baix C en un anti-neutrino levogir, que no existeix:



Els neutrins que s'observen són levogirs.
Els antineutrins són dextrogirs,
tenen per tant helicitat definida

Tots els experiments mostren que **només hi ha neutrins levogirs i antineutrins dextrogirs** \Rightarrow màxima violació també de C .

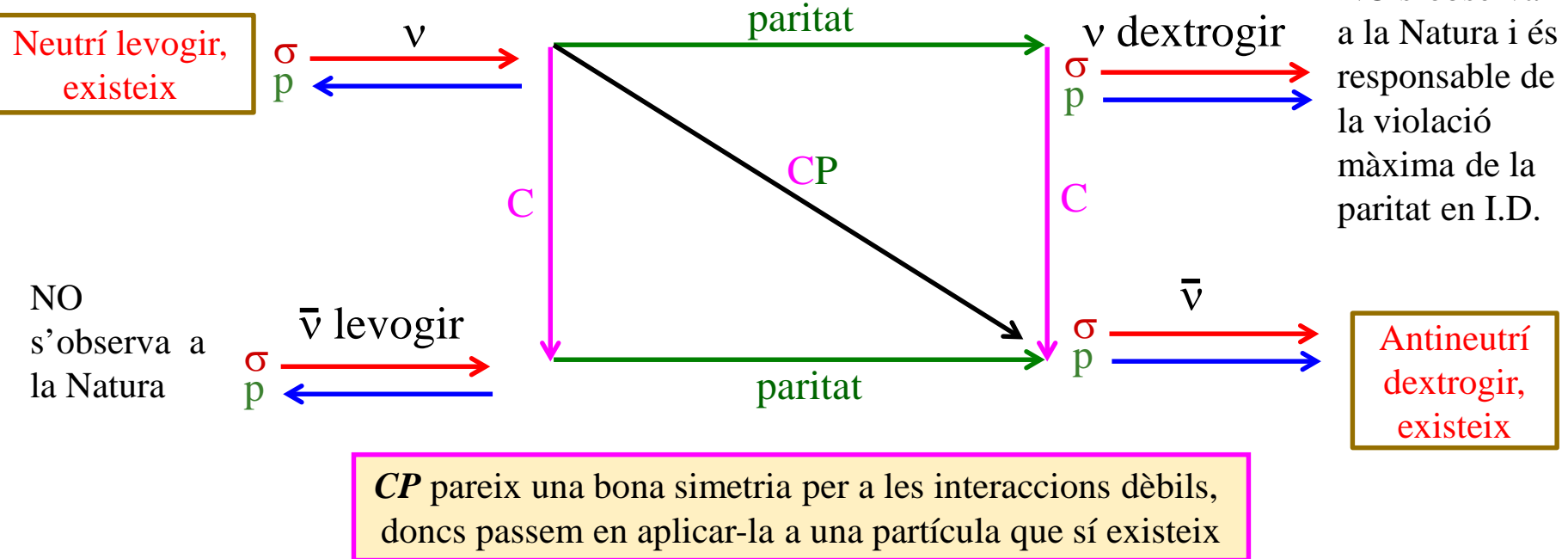
- Exemple 1: conjugació de càrrega del fotó ($J^{PC} = 1^{--}$).
 - El camp elèctric (i magnètic) canvien de signe baix $C \Rightarrow C_a = -1$ (doncs el canvi de signe de les càrregues elèctriques).

- Exemple 2: desintegració del π^0 ($\tau = 8.4 \times 10^{-17} \text{ s}$)
 - El pió neutre se desintegra en 2 fotons però no en 3 fotons: $\frac{\Gamma(\pi^0 \rightarrow 3\gamma)}{\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma)} < 3 \times 10^{-8}$
 - Com $C|\gamma\rangle = -|\gamma\rangle \Rightarrow C(\pi^0) = C(2\gamma) = (-1)^2 \Rightarrow C(\pi^0) = +1$
 - En general: $C(n\gamma) = (-1)^n$
 - En conseqüència, $\pi^0 \rightarrow 3\gamma$ està prohibit doncs C se conserva en las interacciones electromagnètiques

- Exemple 3: desintegració del mesón ω ($J^{PC} = 1^{--}$)
 - Se desintegra en el canal $\omega \rightarrow \pi^0 + \gamma$
 - $$C(\omega) = C(\pi^0)C(\gamma) = (+1)(-1) \Rightarrow C(\omega) = -1$$
 - Però no mai en $\omega \rightarrow \pi^0 + 2\gamma$

Simetria de CP

El trencament de la paritat, que és una simetria espacial, semblant en principi a les simetries espai-temporals (translacions espai-temporals, rotacions espacials, transformacions de Lorentz), i que són totalment conservades, va sorprendre als físics, que pensaren que la Natura era un poc més subtil i que potser seria CP la simetria que caldria que fora conservada. Així, tindrem:



Però hui sabem que es **troba també trencada**, encara que lleugerament...

Recordeu: C canvia els números quàntics interns, partícula per antipartícula, no canvia els externs (espín, paritat, massa, i energia, doncs així es defineix l'operador). La paritat P no altera els números quàntics interns, però canvia el moment $p \rightarrow -p$, no canvia l'espín (pseudovector)

Trencament de CP i asimetria matèria-antimatèria

- La sorpresa històrica de la violació de la paritat P per part de la interacció dèbil portà a pensar que la simetria correcta era CP , doncs CP actuant sobre un neutrí levogir proporciona un antineutrí dextrogir que sí existeix a la Natura.
- 1964.** J. Cronin, V. Fitch, R. Turlay i J. Christenson observen el trencament de la simetria de CP en kaons neutres en Brookhaven, NY, encara que la ruptura és xicoteta, de l'orde de 10^{-3} .
- Encara que un sorpresa major, immediatament es va identificar con un ingredient fonamental per explicar l'asimetria matèria-antimatèria (bariogènesi) en l'Univers (**Sakharov, 1967**).
- La composició en quarks dels kaons **produïts per interacció forta** és $[K^0] = d\bar{s}$, $[\bar{K}^0] = \bar{d}s$ que són estats propis de la **interacció forta** i pertanyen al nonet 0^- dels mesons estables.

- Fent actuar els operadors C i P sobre estos estats, tenim:

$$\left. \begin{array}{l} P|K^0\rangle = -|K^0\rangle, P|\bar{K}^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle, \text{ ja que } K^0 \text{ i } \bar{K}^0 \text{ són del octet } 0^- \\ C|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle, C|\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle, \text{ per definició de } C \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} CP|K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle \\ CP|\bar{K}^0\rangle = -|K^0\rangle \end{array} \right.$$

Els mateixos mesons del
puzle θ - τ ...

que no són propis de CP

- Tanmateix, podem construir estats propis de CP , mitjançant les combinacions lineals:

$$\begin{aligned} |K_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \\ |K_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CP|K_1\rangle &= +|K_1\rangle \\ CP|K_2\rangle &= -|K_2\rangle \end{aligned}$$

- Com que la producció de partícules estranyes per interacció forta conserva sabor, els estats K^0 , \bar{K}^0 produïts seran una combinació lineal dels estats propis de CP , K_1 i K_2 .

- Si la interacció dèbil conserva CP els estats finals als que decauen K_1 i K_2 han de tindre els mateixos autovalors de CP , $+1$ per K_1 i -1 per K_2 .
- Atès que els K decauen bàsicament a pions, hem de considerar les desintegracions a dos i tres pions.
- Per conservació de CP , es té que $K_1 \rightarrow \pi^+ \pi^-$, $K_2 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ (i també a pions neutres):
 - Donat que els K i els π són pseudoescalars (0^-):

$$\vec{J}_i = \vec{0} \rightarrow \vec{J}_f = \vec{0} + \vec{0} + \vec{L} \Rightarrow L = 0$$

$$\left. \begin{aligned} P(\pi^+ \pi^-) &= (-1)^2 (-1)^{L=0} = +1 \\ C(\pi^+ \pi^-) &= (-1)^{L=0} = +1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow CP(\pi^+ \pi^-) = +1$$

- En el cas dels tres pions:

$$\vec{J}_i = \vec{0} \rightarrow \vec{J}_f = \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} + \vec{L} + \vec{L}' \Rightarrow L = L'$$

$$\left. \begin{aligned} P(\pi^+ \pi^- \pi^0) &= (-1)^3 (-1)^L (-1)^{L'} = -1 \\ C(\pi^+ \pi^- \pi^0) &= (-1)^L (-1)^{L'} = +1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow CP(\pi^+ \pi^- \pi^0) = -1$$

- Considerem ara les diferències de massa dels productes de la desintegració (espai fàsic):

$$m(K_1) - 2m_\pi \approx 498 - 2 \times 140 \approx 218 \text{ MeV}/c^2$$

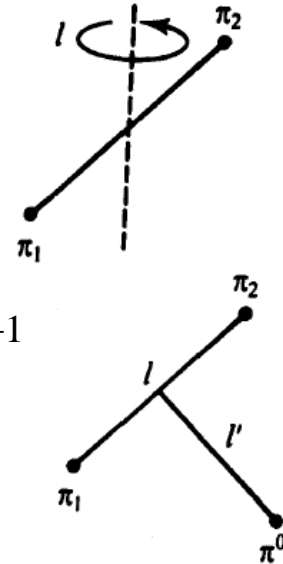
$$m(K_2) - 3m_\pi \approx 498 - 3 \times 140 \approx 78 \text{ MeV}/c^2$$

\Rightarrow la desintegració del K_1 és més ràpida després d'haver-se produït:

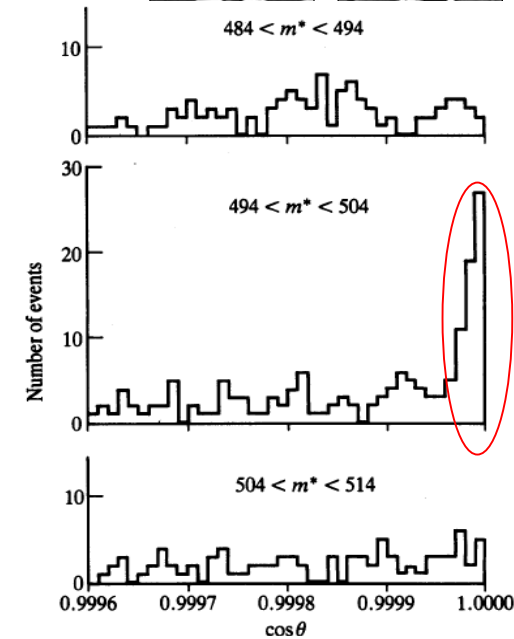
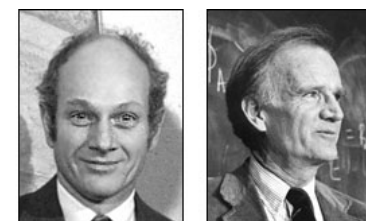
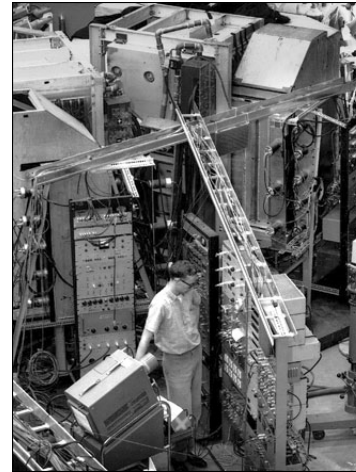
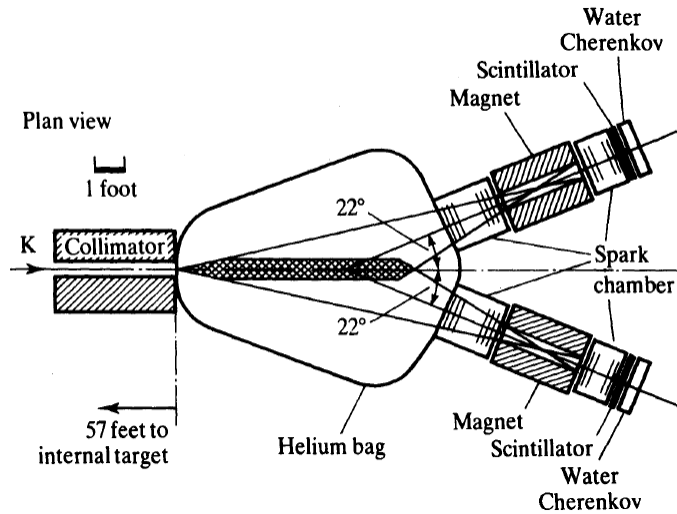
$$K_1 \equiv K_{S(hort)} \quad c\tau(K_S) = 2.68 \text{ cm}$$

$$K_2 \equiv K_{L(ong)} \quad c\tau(K_L) = 15.33 \text{ m}$$

- Per tant, si CP es conserva, esperem que a partir d'un cert recorregut (depèn del *boost*) només quedaran estats K_2 desintegrant-se a tres pions.



- A l'experiment de Cronin i Fitch els K se desintegren en el buit, i s'observa efectivament que les desintegracions a $\pi\pi$ es produïen a prop de la creació dels kaons (desintegració de K_S) mentre que les desintegracions a $\pi\pi\pi$ es produïen lluny (desintegració de K_L).



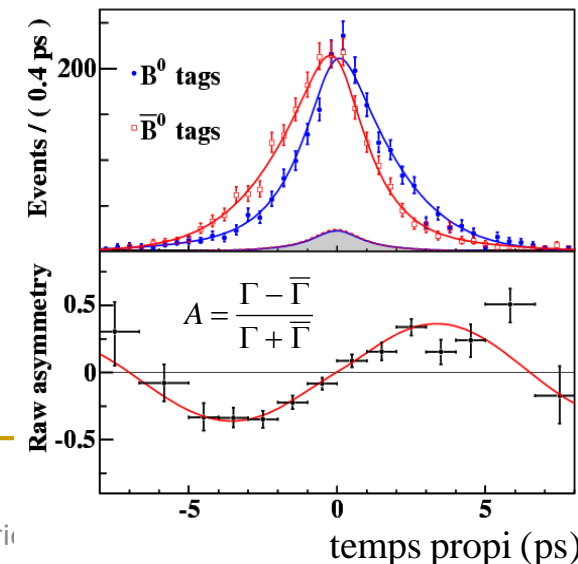
- Tanmateix, s'observa que a les distàncies grans, on el feix de K_S ja s'ha desintegrat encara es troben unes poques desintegracions a $\pi\pi$. La relació de desintegracions a grans distàncies és:

$$\Gamma(K_L \rightarrow \pi^+ \pi^-) / \Gamma(K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-) \approx 2 \times 10^{-3} \Rightarrow \text{Trencament de } CP$$

$$|K_{S/L}\rangle \propto |K_{1/2}\rangle + \varepsilon |K_{2/1}\rangle$$

- **2002.** El trencament de CP també s'observa en mesons B :

$$\Gamma(B^0 \rightarrow J/\psi K_S) \neq \Gamma(\bar{B}^0 \rightarrow J/\psi K_S) \quad \text{Autoestats de } CP \quad (\text{Exercici})$$



Oscil·lacions de sabor

- Un fenomen molt important i interessant associat als sistemes de mesons neutres (com kaons o mesons B i D) és el de l'oscil·lació de sabor (estranyesa, bellesa i encant) en la evolució temporal dels autoestats de sabor (interacció forta).
 - Predit per Gell-Mann i Pais al 1955, poc després d'introduir l'hipotesi de l'estranyesa.
- Els estats K^0 o \bar{K}^0 no són els estats d'evolució temporal, sinó que ho són combinacions lineals K_1 i K_2 , ja que l'estranyesa es produeix fortament però es desintegra dèbilment.

$$\left. \begin{aligned} |K_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \\ |K_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} |K^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_1\rangle + |K_2\rangle) \\ |\bar{K}^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_1\rangle - |K_2\rangle) \end{aligned} \right\}$$

$$\pi^- p \rightarrow \Lambda^0 K^0$$

$$[K^0] = d\bar{s}$$

$$[\Lambda] = uds$$

- Per a una partícula inestable amb massa m i vida mitja $\tau = \hbar / \Gamma$:

$$|\psi(t)\rangle = |\psi(0)\rangle e^{-imt} e^{-\Gamma t/2}$$

- En t la funció d'ones del feix inicial de K^0 serà doncs:

$$|K^0(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_1(t)\rangle + |K_2(t)\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|K_1(0)\rangle e^{-im_1 t} e^{-\frac{1}{2}\Gamma_1 t} + |K_2(0)\rangle e^{-im_2 t} e^{-\frac{1}{2}\Gamma_2 t} \right)$$

Evolució del $K_{S(short)}$

Evolució de $K_{L(long)}$

- Si ens oblidem de moment de les amplàries, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$, s'obté:

$$|K^0(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_1(0)\rangle e^{-im_1 t} + |K_2(0)\rangle e^{-im_2 t}) = \frac{1}{2}(e^{-im_1 t} + e^{-im_2 t})|K^0\rangle - (e^{-im_1 t} - e^{-im_2 t})|\bar{K}^0\rangle$$

$$|K^0\rangle \equiv |K^0(0)\rangle$$

$$|\bar{K}^0\rangle \equiv |\bar{K}^0(0)\rangle$$

- La probabilitat de trobar l'estat $K^0(t)$ en un estat K^0 ó \bar{K}^0 serà doncs:

$$|\langle K^0 | K^0(t) \rangle|^2 = \frac{1}{4} |e^{-im_1 t} + e^{-im_2 t}|^2 = \frac{1}{4} |1 + e^{-i\Delta m t}|^2 = \frac{1}{2} [1 + \cos(\Delta m t)] = \cos^2\left(\frac{\Delta m}{2} t\right) \quad \Delta m = m_2 - m_1$$

$$|\langle \bar{K}^0 | K^0(t) \rangle|^2 = \frac{1}{4} |e^{-im_1 t} - e^{-im_2 t}|^2 = \frac{1}{4} |1 - e^{-i\Delta m t}|^2 = \frac{1}{2} [1 - \cos(\Delta m t)] = \sin^2\left(\frac{\Delta m}{2} t\right) \quad T = \frac{2\pi}{\Delta m}$$

- Exactament com en el cas dels neutrinos...
- L'estat inicial del feix (K^0 ó \bar{K}^0) es determina mitjançant la reacció forta de producció.
- Però, com es pot establir si l'estat final (en t) correspon a un K^0 ó un \bar{K}^0 ?
 - Clarament no a través de la desintegració a dos o tres pions, per què estos estats seleccionen estats definits de CP definits i ara volem seleccionar estats d'estranyesa definida.
 - S'utilitzen desintegracions semi-leptòniques:

$$[K^0] = d\bar{s} \quad \bar{s} \rightarrow \bar{u} + l^+ + \nu_l \Rightarrow K^0 \rightarrow \pi^- + l^+ + \nu_l$$

$$[\bar{K}^0] = \bar{d}s \quad s \rightarrow u + l^- + \bar{\nu}_l \Rightarrow \bar{K}^0 \rightarrow \pi^+ + l^- + \bar{\nu}_l$$

- Si ara considerem que els kaons són inestables, incloent els factors anteriorment oblidats:

$$P^+(t) = \left| \langle K^0 | K^0(t) \rangle \right|^2 = \frac{1}{4} \left[e^{-\Gamma_1 t} + e^{-\Gamma_2 t} + 2e^{-\Gamma t} \cos(\Delta m t) \right]$$

$$P^-(t) = \left| \langle \bar{K}^0 | K^0(t) \rangle \right|^2 = \frac{1}{4} \left[e^{-\Gamma_1 t} + e^{-\Gamma_2 t} - 2e^{-\Gamma t} \cos(\Delta m t) \right]$$

que representen dues exponencials decreixents i un terme d'esmortiment (oscil·lació esmortida).

- Experimentalment** es mesura la asimetria de càrrega:

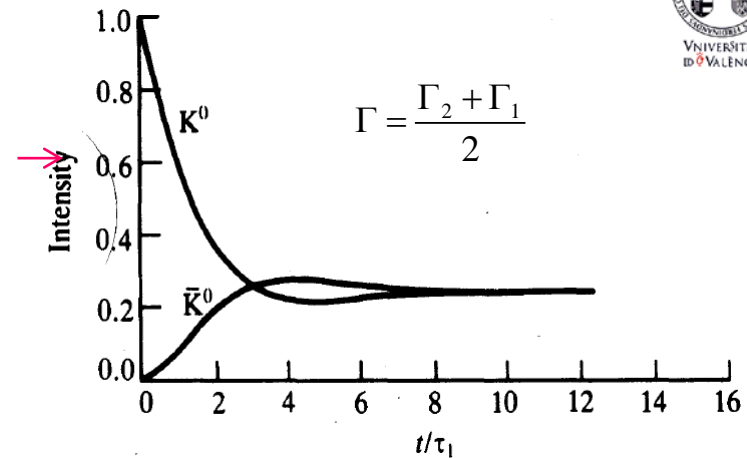
$$\delta(t) = \frac{P^+(t) - P^-(t)}{P^+(t) + P^-(t)} = \frac{\cos(\Delta m t)}{\cosh(\Delta \Gamma t / 2)} \approx e^{-\frac{\Gamma_1}{2} t} \cos(\Delta m t)$$

$$\Gamma_1 \gg \Gamma_2, t \gg \tau_1$$

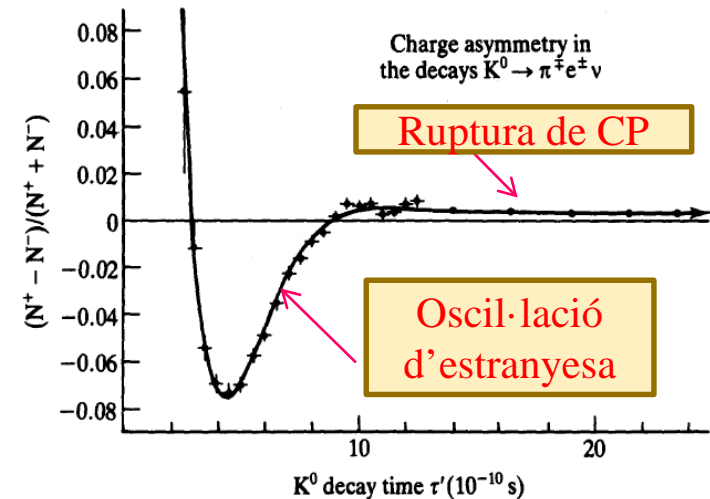
que com s'observa deuria tendir a zero, cosa que no fa degut a que els estats K_1 i K_2 no són propis de CP :

$$|K_{S/L}\rangle = \frac{|K_{1/2}\rangle + \varepsilon |K_{2/1}\rangle}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$$

- Veure Tema 5 per explicació a nivell fonamental (diagrames de Feynman de 2n ordre d'interacció feble).



Probabilitat $P(t)$ de trobar els estats K^0 i anti- K^0 a partir d'un feix pur de K^0



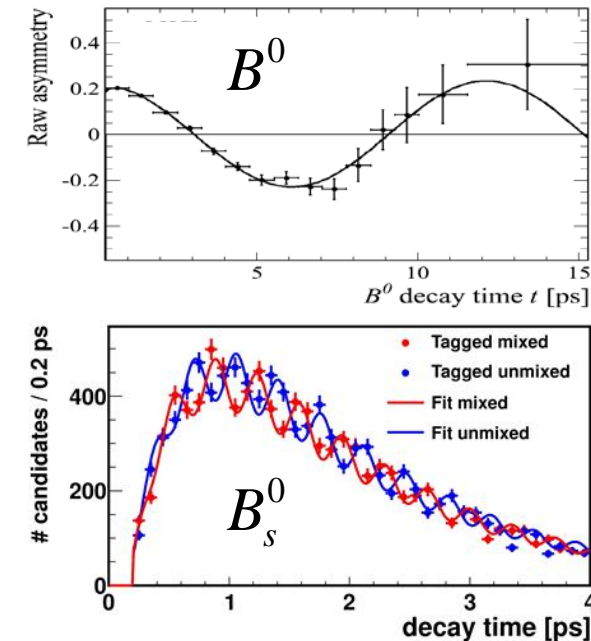
Asimetria de càrrega

- Com que es tracta d'un fenomen purament mecano-quàntic, conseqüència de la mescla de Cabibbo (veure Tema 5), es dona en qualsevol sistema de partícules neutres quan la partícula és diferent de l'antipartícula i hi ha una diferencia de masses \Rightarrow **oscil·lacions de sabor**.
- Fins avui, ha estat observat en els sistemes de mesons neutres K^0 [$d\bar{s}$], B^0 [$d\bar{b}$], B_s^0 [$s\bar{b}$] i D^0 [$c\bar{u}$]:

$$\Gamma = \frac{\hbar c}{\tau c} = \frac{197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{2.68 \times 10^4 \times 10^9 \text{ fm}} = 7.4 \times 10^{-3} \text{ meV}$$

$$\Gamma = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{90 \text{ ps}} = 0.011 \text{ ps}^{-1}$$

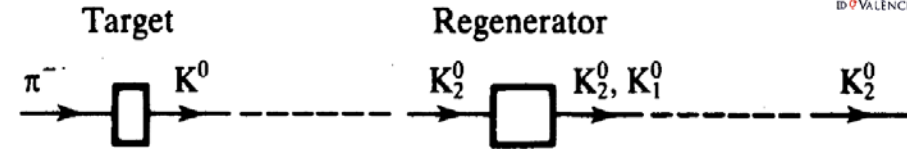
	τ (ps)	$c\tau$ (μm)	Γ (meV)	Γ (ps^{-1})	Δm (meV)	Δm (ps^{-1})
$K_2 (K_L)$	51×10^3	15.3×10^6	1.3×10^{-5}	2.0×10^{-5}	0.003483	0.005292
$K_1 (K_S)$	90	2.68×10^4	7.4×10^{-3}	0.011		
B_2	1.52	459	0.43	0.65	0.3337	0.510
B_1	1.52					
$B_{s,2}$	1.50	439	0.57	0.86	11.7	17.8
$B_{s,1}$	1.50					
$D_{s,2}$	0.41	123	1.61	2.4	0.0096	0.0145
$D_{s,1}$	0.41					



- L'oscil·lació és $\times 10^2$ més ràpida per a B^0 que per a kaons, i la de B_s^0 és unes 35 vegades més ràpida que per a B^0 . La del D^0 és molt lenta (en comparació a τ). Açò ve determinat pels diferents quarks que intervenen en els diagrames de Feynman (Tema 5).

Regeneració de kaons neutres

- L'existència dels estats K_1 y K_2 dona lloc a un altre fenomen conegut com regeneració de kaons (Pais i Piccioni, 1955).



- Suposem que tenim un feix pur de mesons K^0 , per tant contindrà una mescla de K_1 i K_2 :

$$|K^0(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|K_1^0(0)\rangle + |K_2^0(0)\rangle]$$

- Per a $t \gg \tau_1$ la component amb vida mitja més curta, el K_1 , s'haurà desintegrat i tindrem:

$$|K^0(t)\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2}} |K_2^0(0)\rangle e^{-\Gamma_2 t} \quad |K_2^0(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle)$$

- Si fem passar el feix per un material absorbent, com K^0 i \bar{K}^0 tenen diferent seccions eficaces d'interacció forta amb el material (major per a \bar{K}^0 , $S = -1$)

\Rightarrow la component \bar{K}^0 s'absorbirà més ràpidament:

$$|K^0(t)\rangle \approx \frac{1}{2} \left(f |K^0\rangle + \bar{f} |\bar{K}^0\rangle \right) e^{-\Gamma_2 t} \quad \bar{f} < f < 1$$

- En termes dels auto-estats de CP s'escriu com:

$$|K^0(t)\rangle \approx \frac{1}{2} \left[(f - \bar{f}) |K_1^0\rangle + (f + \bar{f}) |K_2^0\rangle \right] e^{-\Gamma_2 t}$$

\Rightarrow Com $\bar{f} \neq f$, l'auto-estat vida mitja curta K_1 s'ha regenerat.

- Aquest fenomen ha estat observat experimentalment en innumerables ocasions i de fet és un efecte per corregir i tindre en consideració en molts experiments.

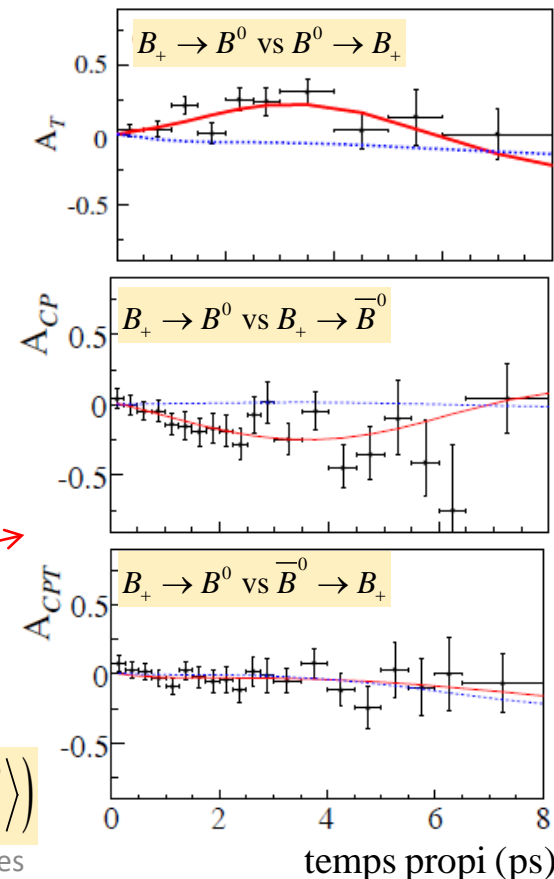
Inversió temporal T i el teorema de CPT

- L'operador inversió temporal T realitza la transformació $T|\psi(t)\rangle \rightarrow |\psi(-t)\rangle$, deixant invariables les coordenades espacials.
- Al contrari dels operadors P i C , T és un operador anti-unitari (i no hermític), per la qual cosa no té número quàntic associat.
- La invariància T implica que per cada procés ni ha ú idèntic invertit temporal \Rightarrow

Balanç detallat: La transició $i \rightarrow f$ té que tindre lloc amb la mateixa probabilitat que la transició invertida, $f \rightarrow i$, amb moments i moments angulars canviats de signe.

- L'operació combinada de P , C i T es una transformació de simetria fonamental, basada en la invariància del grup de Lorentz (boosts + rotacions) de la TQC \Rightarrow **Teorema de CPT** .
- Conseqüències:
 - Les masses i vides mitges de les partícules i antipartícules són les mateixes.
 - Si qualsevol de les simetries P , C o T , o el producte de dos d'elles està rot \Rightarrow el producte de les altres, o la tercera té que compensar eixa ruptura.
 - \Rightarrow Evidències directes al 2000 amb kaons (CPLEAR), observat al 2012 amb mesons B (BABAR).
- No existeix fins hui en dia cap indicació de trencament de CPT .
- Però, les teories GUT prediuen la seua ruptura...

$$|B_{\pm}\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(|B^0\rangle \pm |\bar{B}^0\rangle)$$



Tema 5:

Les interaccions fonamentals

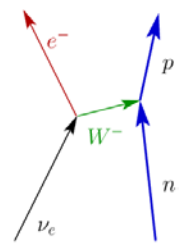
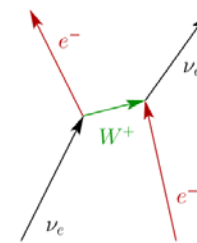
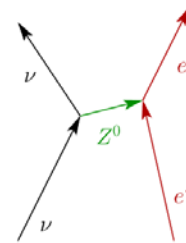
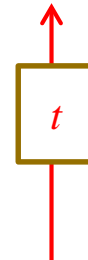
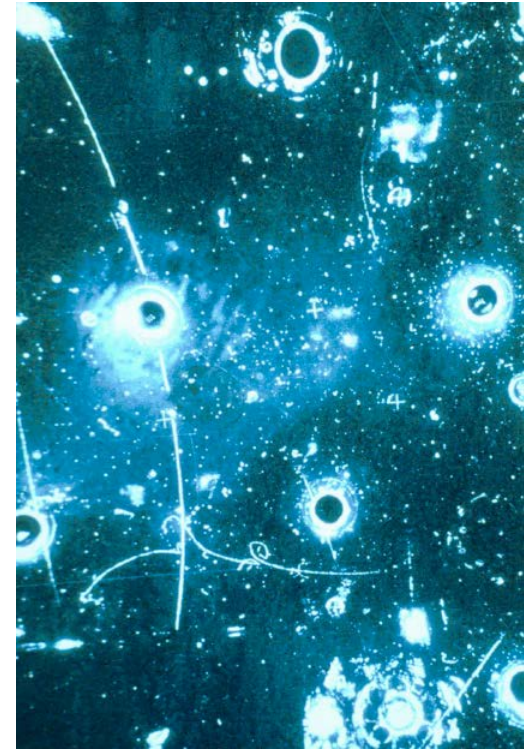
1. MQ relativista

- 1.1 Equació de Klein-Gordon
- 1.2 Equació de Dirac
- 1.3 Solucions de partícula lliure: espinors de Dirac
- 1.4 Interpretació dels espinors de Dirac
- 1.5 Helicitat dels espinors de Dirac
- 1.6 Paritat dels espinors de Dirac
- 1.7 Solució de partícula lliure sense massa. Quiralitat
- 1.8 L'electromagnetisme clàssic: el fotó
- 1.9 Invariància gauge del Lagrangià de Dirac

2. TQC i diagrames de Feynman

- 2.1 Teoria quàntica de camps: cas de QED
- 2.2 Sèrie de Born i diagrames de Feynman
- 2.3 Propagador de la interacció
- 2.4 Diagrames de Feynman
- 2.5 Regles de Feynman de la QED
- 2.6 Exemples
- 2.7 Secció eficaç i probabilitat de desintegració

Descobriments dels corrents neutres



Neutral current

Charged current

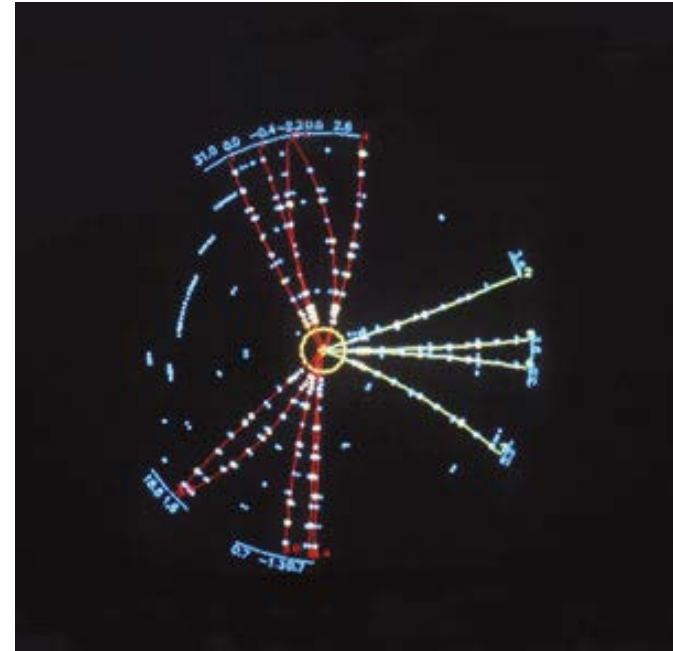
Tema 5:

Les interaccions fonamentals (cont)

3. Les interaccions fonamentals

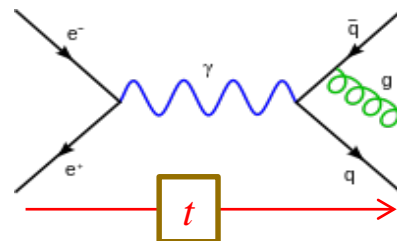
- 3.1 Electrodinàmica quàntica (QED)
- 3.2 Evolució de la constant d'acoblament de QED
- 3.3 Invariància gauge generalitzada
- 3.4 Cromodinàmica quàntica (QCD)
- 3.5 Evolució de la constant d'acoblament de QCD
- 3.6 Descobriment dels gluons
- 3.7 Interaccions dèbils i universalitat
- 3.8 Els mecanismes GIM i KM
- 3.9 Exemples de processos dèbils
- 3.10 Intensitat de la interacció dèbil
- 3.11 Descobriment dels corrents neutres
- 3.12 Descobriment dels bosons W^\pm i Z
- 3.15 Estudi detallat dels portadors de la força dèbil
- 3.16 Descobriment del bosó de Higgs
- 3.17 Resum de forces fonamentals i els seus portadors

Descobriment dels gluons



4. El model estàndard

- 4.1 Qüestions obertes en física de partícules
- 4.2 La unificació de les forces



1. MQ relativista

Equació de Klein-Gordon

$$\hbar = c = 1$$

$$H\phi(\vec{x}, t) = E\phi(\vec{x}, t)$$

- L'equació de Schrödinger es construeix a partir de l'associació entre variables dinàmiques i operadors en la relació quàntica no relativista d'energia-moment:

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}, \quad E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow -\frac{1}{2m} \vec{\nabla}^2 \phi = i \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \phi(\vec{x}, t) = N e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}$$



Erwin Schrödinger

- Equació de continuïtat: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$, $\rho = \phi \phi^*$, $\vec{J} = -\frac{i}{2m} (\phi^* \vec{\nabla} \phi - \phi \vec{\nabla} \phi^*)$

- Per a l'ona plana: $\rho = |N|^2$, $\vec{J} = -\vec{p} |N|^2 / m$

- O. Klein realitza el primer intent de compatibilitzar MQ i relativitat especial:

$$E^2 = p^2 + m^2 \Rightarrow (\nabla^2 - m^2) \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \Rightarrow \phi(\vec{x}, t) = N e^{\mp i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

- L'equació de continuïtat associada és:

$$\rho = i \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right), \quad \vec{J} = -i (\phi^* \vec{\nabla} \phi - \phi \vec{\nabla} \phi^*)$$



Oskar Klein

- Per a una ona plana la solució de l'equació de KG de partícula lliure verifica que:

$$\rho = \pm 2E |N|^2, \quad \vec{J} = 2\vec{p} |N|^2$$

\Rightarrow Solucions d'energia negativa (associades a $E = \pm \sqrt{p^2 + m^2}$) i densitats de probabilitat < 0 !

\Rightarrow Les funcions d'ona són escalars i no poden incorporar l'espí dels electrons trobat poc abans.

Equació de Dirac



Paul Dirac

- Dirac (1928) intenta resoldre el 'problema' de KG imposant la simetria en el tractament de l'energia i el moment que havia establert la relativitat. A més, imposa que l'equació siga **covariant relativista (Lorentz)**: $p_\mu = (E, -\vec{p})$, $x_\mu = (t, -\vec{r})$

□ Si H és lineal en $E \Rightarrow H$ cal que també siga lineal en el moment p .

□ Equivalentment: Si H és lineal en la derivada temporal t

\Rightarrow també caldrà que siga lineal en les derivades espacials (no tindrem solucions dobles):

$$\left. \begin{array}{l} H\psi(\vec{x}, t) = E\psi(\vec{x}, t) \\ \text{amb } H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m \end{array} \right\} \Rightarrow \left[-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m \right] \psi(\vec{x}, t) = i \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad \vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

- Els coeficients α_i i β tenen que fer complir la relació relativista $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$:

$$H^2\psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)^2\psi = \left(\sum_i \alpha_i p_i + \beta m \right) \left(\sum_j \alpha_j p_j + \beta m \right) \psi$$

$$= \left[\sum_i \underbrace{\alpha_i^2}_1 p_i^2 + \sum_{i < j} \underbrace{(\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i)}_0 p_i p_j + \sum_i \underbrace{(\alpha_i \beta + \beta \alpha_i)}_0 p_i m + \underbrace{\beta^2}_1 m^2 \right] \psi = (\vec{p}^2 + m^2) \psi$$

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} I$$

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0$$

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = I$$

Relacions d'anticommutació i normalització

- Com que H és hermític, $\alpha_i^\dagger = \alpha_i$ $\beta^\dagger = \beta$
- Com que α_i i β no conmuten no poden ser números, sinó matrius $n \times n$.
- L'equació de Dirac és per tant una **equació matricial de n equacions diferencials acoblades** de primer orde, que reproduïx la relació relativista per component:

$$\psi(\vec{x}, t) = \begin{cases} \psi_1(\vec{x}, t) \\ \vdots \\ \psi_n(\vec{x}, t) \end{cases}$$

- La **menor dimensió** possible és $n = 4$ (correspondrà a partícules de $s = 1/2$).
- Una **representació** convencional de les matrius α_i i β per a esta dimensió és la de **Dirac-Pauli**:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

on s'han usat les matrius hermítiques de Pauli σ , i per tant H és hermític.

- Les densitats de probabilitat i de corrent s'extrauen de l'equació de continuïtat:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 ; \quad \rho = \psi^\dagger \psi, \quad J_i = \psi^\dagger \alpha_i \psi$$

□ En este cas es verifica $\rho = \psi^\dagger \psi > 0$ (veure pàgs. següents).

- L'equació de Dirac en forma covariant s'escriu mitjançant les matrius γ de Dirac:

$$\gamma^\mu = (\beta, \beta \vec{\alpha})$$

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu} I & \gamma^{\mu\dagger} &= \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 & \gamma^{0\dagger} &= \gamma^0 = \gamma^{0T} \\ (\gamma^0)^2 &= I & \gamma^{k\dagger} &= -\gamma^k & (\gamma^k)^2 &= -I \quad k=1,2,3 \\ \left\{ \begin{aligned} \gamma^{2\dagger} &= -\gamma^{2T} \\ \gamma^{\mu\dagger} &= \gamma^{\mu T}, \mu \neq 2 \end{aligned} \right. & \gamma^{\mu T} &= (-1)^\mu \gamma^\mu & & \end{aligned} \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

- En representació de **Dirac-Pauli**:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

- L'equació de Dirac en forma covariant relativista és:

$$\beta \left[-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m \right] \psi = \beta i \frac{\partial \psi}{\partial t} \Rightarrow \left[-i \beta \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + Im - i \beta \frac{\partial}{\partial t} \right] \psi = 0 \Rightarrow \boxed{(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0}$$

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \quad p^\mu = i \partial^\mu = (E, \vec{p})$$

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \quad p_\mu = (E, -\vec{p})$$

- Compleix l'equació de continuïtat:

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

$$J^\mu = (\rho, \vec{J}) = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$$

$$\begin{cases} J^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi = \rho > 0 \\ J^{k \neq 0} = \bar{\psi} \gamma^k \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^k \psi = \psi^\dagger \alpha_k \psi = J_k \end{cases}$$

- El **Lagrangià** (de partícula lliure ací) ve donat per:

$$\boxed{L = \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi}$$

ja que al aplicar-li les equacions d'Euler-Lagrange al camp conjugat, $\frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right] = 0$,
obtenim:

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}} = +i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \psi, \quad \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = 0 \Rightarrow (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0$$

Solucions de partícula lliure: espinors de Dirac

- Quina és l'estructura de les **funcions d'ona plana** solucions de l'equació de Dirac? Siga

$$\psi = u(\vec{p})e^{-ip_\mu x^\mu} = u(\vec{p})e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

[Tot hi es equivalent amb la solució $u(\vec{p})e^{+i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}$]

$u(\vec{p})$ és un espinor de quatre components (espinor de Dirac)

No es transforma com un quadrivector relativista, representen les funcions d'ona d'espín o espinor

- L'equació de Dirac per al bi-espinor és:

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)u(\vec{p}) = E u(\vec{p})$$

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(\vec{p}) = 0$$

- Per a una partícula en repòs, la forma explícita d'esta equació és:

[Equacions d'autovalors]

$$\begin{pmatrix} mI & 0 \\ 0 & -mI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} u_A \text{ i } u_B \text{ són espinors} \\ \text{de dos components} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} mu_A = Eu_A \\ -mu_B = Eu_B \end{cases}$$

Cada component verifica l'equació d' $E-p$ per $p=0$: $E=m$

- S'obtenen 4 solucions, 2 d'energia positiva i 2 d'energia negativa:

$$E = m > 0: u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E = -m < 0: u^{(3)} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Com en el cas de KG, s'arriba a solucions de $E > 0$ i $E < 0$.
- Les dues solucions per cada E estan lligades a 2 possibles orientacions del vector espí de la partícula en repòs (més d'açò de seguit).

- Per al cas de partícules en moviment, l'equació de Dirac seria:

$$\begin{pmatrix} mI & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -mI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} mu_A + \vec{\sigma} \cdot \vec{p} u_B = Eu_A \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} u_A - mu_B = Eu_B \end{cases}$$

Equacions acoblades
per a u_A i u_B

sobre les que volem trobar les solucions compatibles amb el límit $\vec{p} \rightarrow 0$.

- Considerant primer les solucions d'energia positiva i prenent pels espinors:

$$u_A^{(s)} = \chi^{(s)} \Rightarrow u_B^{(s)} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \chi^{(s)}, \quad s = 1, 2$$

$$\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Les solucions d'energia negativa es troben de la mateixa forma, prenent $\begin{cases} u_B^{(s+2)} = \chi^{(s)} \\ E \rightarrow -|E| \end{cases}$

Moment $-\vec{p}$

$$E > 0: u^{(s)} = N \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \chi^{(s)} \end{pmatrix}$$

$$E < 0: u^{(s+2)} = N \begin{pmatrix} -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|E| + m} \chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix}$$

- Els espinors són ortogonals: $u^{(r)+} u^{(s)} = 0$, $r \neq s$, amb $r, s = 1, 2, 3, 4$

- I les normalitzacions usals són:

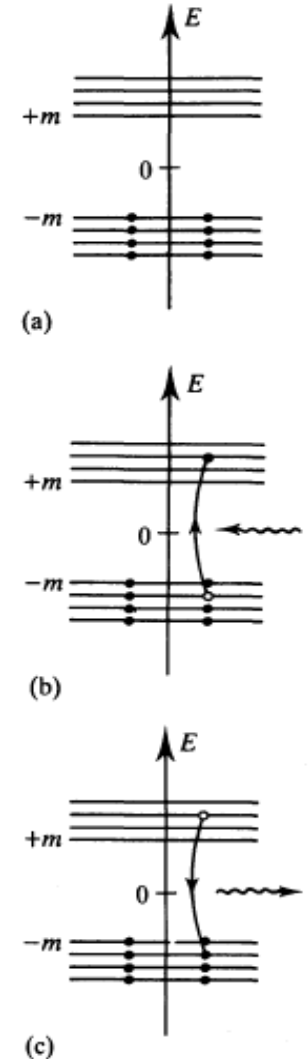
- Normalització a la unitat: $u^{(s)+} u^{(s)} = 1, \Rightarrow N = \sqrt{\frac{|E| + m}{2|E|}}$

- Normalització covariant: $\int \psi^\dagger \psi dV = 2|E| \Rightarrow u^{(s)+} u^{(s)} = 2|E| \Rightarrow N = \sqrt{|E| + m}$

Interpretació dels espinors de Dirac

- **Interpretació de Dirac (1930):** teoria electró-forat
 - El buit està constituït per un mar infinit d'estats d' $E < 0$ ocupats per electrons que no poden col·lapsar pel P.H. (els electrons són fermions). Els electrons d' $E > 0$ tampoc poden col·lapsar en els nivells d' $E < 0$ pel P.H.
 - Es pot crear un forat en el mar per excitació d'un electró d' $E < 0$ a un estat d'energia $E > 0$, creant un parell electró-forat.
 - L'absència d'un electró de càrrega $e < 0$ i energia $E < 0$ s'interpreta com la presència d'una antipartícula (el positró) de càrrega $e > 0$ i energia $E > 0$.

⇒ **Predicció del positró**, trobat per Anderson (1932).



- Pauli i Weisskopf reviu en 1934 l'equació de KG i interpreten la corrent de probabilitat com corrent densitat de càrrega. Per al electró:

$$J^\mu = (\rho, \vec{J}) = -2 |e| (E, \vec{p}) |N|^2$$

- **Interpretació de Stückelberg (1941) i Feynman (1948)**: les solucions d' $E < 0$ descriuen partícules que es propaguen cap arrere en el temps ($-t, -\vec{p}$), i representen antipartícules d' $E > 0$ que es propaguen endavant en el temps (t, \vec{p}):

$$u(\vec{p}) e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

$$J^\mu = (\rho, \vec{J}) = 2q(E, \vec{p}) |N|^2$$

Partícula amb $q = -|e|$, $E = |E| > 0$, \vec{p} , $t = |t| > 0$

$$u(\vec{p}) e^{-i(|E||t| - \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

$$J^\mu = (\rho, \vec{J}) = -2 |e| (|E|, \vec{p}) |N|^2$$

Partícula amb $q = -|e|$, $E = -|E| < 0$, $-\vec{p}$, $t = -|t| < 0$

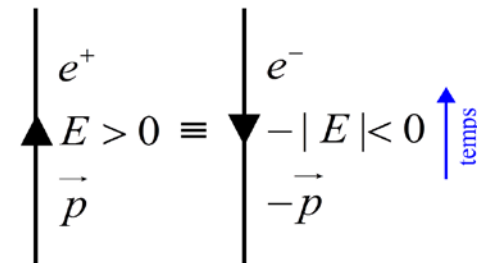
$$u(-\vec{p}) e^{-i(|E||t| - (-\vec{p}) \cdot \vec{x})} \equiv u(\vec{p}) e^{-i(|E||t| - \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

$$J^\mu = (\rho, \vec{J}) = 2 |e| (|E|, \vec{p}) |N|^2$$

⇓

Antipartícula amb $q = +|e|$, $E = |E| > 0$, \vec{p} , $t = |t| > 0$

Una antipartícula, movent-se cap a temps creixents i amb energia positiva, és equivalent a una solució d'energia negativa movent-se cap arrere en el temps. Este resultat es troba a la base dels **diagrames de Feynman**



- Per tant, les solucions $u^{(1,2)}$ i $u^{(3,4)}$ s'associen a la partícula i l'antipartícula:

$$u^{(1,2)}(\vec{p})e^{-ip_\mu x^\mu} \quad u^{(3,4)}(-\vec{p})e^{-i(-p_\mu)x^\mu} \equiv v^{(2,1)}(\vec{p})e^{ip_\mu x^\mu} \quad p_0 = E > 0$$

- Els espinors $v^{(2,1)}(p)$ son la manera usual de referir-se a les antipartícules:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(\vec{p}) = 0 \xrightarrow{p_\mu \rightarrow -p_\mu} (-\gamma^\mu p_\mu - m)u(-\vec{p}) = 0 \Rightarrow (\gamma^\mu p_\mu + m)v(\vec{p}) = 0$$

- La identificació dels índexs 1,2 amb els d'energia negativa 4,3 és convencional, però té una raó: per moment nul, $v^{(1)}$ és espín *down* i $v^{(2)}$ *up*, doncs l'antipartícula de l'electró amb espí *up* [*down*] - $u^{(1)}$ [$u^{(2)}$] - és el positró amb espí *down* [*up*] - $v^{(1)}$ [$v^{(2)}$] -.

- La funció d'ona per a una antipartícula ve donada per $\psi_c = C\psi^*$.
- C és l'operador conjugació de càrrega, que en representació de Dirac-Pauli és $C = i\gamma^2$.
- El complex conjugat canvia el signe de l'exponencial, $e^{-ip_\mu x^\mu} \rightarrow e^{ip_\mu x^\mu}$.
- Què ocorre amb els espinors?

$$Cu^{(1)*}(\vec{p}) = Ni\gamma^2 \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}^* = N \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x - ip_z}{E+m} \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_z}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{E}|+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = u^{(4)}(-\vec{p}) = v^{(1)}(\vec{p})$$

$$Cu^{(2)*}(\vec{p}) = Ni\gamma^2 \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}^* = N \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x + ip_z}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \frac{-p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_z}{E+m} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|E|+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = u^{(3)}(-\vec{p}) = v^{(2)}(\vec{p})$$

- Per provar que $\psi_c = C\psi^*$, $C = i\gamma^2$, escrivim l'equació de Dirac en un camp electromagnètic per a un electró (càrrega $q = -|e|$) i un positró (càrrega $q = +|e|$):

$$\left. \begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi &= 0 \\ \partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + iqA_\mu \text{ Derivada covariant (a veure)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} (1) \quad &[i\gamma^\mu (\partial_\mu - i|e|A_\mu) - m]\psi = 0 \\ (2) \quad &[i\gamma^\mu (\partial_\mu + i|e|A_\mu) - m]\psi_c = 0 \end{aligned}$$

- Per relacionar ψ i ψ_c , conjuguem (1) i la multipliquem per un operador (matriu) C :

$$(1') \quad [-iC\gamma^{\mu*}(\partial_\mu + i|e|A_\mu) - mC]\psi^* = 0$$

- Si $-C\gamma^{\mu*} = \gamma^\mu C$, (1') es pot escriure en la forma de (2): $[i\gamma^\mu (\partial_\mu + i|e|A_\mu) - m]C\psi^* = 0$
- I per tant, $\psi_c = C\psi^*$.
- Es pot comprovar fàcilment que en la representació de Dirac-Pauli, $C = i\gamma^2$ verifica la condició $-C\gamma^{\mu*} = \gamma^\mu C$. Exercici (aplicació de les propietats de les matrius de Dirac).

Helicitat dels espinors de Dirac

- Com és possible diferenciar les dues solucions (degenerades) d'una determinada energia?
 \Rightarrow La **helicitat**, o projecció de l'espí en la direcció del moviment de la partícula
- L'operador d'helicitat es defineix com

$$\Lambda = \frac{1}{|\vec{p}|} \vec{\Sigma} \cdot \vec{p} = \frac{1}{|\vec{p}|} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

- Λ i H commuten. En efecte, com $H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{p} + \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} m$, tenim

$$\begin{aligned} |\vec{p}| \Lambda H &= \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 & 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix} = |\vec{p}| H \Lambda \end{aligned}$$

- Els autovalors de Λ són $\lambda = \pm 1$: $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) = |\vec{p}|^2 \Rightarrow \vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \pm |\vec{p}| \Rightarrow \vec{\sigma} \cdot \hat{p} = \pm 1$

$$\lambda = +1 \longrightarrow \Rightarrow$$

$$\lambda = -1 \longleftarrow \Leftarrow$$

- Per tant, com $[H, \Lambda] = 0$, Λ és independent del temps i unitari \Rightarrow és constant de moviment i els seus autovalors són bons números quàntics.

- Si alineem l'eix z en la direcció de moviment, l'operador Λ és

$$\Lambda = \frac{1}{|\vec{p}|} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \equiv \Sigma_3$$

- Amb aquesta alineació, els espinors de Dirac queden:

$$u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-|\vec{p}|}{E+m} \end{pmatrix}, \quad u^{(3)} = N \begin{pmatrix} \frac{-|\vec{p}|}{|E|+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(4)} = N \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{|\vec{p}|}{|E|+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Aplicant ara l'operador Λ sobre estos estats:

$$\Lambda u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} = +u^{(1)} \quad \Lambda u^{(2)} = N \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-|\vec{p}|}{E+m} \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} \end{pmatrix} = -u^{(2)}$$

- Semblant per a $u^{(3)}$ i $u^{(4)}$. Tenim doncs

$$\Lambda u^{(1)} = +u^{(1)}, \quad \Lambda u^{(2)} = -u^{(2)}$$

Els dos estats d' $E > 0$ tenen helicitats diferents

$$\Lambda u^{(3)} = +u^{(3)}, \quad \Lambda u^{(4)} = -u^{(4)}$$

Els dos estats d' $E < 0$ tenen helicitats diferents

Paritat dels espinors de Dirac

- Baix una transformació de paritat els espinors de Dirac transformen com

$$\psi \rightarrow \psi' = P\psi = \gamma^0 \psi$$

- Efectivament, si escrivim l'equació de Dirac en dos sistemes de referència x i x' ,

$$(1) \quad (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

$$x' = \Lambda x$$

$$(2) \quad (i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi'(x') = 0$$

- Té que existir un relació entre $\psi(x)$ i $\psi'(x')$, $\psi'(x') = S\psi(x) \rightarrow S^{-1}\psi'(x') = \psi(x)$
- Com $\psi(x) = u(\vec{p})e^{-ip_\mu x^\mu}$ i S no depèn de x , sols actua sobre l'espinor.
- Intentem transformar (1) per escriure-la en la forma de (2):

$$x' = \Lambda x \rightarrow x'^\nu = \Lambda^\nu_\mu x^\mu \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \Lambda^\nu_\mu = \partial'_\nu \Lambda^\nu_\mu$$

$$(1) \rightarrow (i\gamma^\mu \partial'_\nu \Lambda^\nu_\mu - m)S^{-1}\psi'(x') = 0 \xrightarrow{S \times} (iS\gamma^\mu \partial'_\nu \Lambda^\nu_\mu S^{-1} - m)\psi'(x')$$

$$\text{Comparant amb (2)} \rightarrow S\gamma^\mu \partial'_\nu \Lambda^\nu_\mu S^{-1} = \gamma^\mu \partial'_\mu \equiv \gamma^\nu \partial'_\nu \xrightarrow{S^{-1} \times, \times S} \gamma^\mu \Lambda^\nu_\mu = S^{-1} \gamma^\nu S$$

- Es a dir, $S^{-1} \gamma^\nu S = \gamma^\mu \Lambda^\nu_\mu$, que és una relació general que en dona com transformen les matrius de Dirac baix una certa transformació S .

- Per a una transformació de paritat,

$$\Lambda_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$S_P^{-1} \gamma^0 S_P = \gamma^{\mu} \Lambda_{\mu}^0 = \gamma^0$$

$$S_P^{-1} \gamma^k S_P = \gamma^{\mu} \Lambda_{\mu}^k = -\gamma^k, \quad k = 1, 2, 3$$

$$(\gamma^0)^{-1} \gamma^0 \gamma^0 = \gamma^0$$

- Si prenem $S_P = \gamma^0$, es comprova immediatament que

$$(\gamma^0)^{-1} \gamma^k \gamma^0 = -(\gamma^0)^{-1} \gamma^0 \gamma^k = -\gamma^k$$

- Amb açò, es comprova immediatament la paritat dels espinors de Dirac (per partícula en repòs):

$$Pu^{(1)} = \gamma^0 u^{(1)} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} = +u^{(1)}$$

$$Pu^{(2)} = \gamma^0 u^{(2)} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} = +u^{(2)}$$

$$Pu^{(3)} = \gamma^0 u^{(3)} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\chi^{(1)} \end{pmatrix} = -u^{(3)}$$

$$Pu^{(4)} = \gamma^0 u^{(4)} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\chi^{(2)} \end{pmatrix} = -u^{(4)}$$

Partícula i antipartícula tenen paritats oposades

Solució de partícula lliure sense massa. Quiralitat

- Si $m = 0$, $H\psi = E\psi$, $H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p}$, amb α_i hermítica per a que H ho siga, i

$$H^2\psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p})^2\psi = \left(\sum_i \alpha_i p_i \right) \left(\sum_j \alpha_j p_j \right) \psi = \left[\sum_i \underbrace{\alpha_i^2}_1 p_i^2 + \sum_{i < j} \underbrace{(\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i)}_0 p_i p_j \right] \psi = \vec{p}^2 \psi$$

$$\begin{aligned} \{\alpha_i, \alpha_j\} &= 2\delta_{ij}I \\ \alpha_i^2 &= I \\ \alpha_i &= \alpha_i^\dagger \end{aligned}$$

- Estes condicions les compleixen les matrius de Pauli:

- Per $\alpha_i = -\sigma_i$, (1) $E u_A = -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} u_A$

- Per $\alpha_i = \sigma_i$, (2) $E u_B = \vec{\sigma} \cdot \vec{p} u_B$

Equacions desacoblades per a u_A i u_B

- Cadascuna d'aquestes equacions té una solució d' $E > 0$ i una d' $E < 0$, amb estats bi-espinors.
- Cas (1). Suposem ara que l'equació per a u_A descriu un neutrí sense massa.
 - Per la solució d' $E > 0$:

$$E = |\vec{p}| > 0: |\vec{p}| u_A = -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} u_A \rightarrow \vec{\sigma} \cdot \hat{p} u_A = -u_A \rightarrow \lambda = -1, E > 0, \vec{p} \quad \nu_L \text{ Neutrí levogir}$$

- Per la solució d' $E < 0$, interpretem un neutrí sense massa amb E i moment canviats de signe:

$$E = -|\vec{p}| < 0: -|\vec{p}| u_A = -\vec{\sigma} \cdot (-\vec{p}) u_A \rightarrow \vec{\sigma} \cdot (-\hat{p}) u_A = u_A \rightarrow \lambda = +1, |E|, \vec{p} \quad \bar{\nu}_R \text{ Antineutrí dextrogir}$$

- Cas (2). Amb l'equació per a u_B s'obté anàlogament els estats:

ν_R Neutrí dextrogir

$\bar{\nu}_L$ Antineutrí levogir

- Les equacions (1) i (2), per a u_A i u_B , respectivament, es poden escriure en forma de espinors de Dirac com

$$E \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \cdot \vec{p} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

- Aquesta **representació** de α se coneix com de **Weyl** (ó quiral):

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3$$

Diferent de Dirac-Pauli

Igual que Dirac-Pauli

- Efectivament, es comprova que l'equació de Dirac amb massa no nul·la i representació de Weyl és,

$$(E + \vec{\sigma} \cdot \vec{p})u_A - mu_B = 0 \quad (E - \vec{\sigma} \cdot \vec{p})u_B - mu_A = 0 \quad u = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$$

Es veu que les dues equacions 2×2 desacoblen per massa nul·la.

- Com que els experiments mostren que sols ν_L ($\bar{\nu}_R$) s'acoblen a leptons carregats en la interacció dèbil, i aquesta es l'única en la que apareixen els neutrins, la corrent carregada dèbil té que ser, per al cas de l'electró:

$$J^\mu = \bar{\psi}_e \gamma^\mu \psi_{\nu,L}$$

- Però l'espinores $\psi_{\nu,L}$ té que ser de la forma $\begin{pmatrix} u_A \\ 0 \end{pmatrix}$, ja que u_A a l'equació (1) descriu ν_L i $\bar{\nu}_R$.

- Amb eixe propòsit, s'introdueix l'operador quiralitat:

$$P_{L(R)} = \frac{1}{2}[1 - (+)\gamma^5] \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \quad \gamma^{5\dagger} = \gamma^{5T} = \gamma^5 \quad (\gamma^5)^2 = I$$

- En representació de Weyl, $\gamma^5 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, i en la de Dirac-Pauli $\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$.

- Utilitzant representació de Weyl,

$$P_L u = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_A \\ 0 \end{pmatrix} \equiv u_L$$

$$P_R u = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_B \end{pmatrix} \equiv u_R$$

$$\bar{u} P_L = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}^\dagger \gamma^0 P_L = \begin{pmatrix} u_B^\dagger & u_A^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_B^\dagger & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_B \end{pmatrix}^\dagger \gamma^0 = \bar{u}_R$$

$$\bar{u} P_R = \begin{pmatrix} u_B^\dagger & u_A^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & u_A^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_A \\ 0 \end{pmatrix}^\dagger \gamma^0 = \bar{u}_L$$

Quiralitat
"Left"

Quiralitat
"Right"

$$P_L u = u_L$$

$$P_R u = u_R$$

$$\bar{u} P_L = \bar{u}_R$$

$$\bar{u} P_R = \bar{u}_L$$

- Per tant, $P_L(P_R)$ es un operador "quiralitat" que projecta sobre $\nu_L(\bar{\nu}_R)$

- La quiralitat no és un bon número quàntic per massa no nul·la, ja que en aquest cas $[H, \gamma^5] \neq 0$

$$\begin{aligned}
 [H, \gamma^5] &= [\gamma^0 (\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m), \gamma^5] = [\gamma^0 (\gamma^k p_k + m), \gamma^5] = [\gamma^0 \gamma^k p_k, \gamma^5] + m[\gamma^0, \gamma^5] = \\
 &= p_k (\gamma^0 \gamma^k \gamma^5 - \gamma^5 \gamma^0 \gamma^k) + m(\gamma^0 \gamma^5 - \gamma^5 \gamma^0) = 2m\gamma^0 \gamma^5 \neq 0
 \end{aligned}$$

- L'operador de **quiralitat i d'helicitat coincideixen en el límit relativista**, $\gamma^5 \approx \Lambda$:

$$\begin{aligned}
 \gamma^5 \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi^{(s)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix} = \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi^{(s)} \end{pmatrix} \\
 &\approx \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi^{(s)} \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi^{(s)} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

- Es demostra que el contingut d'helicitat dels estats de quiralitat és, en el límit relativista:

Per $E > 0$

$$u_L \approx u_L^- + \frac{m}{2E} u_L^+$$

L'estat de quiralitat "Left" per a partícula és predominantment d'helicitat $-$, amb contribució $+$ suprimida per un factor $m/2E$.

Si $m = 0$, quiralitat "Left" partícula \equiv helicitat $-$

$$v_L \approx v_L^+ + \frac{m}{2|E|} v_L^-$$

Per $E < 0$

L'estat de quiralitat "Left" per a antipartícula és predominantment d'helicitat $+$, amb contribució $-$ suprimida per un factor $m/2E$.

Si $m = 0$, quiralitat "Left" antipartícula \equiv helicitat $+$

- Finalment, es comprova que els estats de quiralitat u_L i u_R son propis de l'operador quiralitat:

$$\gamma^5 u_L = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_A \\ 0 \end{pmatrix} = -u_L$$

$$\gamma^5 u_R = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_B \end{pmatrix} = +u_R$$

Quiralitat “Left” \equiv quiralitat $q = -1$
 Quiralitat “Right” \equiv quiralitat $q = +1$

- En representació de Diract-Pauli s'obté el mateix resultat, clar.
- Per tant, l'estructura de la corrent carregada dèbil per al cas de l'electró és:

$$J^\mu = \bar{\psi}_e \gamma^\mu \psi_{\nu,L} = \bar{\psi}_e \gamma^\mu P_L \psi_\nu$$

- Tenint en compte que: $\gamma^\mu (1 - \gamma^5) = \frac{1}{2} (1 + \gamma^5) \gamma^\mu (1 - \gamma^5)$
- La corrent es pot escriure

$$J^\mu = \bar{\psi}_e \gamma^\mu \psi_{\nu,L} = \bar{\psi}_e \gamma^\mu P_L \psi_\nu = \bar{\psi}_e P_R \gamma^\mu P_L \psi_\nu = \bar{\psi}_{e,L} \gamma^\mu \psi_{\nu,L}$$

És a dir, sols s'acoblen estats de quiralitat “Left”.

- Per aquest motiu es parla de

Estructura V(ector)–A(xial) de les corrents carregades dèbils

- Efectivament, el terme A és el que viola paritat:

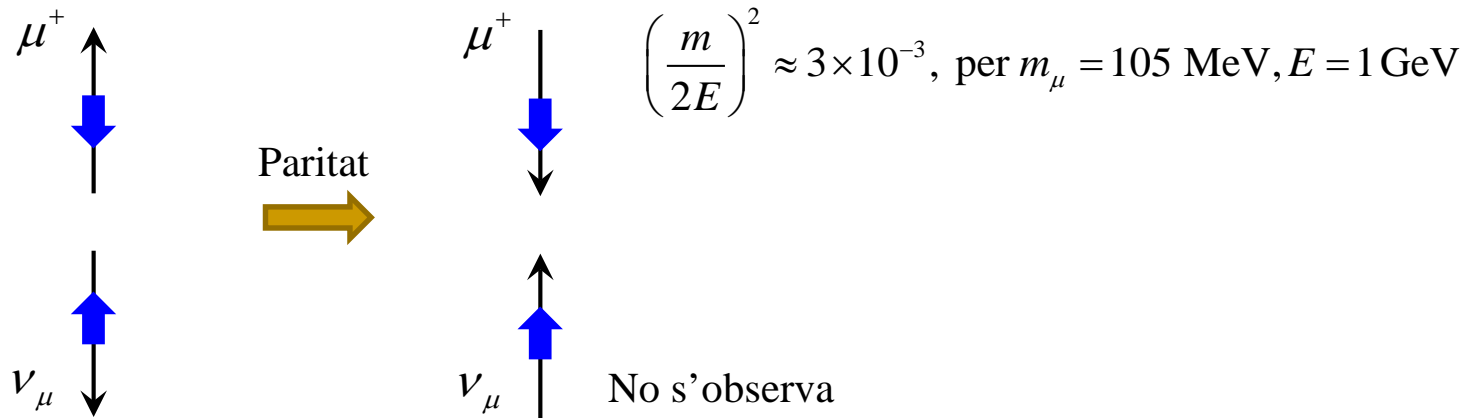
$$P^{-1} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) P = (\gamma^0)^{-1} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma^0 = (-) \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \quad - \text{ per } \mu \neq 0, \quad + \text{ per } \mu = 0$$

- Però, ara que sabem que els neutrins tenen massa, com és que no s'ha observat cap neutrí d'helicitat “incorrecta”, és a dir neutrins dextrogirs (antineutrins levogirs)?

⇒ Aquesta component en les probabilitats va com

$$\left(\frac{m}{2E}\right)^2 \sim 10^{-20}, \text{ per } m = 100 \text{ meV}, E = 1 \text{ GeV}$$

- La “incorrecta” component d'helicitat en la quiralitat és la que permet, per exemple, que la desintegració $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ tinga lloc
 - El μ^+ observat és levogir, la component suprimida, però la supressió ací és molt menor perquè la massa del muó és relativament gran



- Aquesta supressió d'helicitat és la que també fa que $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_\mu$ siga menys probable, malgrat el seu major espai de fase:

$$\left(\frac{m}{2E}\right)^2 \approx 7 \times 10^{-8}, \text{ per } m_e = 0.511 \text{ MeV}, E = 1 \text{ GeV}$$

L'electromagnetisme clàssic: el fotó

- Les equacions clàssiques de l'electromagnetisme foren establides per Maxwell (1864), en la forma:

$$(i) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad (iii) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$(ii) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (iv) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}$$

- En forma covariant poden expressar-se com (1) $\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$, amb

Corrent

$$J^\mu \equiv (\rho, \vec{J})$$

Tensor electromagnètic

$$(2) \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Potencial

$$(3) \quad A^\mu = (\phi, \vec{A})$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

- Efectivament, de (1) s'obté directament (i) i (iv). Per altra banda, (iii) implica que podem escriure $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, que portat a (ii) permet escriure $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial\vec{A}/\partial t$. Es pot verificar que este dues relacions es poden escriure en la forma (2) i (3).
- Si prenem la divergència de (1), $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu J^\nu$. Com $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ i $\partial_\nu \partial_\mu = \partial_\mu \partial_\nu$,

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial_\mu J^\mu = 0 \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad [\text{equació de continuïtat}]$$

- El corresponent Lagrangia clàssic es: $L = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - J^\mu A_\mu$ [Exercici](#)

- La interpretació de A^μ en el context de la MQR ja no és el de camp sinó funció d'ones.
- Podem canviar el potencial amb la derivada d'un camp escalar,

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \lambda \partial^\mu \chi \quad \text{Transformació de gauge}$$

$$F^{\mu\nu} \rightarrow F'^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} + \lambda \partial^\mu \partial^\nu \chi - \lambda \partial^\nu \partial^\mu \chi = F^{\mu\nu}$$

\Rightarrow A una transformació d'aquest tipus que deixa invariant el camp se l'anomena **transformació de gauge**, i a la invariància corresponent **invariància gauge**.

- Es pot utilitzar la llibertat gauge per imposar la condició

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad \text{Condició o gauge de Lorentz}$$

- Les equacions del camp queden:

$$\square A^\mu \equiv \partial_\nu \partial^\nu A^\mu = J^\mu$$

- Si no hi ha densitat de corrent (fotó lliure), $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) A^\mu = 0 \quad (4)$

Equació de KG per a $m = 0$ (per component μ)

- Com en el cas de KG, la solució d'ona plana d'aquesta equació és:

$$A^\mu = \varepsilon^\mu(\vec{p}) e^{-ip_\nu x^\nu}$$

Vector de polarització:
caracteritza l'espí del fotó

- Al substituir esta solució en l'equació (4), s'obté: $p^\mu p_\mu \equiv p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = 0 \Rightarrow E = |\vec{p}|$

- Aplicant la condició de Lorentz sobre l'ona plana, $\varepsilon^\mu p_\mu = 0$.

Partícula amb $m = 0$

- La condició de Lorentz, de fet, no resol completament l'ambigüitat d' A^μ :

$$\partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu (A^\mu + \lambda \partial^\mu \chi) = \lambda \partial_\mu \partial^\mu \chi \equiv \lambda \square \chi$$

- Per tant, a més de la condició de Lorentz podem imposar $\square \chi = 0$.
- L'elecció del paràmetre de gauge $\chi = iae^{-iq_\nu x^\nu}$ verifica aquesta darrera condició:

$$\square \chi \equiv \partial_\mu \partial^\mu \chi = ia(-iq_\mu)(-iq^\mu)e^{-iq_\nu x^\nu} = -iaq^2 e^{-iq_\nu x^\nu} = 0, \text{ ja que } q^2 = 0 \text{ per fotons}$$

- Substituint $A^\mu = \varepsilon^\mu(\vec{p})e^{-ip_\mu x^\mu}$ i $\chi = iae^{-iq_\nu x^\nu}$ en $A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \lambda \partial^\mu \chi$, s'obté

$$\varepsilon^\mu \rightarrow \varepsilon'^\mu = \varepsilon^\mu + \lambda a q^\mu$$

Dos vectors de polarització que se diferencien per un múltiple de q^μ descriuen el mateix fotó

- Amb esta llibertat addicional podem prendre $\varepsilon^0 = 0 \rightarrow A^0 = 0$, amb el que la condició de Lorentz per A^μ i ε^μ queda

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

$$\vec{\varepsilon} \cdot \vec{p} = 0$$

Condició o gauge de Coulomb ó transversal

- El vector de polarització és \perp a la direcció de propagació (**polarització transversal**).
- De les 4 component inicials de ε^μ en queden 2, i per tant hi ha sols dues solucions independents. Prenent $\vec{p} = p\vec{z}$, podem elegir $\varepsilon^{(1)} = (1, 0, 0)$, $\varepsilon^{(2)} = (0, 1, 0)$.

Invariància gauge del Lagrangià de Dirac

- Apliquem una **transformació gauge de fase local** U(1) sobre el Lagrangià de Dirac

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-iq\theta(x)}\psi(x) \quad L = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

- Se verifica que

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \psi'^{\dagger}(x)\gamma^0 = e^{iq\theta(x)}\psi^{\dagger}(x)\gamma^0 = e^{iq\theta(x)}\bar{\psi}(x)$$

- El terme de massa del L de Dirac és invariant. Efectivament, ometent les dependències en x :

$$m\bar{\psi}'\psi' = me^{iq\theta}\bar{\psi}e^{-iq\theta}\psi = m\bar{\psi}\psi$$

- Però, el terme cinètic no és invariant:

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\psi' &= i\bar{\psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\left[e^{-iq\theta}\psi\right] = ie^{iq\theta}\bar{\psi}\gamma^\mu\left[e^{-iq\theta}(-iq)(\partial_\mu\theta)\psi + e^{-iq\theta}\partial_\mu\psi\right] \\ &= \underline{q\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\theta)\psi} + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \\ &\neq i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \end{aligned}$$

- Substituint ara en l'equació de Dirac la derivada per la “**derivada covariant**”

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$$

**Transformació gauge
local del potencial**

on A_μ és un camp vectorial que transforma com $A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\theta(x)$

- En eixe cas, el terme cinètic ja és invariant:

$$\begin{aligned}
 i\bar{\psi}'\gamma^\mu D'_\mu\psi' &= q\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\theta)\psi + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + ie^{iq\theta}\bar{\psi}\gamma^\mu iqA'_\mu e^{-iq\theta}\psi = \\
 &\quad \cancel{q\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\theta)\psi} + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \cancel{q\bar{\psi}\gamma^\mu(A_\mu + \partial_\mu\theta)\psi} = \\
 &\quad i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi = i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi + iqA_\mu)\psi = \\
 &\quad i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi
 \end{aligned}$$

- Per tant, si imposem la invariància gauge U(1) de la teoria de Dirac, el seu Lagrangian i equació s'obtenen mitjançant la substitució

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$$

$$L = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \Rightarrow L = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$$

Lagrangian de Dirac invariant gauge

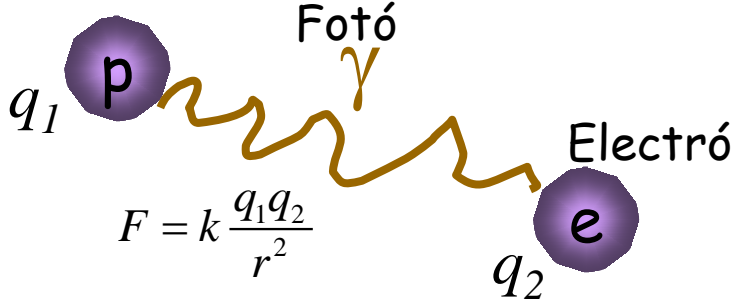
$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \Rightarrow [i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - m]\psi = 0$$

Equació de Dirac invariant gauge

- La invariància gauge del L de Dirac origina de manera natural l'acoblament dels fermions a un camp vectorial A_μ . En el context de la TQC, aquest camp està associat al propagador del camp, el fotó (bosó vectorial sense massa). Podríem dir que la invariància gauge origina el camp e.m.

2. TQC i diagrames de Feynman

Protó



Lagrangià de Maxwell-
Dirac de la QED

$$L = \underbrace{(\bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi}_{L_{e^-}} + \underbrace{e \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi}_{\text{Interacció electró-}\gamma} - \underbrace{\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}_{L_\gamma}$$

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$$

m = massa de l'electró
 ψ = espinor de l'electró

A_μ = camp del fotó

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Grup de simetria
gauge U(1) (fase local)

**L és invariant baix la
simetria de gauge
local i abeliana (QED)**

$$\begin{cases} \psi(\vec{x}, t) \rightarrow \psi'(\vec{x}, t) = e^{ie\theta(\vec{x}, t)} \psi(\vec{x}, t) \\ A^\mu(\vec{x}, t) \rightarrow A'^\mu(\vec{x}, t) = A^\mu(\vec{x}, t) + \partial^\mu \theta(\vec{x}, t) \end{cases}$$

$$e > 0$$

La invariància gauge del Lagrangian fermiònic (de Dirac) L origina de manera natural l'acoblament dels camps fermiònics al camp vectorial A_μ , que en el context de la TQC està associat al **quant del camp: el fotó** (bosó vectorial i sense massa). Podríem dir que la invariància gauge del **camp de matèria** (que hem aplicat als fermions) genera el **camp d'interacció** (bosons intermediaris) al què els fermions s'acoblen.

En general: donat el grup de simetria gauge de la interacció, podem escriure *el Lagrangian* i obtindre els camps d'interacció i associar-los a bosons intermediaris de la interacció.

Teoria Quàntica de Camps: cas QED



Richard Feynman Julian Schwinger Sin-itiro Tomonaga

- Desenvolupada entre les dècades 1940 i 1950 per Tomonaga, Schwinger, Feynman i Dyson, entre altres.
- La QED proporciona una concordança espectacular entre les prediccions i les mesures experimentals (una part/trilió).
- Combina la MQR i els camps continus clàssics, com és el cas del camp electromagnètic (QED).
- El camp clàssic (on la interacció és distància) es converteix en una funció d'ona associada a una partícula material.
 - ⇒ intercanvi de partícules “virtuals” (**propagadors**), els bosons intermediaris de la interacció.
 - ⇒ fotó en el cas de la QED.
- La funció d'ones ψ és el **camp “material”** associat a les partícules que interaccionen (electrons).
- Més encara, les fonts del camp d'interacció (electromagnètic) són els camps materials \Rightarrow les equacions de camp que determinen l'evolució del camp de matèria i del camp d'interacció propi no són independents entre si, sinó que apareixen fortament acoblades.
 - ⇒ El tipus d'**invariància gauge** determina l'**estructura de la interacció**.
 - ⇒ Paper que juguen ací les simetries és molt més profund que al Tema 4.
- El comportament quàntic del camp continu es equivalent al de un sistema de partícules en el que el seu nombre no es constant \Rightarrow **creació i destrucció** de partícules i antipartícules
- La interacció vindrà descrita pel seu **Lagrangia L** , que ha de tindre la seua invariància gauge i ha de permetre calcular **valors esperats**.

Sèrie de Born i diagrames de Feynman

Ara bé: com es poden realitzar càlculs a partir dels diagrames de Feynman? Recordem que en MQ:

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) + \int G(\vec{r} - \vec{r}') U(\vec{r}') \psi(\vec{r}') d^3 r' =$$

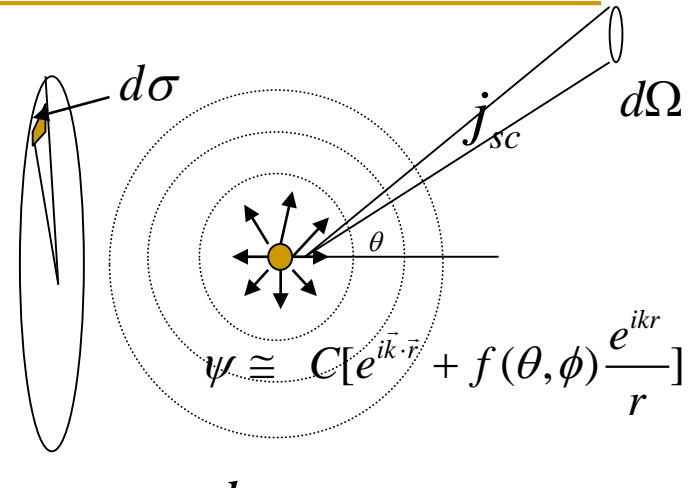
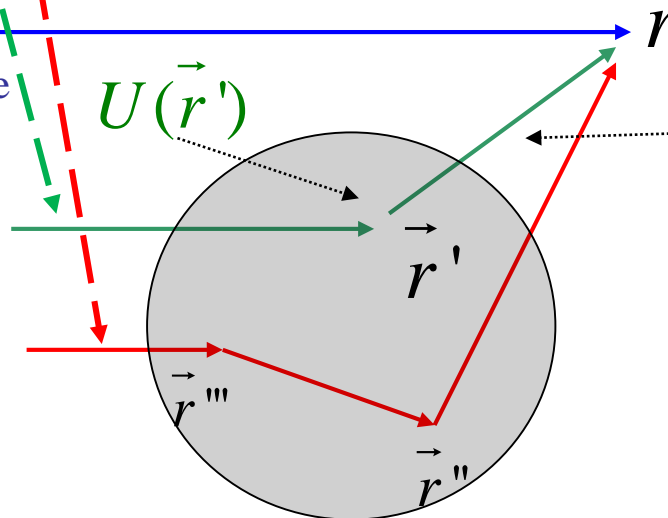
$$\cong e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \underbrace{- \frac{e^{ikr}}{r} \frac{1}{4\pi} \int e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}'} U(\vec{r}') \psi(\vec{r}') d^3 r'}_{f(\theta, \phi)}$$

Com el potencial és xicotet (usem el mètode perturbatiu):

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) + \int d^3 r' G(\vec{r} - \vec{r}') U(\vec{r}') \psi_0(\vec{r}') +$$

$$+ \int d^3 r'' \int d^3 r''' G(\vec{r} - \vec{r}'') U(\vec{r}'') G(\vec{r}'' - \vec{r}''') U(\vec{r}''') \psi_0(\vec{r}''') + \dots$$

La interpretació d'esta operació origina el concepte de diagrama de Feynman:



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \phi)|^2$$

$$k \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{p}_f}{\hbar} \equiv \vec{k}_f$$

$$G(\vec{r} - \vec{r}') = - \frac{e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$[r \gg r'] \quad \approx - \frac{e^{ikr}}{4\pi r} e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}'}$$

Propagador de la interacció

- En aproximació de Born (primer orde):

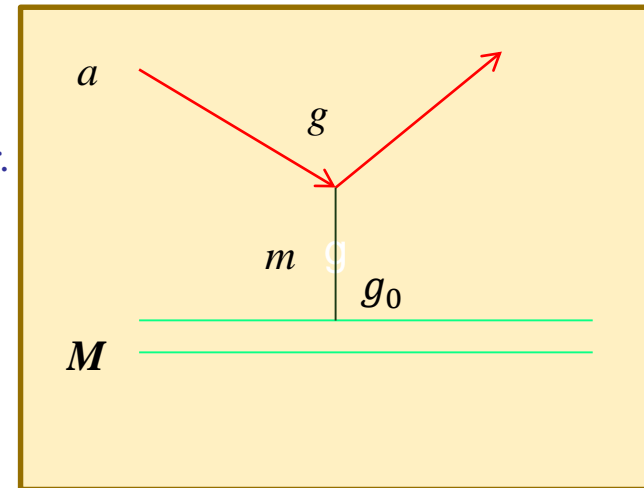
$$f(\vec{q}) = f(\theta, \varphi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i(\vec{k} - \vec{k}_f) \cdot \vec{r}} V(\vec{r}) d^3\vec{r}, \text{ on } \vec{q} = \vec{k} - \vec{k}_f \quad \left[U(\vec{r}) = \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}) \right]$$

⇒ La “propagació de la interacció” s’avalua com la transformada de Fourier del potencial d’interacció! Podem dir que $f(q)$ transporta la interacció, es a dir, és el seu **propagador**.

- Imaginem una situació en que una partícula es difon per un potencial creat per una partícula de massa M molt gran, i siguen g i g_0 les càrregues de la partícula i del centre difusor. Siga m la massa de la partícula que s’intercanvia.
- L’element de matriu de la transició serà:

$$\langle \psi_f | gV(r) | \psi_i \rangle \propto g \int e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} V(r) d^3\vec{r}$$

on hem escrit explícitament la càrrega del vèrtex.



- Si usem ara el potencial de Yukawa (pàg. següent) corresponent a una partícula virtual (de massa m no nul·la en repòs):

$$V(r) = \frac{g_0}{4\pi r} e^{-r/R} \Rightarrow$$

$$f(\vec{q}) = g \int V(r) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} d^3\vec{r} \Rightarrow f(q^2) = \frac{g_0 g}{|\vec{q}^2| + m^2}$$

g_0 : càrrega (constant d'acoblament) de la partícula que crea el camp (partícula difusora)
 g : càrrega de la partícula de prova (partícula difosa)

Càrregues i propagador

Transformada de Fourier del potencial

Massa del bosó intermediari

Moment transferit

- El potencial d'intercanvi ϕ d'un bosó ve donat per l'equació de Klein-Gordon, amb fonts (equació de Green, Laplace per a $r \neq 0$):

$$\nabla^2 V_c(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} 4\pi q \delta(\vec{r}) \Rightarrow V_c(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

**Cas electromagnètic
(bosó sense massa)**

R és l'abast de la interacció

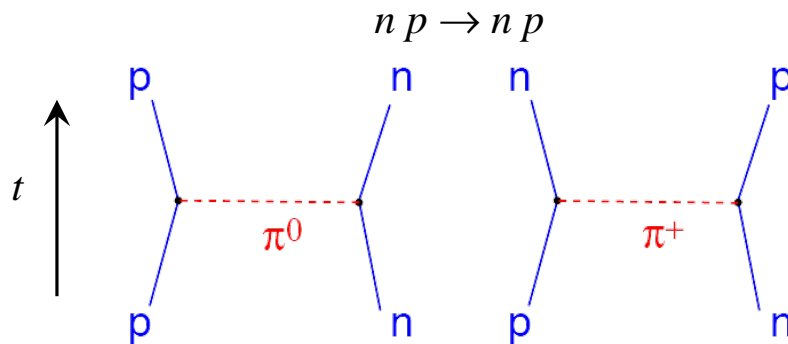
$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi(\vec{r}) - g_0 \delta(\vec{r}) \Rightarrow \phi(r) = \frac{g_0}{4\pi} \frac{e^{-\frac{mc}{\hbar}r}}{r} \equiv \frac{g_0}{4\pi} \frac{e^{-r/R}}{r}$$

**Cas dels bosons massius
(interacció dèbil)**

- El temps típic (i per tant l'abast) de la interacció ve determinat pel principi d'incertesa i la massa del bosó intermediari:

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar, R = c \Delta t = \frac{\hbar}{mc}$$

- La idea de l'intercanvi de bosons va ser originàriament proposta per Yukawa (1935) per a explicar el curt abast de la interacció nuclear (bosons massius).



$$\Delta t \Delta E \sim \hbar, \Delta E = mc^2 \Rightarrow \Delta t \sim \frac{\hbar}{mc^2}$$

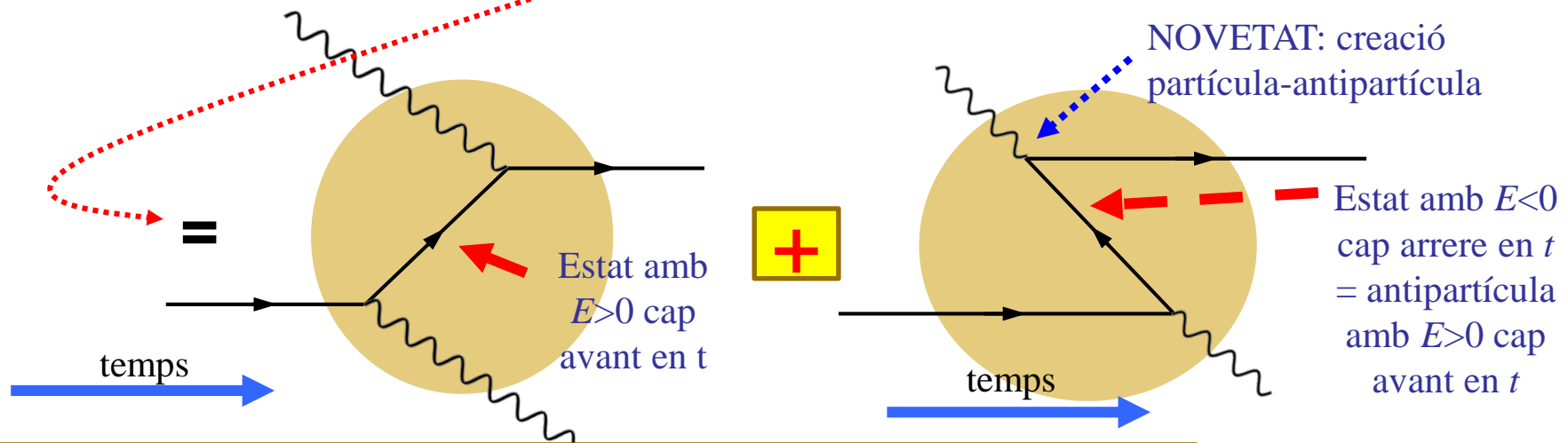
$$R = c \Delta t = \frac{\hbar c}{mc^2} \approx \frac{197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{mc^2} \approx 1.5 \text{ fm}$$

$$m_{\pi^\pm} = 139.6 \text{ MeV}/c^2 \quad m_{\pi^0} = 135.0 \text{ MeV}/c^2$$

Sèrie de Born i diagrames de Feynman (cont)

- Quan es generalitzen estes idees de la MQ a la TQC, les interaccions es descriuen mitjançant suma de pertorbacions o diagrames de Feynmann regulats per una sèrie de normes establides, deduïdes del L que governa cada tipus d'interacció \Rightarrow distintes regles per cada interacció.
- Exemple: en la difusió d'un fotó γ per un electró, i calculant la seua secció eficaç tindríem al orde més baix dos diagrames que correspondrien a la difusió del fotó i a la materialització en partícula-antipartícula, als que corresponen els elements de matriu de la interacció M_{fi} .
- Cal a més incloure la conservació global dels moments i energia (la delta) i l'espai fàsic disponible.

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_f p'_f - \sum_i p_i\right) \frac{1}{4E_1 E_2 v_{rel1,2}} \boxed{M_{fi}}^2 (\prod_l 2m_l) \left(\prod_f \frac{d^3 \mathbf{p}'_f}{(2\pi)^3 2E'_f} \right)$$




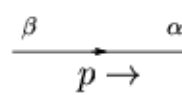


Observeu que en este cas, les partícules "virtuals" que s'intercanvien són els fermions (electró) i el bosó γ és una partícula real en l'estat inicial i final

Diagrames de Feynman

- Les partícules es representen amb **línies externes** entrants i ixents que es dirigeixen en el sentit del temps, i les antipartícules en sentit oposat. No representen trajectòries ni impliquen distàncies entre les partícules, es tracta simplement d'un **mètode gràfic**. Estes línies són les “funcions d’ona”, és a dir, **els camps quàntics** que representen els fermions i els bosons.
- Les **línies internes** corresponen al factor del **propagador** de la partícula virtual característic de cada interacció (o els fermions).
- Cada vèrtex comporta la **constant d’acoblament pròpia de cada interacció**, amb intensitats molt diferents per a les interaccions EM, Dèbil i Forta.
- **L'amplitud del procés** (que és l’element de matriu) és el resultat del producte:
 - **De cada camp fermiònic** extern, entrant i ixent.
 - **De la constant d’acoblament de cada vèrtex**, que dóna l'amplitud d'emissió/absorció del bosó (o fermió) intermediari, i
 - **Del propagador del bosó (fermió) virtual (línies 'internes')**
 - En el cas que hi hagen diferents diagrames que contribuïsquen al **procés se sumen (o resten) les amplituds** seguint les regles de Feynman.
- En cada vèrtex es conserva el moment i la càrrega, però no es verifica la relació $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$
 - ⇒ La **partícula intercanviada és virtual** (només existeix durant el temps d'interacció).
 - ⇒ L’interval de temps durant el que no es conserva l’energia-moment ve determinat per principi d’incertesa i la massa del portador.
 - ⇒ No obstant això, l'energia i el moment cal que es conserve en el procés global.

Regles de Feynman de la QED

Construïm les amplituds de transició ($-iM_{fi}$) associant una expressió matemàtica amb el diagrama que descriu la interacció, a cada element línia o vèrtex associem una funció:

	For every ...	draw ...	write ...
Propagadors	Internal photon line		$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon}$
	Internal fermion line		$\frac{i(\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$
	Vertex		$-ie\gamma^\mu$
	Outgoing electron		$\bar{u}_s(p)$
	Incoming electron		$u_s(p)$
	Outgoing positron		$v_s(p)$
	Incoming positron		$\bar{v}_s(p)$
	Outgoing photon		$\epsilon^{*\mu}$
Conservació de l'energia i el moment	Incoming photon		ϵ^μ
	<ul style="list-style-type: none"> • Attach a directed momentum to every internal line • Conserve momentum at every vertex 		

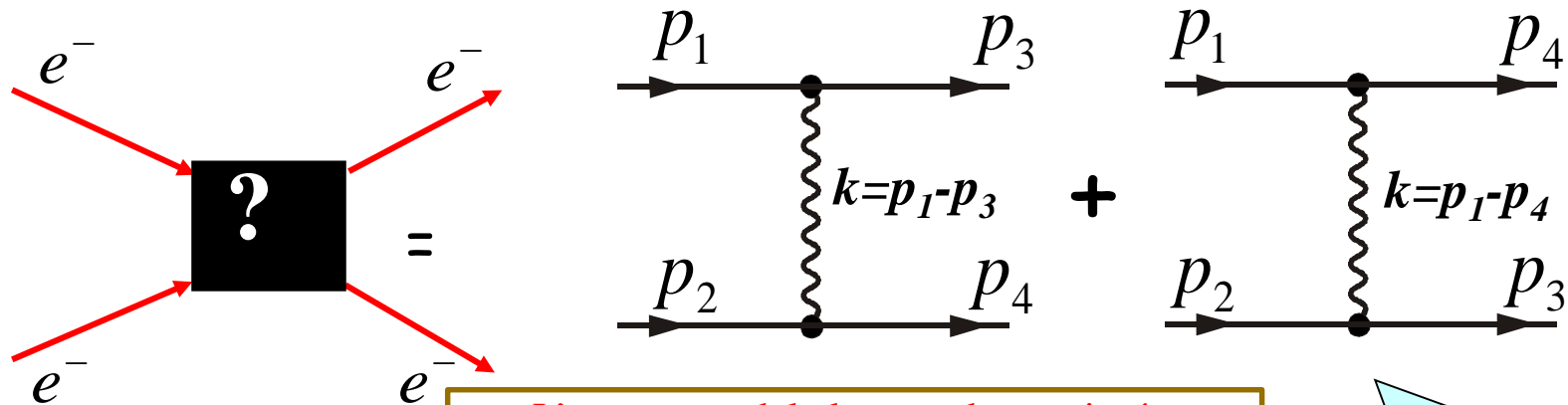
Vèrtex: constant d'acoblament de la interacció $\alpha \sim e^2$

Espinors dels fermions

Camp del fotó

Exemple: difusió d'electrons

$$e^-(p_1) + e^-(p_2) \rightarrow e^-(p_3) + e^-(p_4)$$



Per ser
partícules
idèntiques

$$-iM_{fi} =$$

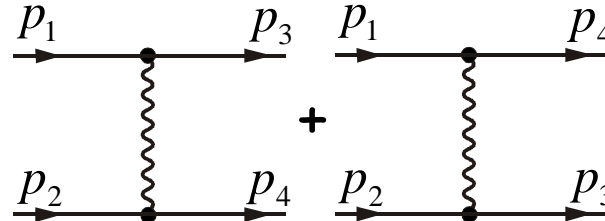
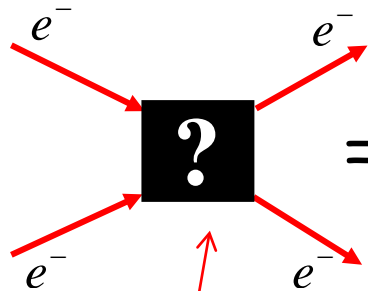
L'estructura del element de matriu és:
(Corrent)^μ(Propagador)_{μν}(Corrent)^ν.
Corrent Propagador Corrent

$$\sqrt{e^2} \approx \sqrt{1/137}$$

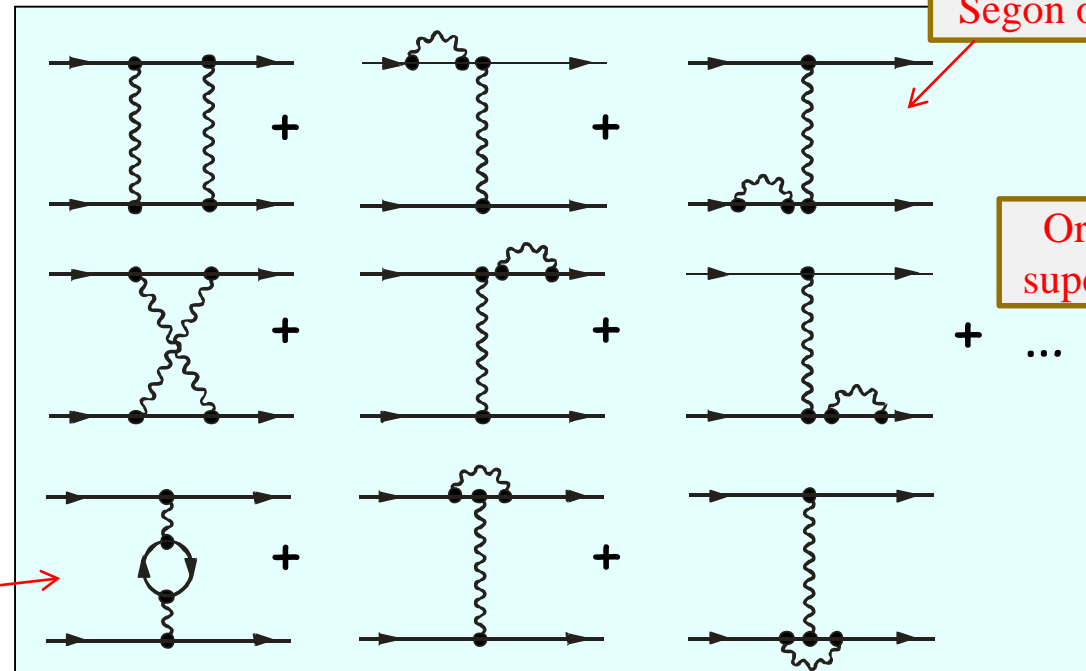
$$\left\{ \overbrace{\bar{u}(p_3, s_3)(-ie\gamma^\mu)u(p_1, s_1)}^{\text{Vèrtex}} \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1 - p_3)^2 + i\varepsilon} \overbrace{\bar{u}(p_4, s_4)(-ie\gamma^\nu)u(p_2, s_2)}^{\text{Vèrtex}} \right. \\ \left. - \overbrace{\bar{u}(p_4, s_4)(-ie\gamma^\mu)u(p_1, s_1)}^{\text{Vèrtex}} \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1 - p_4)^2 + i\varepsilon} \overbrace{\bar{u}(p_3, s_3)(-ie\gamma^\nu)u(p_2, s_2)}^{\text{Vèrtex}} \right\}$$

Una altra regla: factor de fase +1 (-1) si es realitzen un número parell (imparell) d'intercanvis en els operadors fermiònics veïns (quan més d'un diagrama contribueix al procés).

La sèrie és pertorbativa (en potències de “ e ”) i per tant convergeix (una vegada s’ha renormalitzat):



Primer ordre



Segon ordre

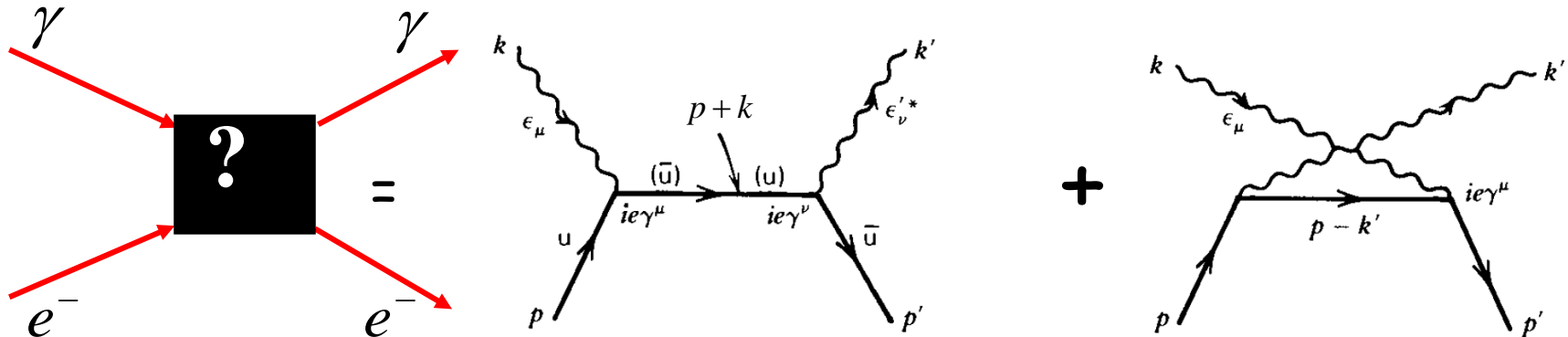
Ordres
superiors

Quins són els diagrames a considerar?
Són infinits, però com $\alpha=1/137$ convergeixen ràpidament

Línies fermiòniques
interiors (loops)
divergents però
renormalitzables

Altre exemple: difusió Compton d'electrons

$$\gamma(p_1) + e^-(p_2) \rightarrow \gamma(p_3) + e^-(p_4)$$



$$-iM_{fi} =$$

$$\left\{ \bar{u}(p', s') \left[\varepsilon_\nu^* (-ie\gamma^\nu) \frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2} (-ie\gamma^\mu) \varepsilon_\mu \right] u(p, s) \right. \\ \left. + \bar{u}(p', s') \left[\varepsilon_\mu (-ie\gamma^\mu) \frac{i(\not{p} - \not{k}' + m)}{(p-k')^2 - m^2} (-ie\gamma^\nu) \varepsilon_\nu^* \right] u(p, s) \right\}$$

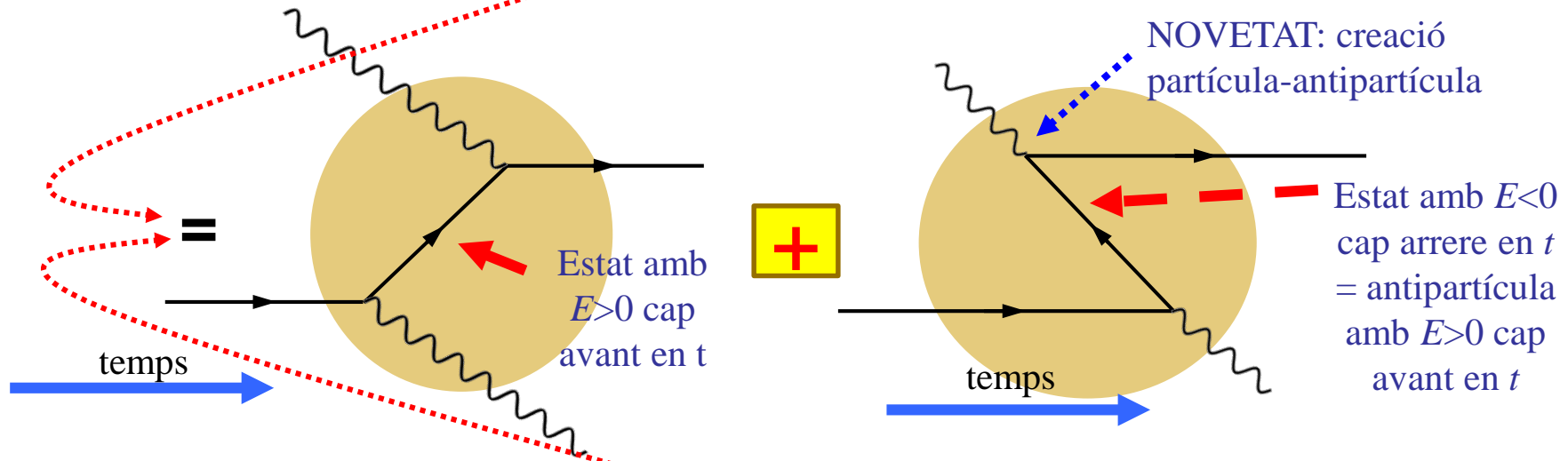
Secció eficaç i probabilitat de desintegració

Secció eficaç:

Conservació global dels moments i energia

Espai fàsic disponible

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_f p'_f - \sum_i p_i\right) \frac{1}{4E_1 E_2 v_{rel1,2}} \left(|M_{fi}|^2 \right) \left(\prod_f \frac{d^3 \mathbf{p}'_f}{(2\pi)^3 2E'_f} \right)$$



Amplada de desintegració:

$$d\Gamma = (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_i - \sum_f p'_f\right) \frac{1}{4E_i} \left(|M_{fi}|^2 \right) \left(\prod_f \frac{d^3 \mathbf{p}'_f}{(2\pi)^3 2E'_f} \right)$$

L'element de matriu de la interacció M_{fi} està directament relacionat amb T_{fi} :

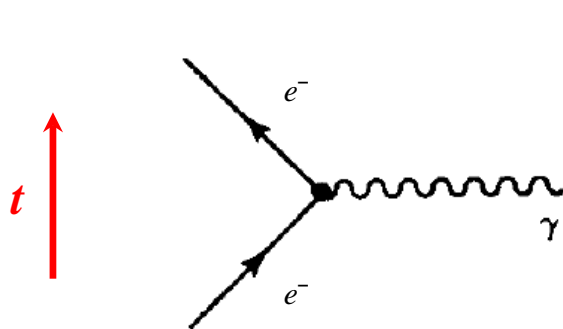
$$T_{fi} = -iM_{fi} (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_f p'_f - \sum_i p_i\right)$$

3. Les interaccions fonamentals

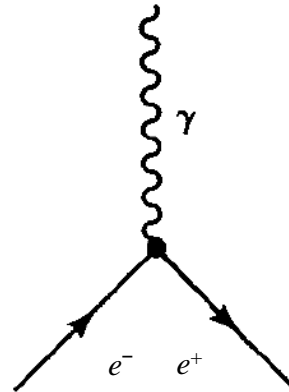
Electrodinàmica Quàntica (QED)

- Tots els processos electromagnètics es descriuen basant-se en el **vèrtex fonamental de QED**, que combinat apropiadament ens proporciona totes les contribucions a tots els ordres:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad , \quad J^\mu = -e \bar{u}_e \gamma^\mu u_e$$



$$e^- \rightarrow e^- + \gamma$$



$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma$$

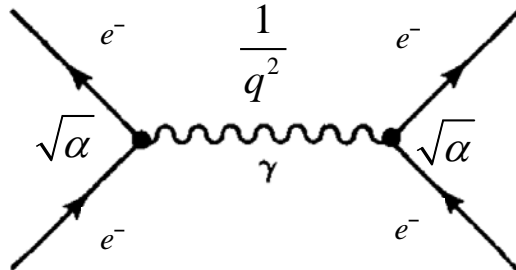
Vèrtex fonamental de QED

- No obstant això, este vèrtex fonamental (i les seues rotacions) no representa cap procés físic possible, ja que viola conservació d'energia i moment.

Acoblament $\gamma - e$

$$\sqrt{\alpha} = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\hbar c}} = \sqrt{\frac{1}{137.0360}}$$

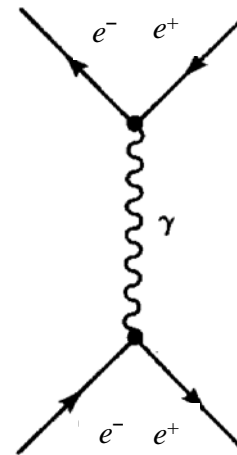
- Tots els processos QED de menor ordre es construeixen combinant 2 vèrtexs fonamentals, com per exemple la difusió de Moeller i la difusió Bhabha:



$$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$$

Difusió electró-electró
(Difusió de Moeller)

$$\sigma \sim \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{q} \frac{\sqrt{\alpha}}{q} \right)^2 \approx \frac{\alpha^2}{q^4}$$



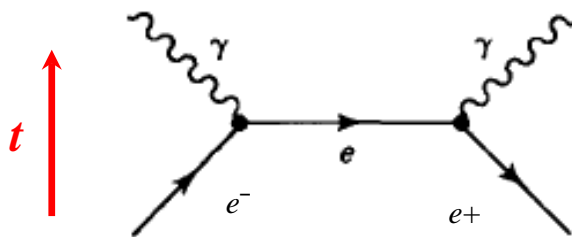
$$e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$$

Difusió Bhabha
(electró-positró)

Les constants d'acoblament en els vèrtexs ens donen una idea de l'orde de magnitud dels processos.

Dos diagrames a nivell bàsic:
aniquilació i intercanvi

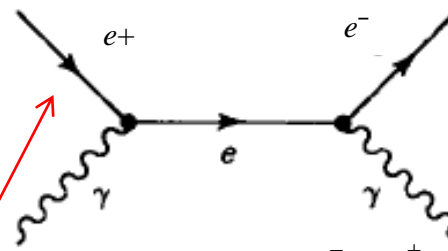
Altres processos: observeu les diverses formes de combinar el vèrtex fonamental



$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$$

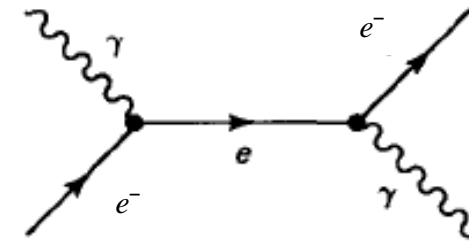
Aniquilació de parelles

Antipartícula, e^+



$$\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+$$

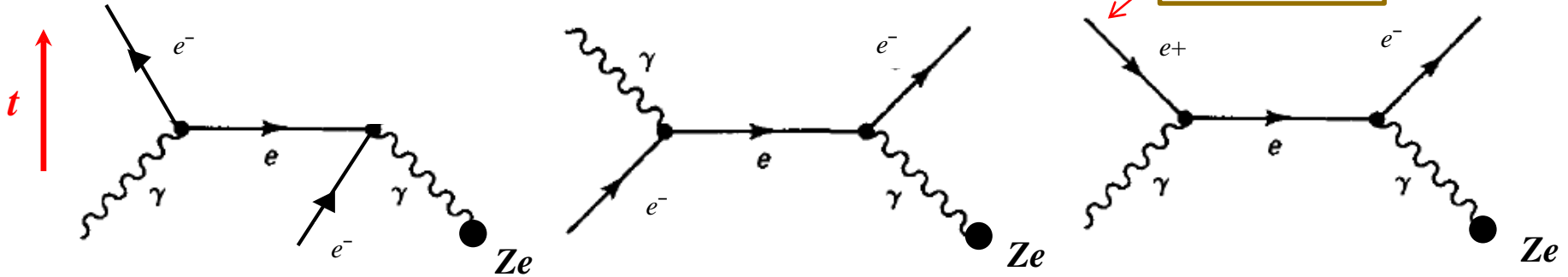
Producció de parelles
(en presència d'un nucli)



$$e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$$

Difusió Compton

- Tots estos diagrames estan relacionats per **simetria d'encreuament**, i els seus diagrames de Feynman s'obtenen bé rotant bé torcent el primer d'ells.
- Altres processos importants, orde de les seues seccions eficaces:



Efecte fotoelèctric
(en presència d'un àtom)

$$\sigma_{\text{Ph}} \propto (\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$$

Bremsstrahlung
(en presència d'un nucli)

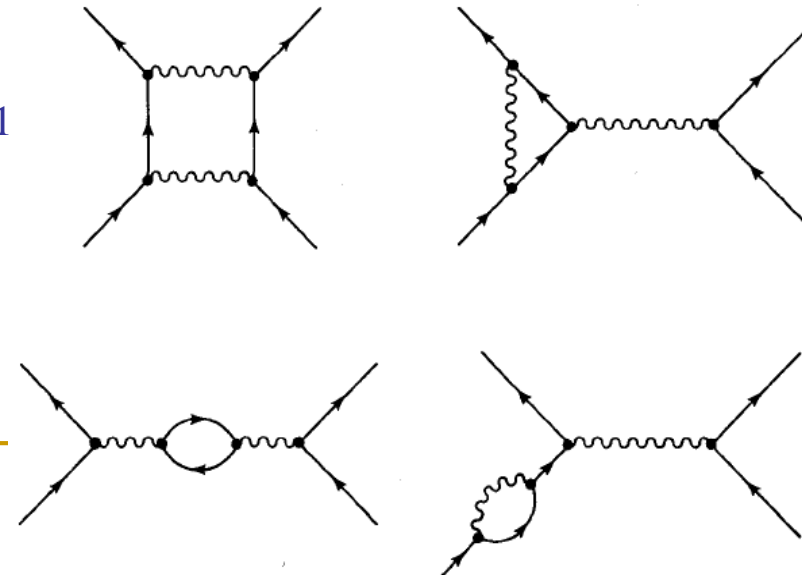
$$\sigma_{\text{Brems}} \propto (\sqrt{\alpha} \sqrt{\alpha} Z \sqrt{\alpha})^2$$

Producció de parelles
(en presència d'un nucli)

$$\sigma_{\text{Parells}} \propto (\sqrt{\alpha} \sqrt{\alpha} Z \sqrt{\alpha})^2 = Z^2 \alpha^3$$

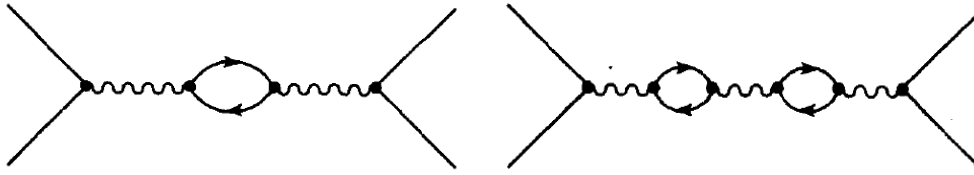
- Els diagrames amb més de dos vèrtexs proliferen vertiginosament amb el nombre dels vèrtexs:

- No obstant això, a nombre més gran de vèrtexs menor contribució relativa atés que $\alpha = 1/137 \ll 1 \Rightarrow$ els càlculs pertorbatius en QED rarament requereixen més de 3 ordres.
- No hi ha acoblament entre dos fotons (doncs no tenen càrrega). Formalment, és conseqüència de que la QED és una teoria gauge abeliana.

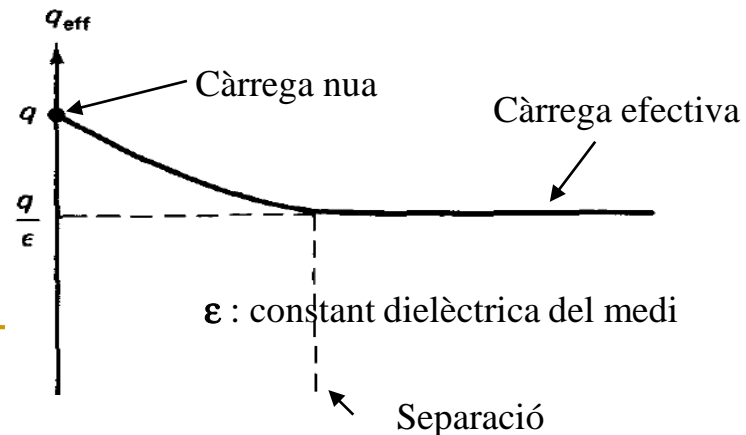
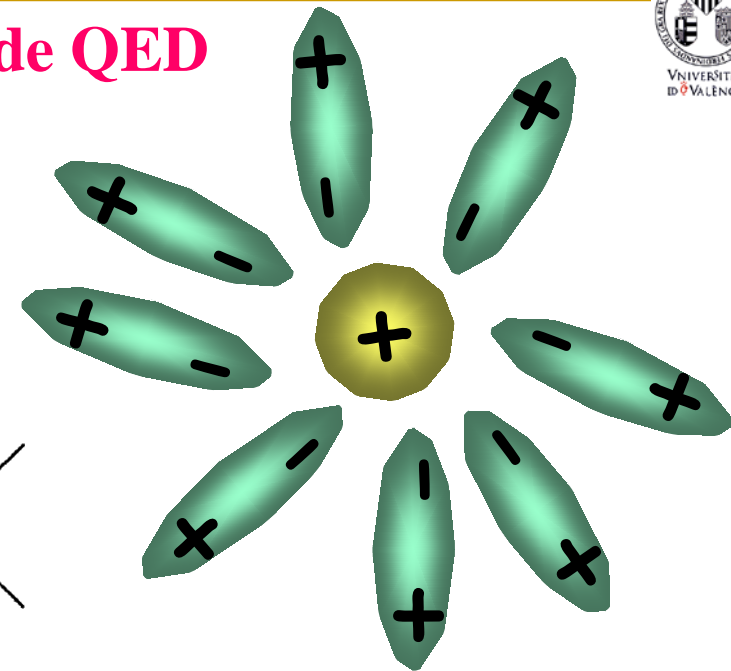


Evolució de la constant d'acoblament de QED

- Clàssicament, en un medi material polaritzat la càrrega elèctrica es troba apantallada.
- Com a conseqüència de la creació i destrucció de partícules de la TQC, el buit en QED es polaritza espontàniament al produir-se parelles e^+e^- contínuament: viuen un temps curt i se recombinen:



- Així, si la càrrega es positiva (un positró per exemple) les parelles orientaran els electrons negatius cap al positró (polarització del buit).
- Este núvol de 'bombolles o loops' de partícules virtuals format al voltant de la partícula difusora tendeix a **reduir** el valor de la seua **càrrega** per l'efecte de l'apantallament.
- La càrrega elèctrica observada depèn de l'aproximació de la partícula al centre difusor (q_{eff}).
- A mesura que l'energia de la partícula difusora augmenta, apareixen noves partícules que contribueixen a l'apantallament: per a energies de desenes de GeV, contribueixen els 3 leptons i els 5 quarks. No obstant, la **constant d'acoblament e.m. augmenta amb el 4-moment transferit** $q \Rightarrow g = 2.000232 \neq 2$.



Invariància gauge generalitzada

- Si l'escalar $\theta(x)$ es substitueix per una matriu $n \times n$, unitària i unimodular, $\Lambda(x)$:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\Lambda(x)} \psi(x)$$

Transformació de gauge SU(n)

- Amb $n = 1$ recuperem el cas escalar, i el grup $SU(1) \equiv U(1)$ és abelià (cas de la QED).
- Amb $n > 1$ (transformacions de Yang y Mills, 1954), el grup no és abelià.
- Per a SU(2):

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{ig\vec{\tau}\vec{\Lambda}} \psi(x)$$

- Com per a U(1), un descripció invariant gauge es pot obtenir introduint un camp vectorial \vec{W}_μ i la constant d'acoblament g :

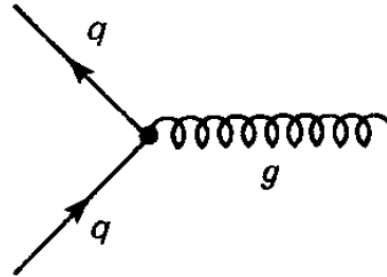
$$\psi^*(x) D_\mu \psi(x) = \psi'^*(x) D_\mu \psi'(x) \Rightarrow \begin{cases} D_\mu = \partial_\mu - ig\vec{\tau} \cdot \vec{W} \\ \vec{W}_\mu \rightarrow \vec{W}'_\mu = \vec{W}_\mu + \partial_\mu \vec{\Lambda} - g \vec{\Lambda} \times \vec{W}_\mu \end{cases}$$

- El terme $g \vec{\Lambda} \times \vec{W}_\mu$ és degut a la no commutativitat de les matrius de Pauli.
 \Rightarrow el potencial (camp gauge) \vec{W}_μ interacciona amb els camps materials (ψ) però també amb ell mateix, principal característica de les teories gauge no abelianes.
- Exemples:
 - Com veurem, la interacció dèbil és invariant gauge SU(2).
 - La interacció forta és invariant gauge SU(3) (pàgs. següents).
 - Recordeu, el model quark està basat en la simetria SU(3) [a distingir de gauge SU(3)], que és el menor grup que inclou SU(2) d'isospín (quarks u i d) y U(1) de hipercàrrega ($Y = BA + S$).

Cromodinàmica Quàntica (QCD)

- En QCD, el color juga el paper de la càrrega elèctrica, i només el contenen els quarks i els gluons. El **vèrtex fonamental** és:

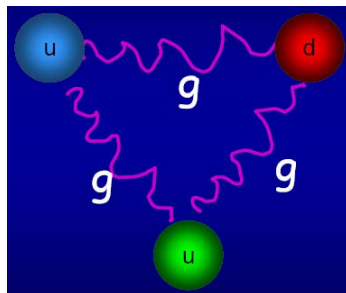
$$q \rightarrow q + g$$



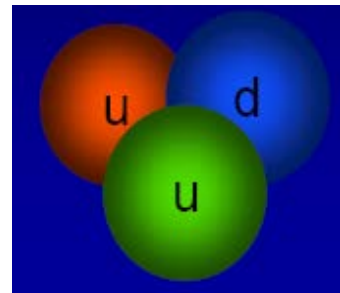
Acoblament $g - q$

$$\sqrt{\alpha_s} = \sqrt{\frac{g_s^2}{4\pi\hbar c}} \sim 1$$

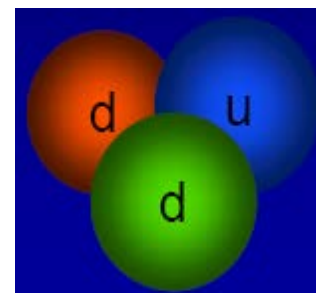
- Però la interacció entre quarks requereix **3 càrregues de color: r (roig), b (blau), g (verd)** per als quarks i les corresponents $\bar{r}\bar{b}\bar{g}$ per als antiquarks (“càrregues negatives o conjugades”).



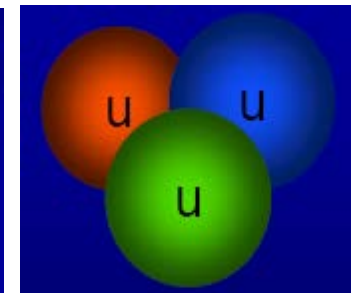
Protó



Neutró



Δ^{++}



- Sense el color, la Δ^{++} (uuu) i la Ω^- (sss), composts per tres quarks idèntics (mateix sabor), amb $J=3/2$, $I=3/2$, violarien el principi d'exclusió de Pauli (1965. O.W. Greenberg, M.Y. Han i I. Nambu).
- Però els hadrons són tots singlets de color \Rightarrow no transporten color net.

- La simetria 'gauge' d'interacció forta és SU(3), exacta com en la QED, però no abeliana.
- La interacció forta depèn només del “color” i no del sabor dels quarks.
- Els bosons intermediaris són **vectorials** ($J^P=1^-$), neutres i sense massa, se'ls anomena **gluons**:
 - Són '**bicolors**' (transporten un color i un anticolor).
 - Existeixen **8 estats** dels gluons diferents:
 - Com que les 3×3 combinacions $r\bar{r}, r\bar{b}, r\bar{g}, b\bar{r}, b\bar{b}, b\bar{g}, g\bar{r}, g\bar{b}, g\bar{g}$ tenen que respectar la simetria SU(3) [tot exactament igual com amb SU(3) sabor amb els quarks u, d, s], estes 9 combinacions formen un octet i un singlet de color, que no interacciona:

$$g_1 = r\bar{g} \quad g_5 = b\bar{r}$$

$$g_2 = r\bar{b} \quad g_6 = b\bar{g}$$

$$g_3 = g\bar{r} \quad g_7 = (r\bar{r} - g\bar{g}) / \sqrt{2}$$

$$g_4 = g\bar{b} \quad g_8 = (r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b}) / \sqrt{6}$$

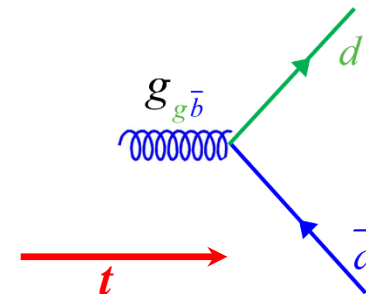
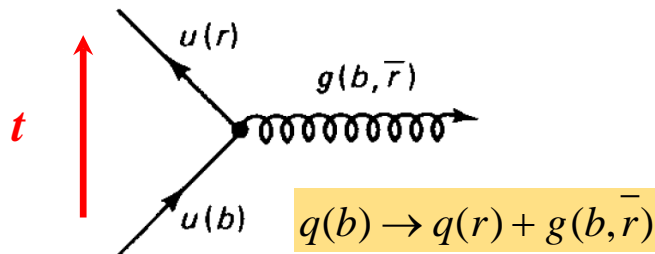
$$g_9 = (r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g}) / \sqrt{6}$$

Octet de color

Singlet de color

- Octet: g_1, \dots, g_6 tenen diferent color-anticolor; g_7, g_8 el mateix (neutres de color).
- Singlet: no interacciona amb els quarks al ser singlet neutre de color.

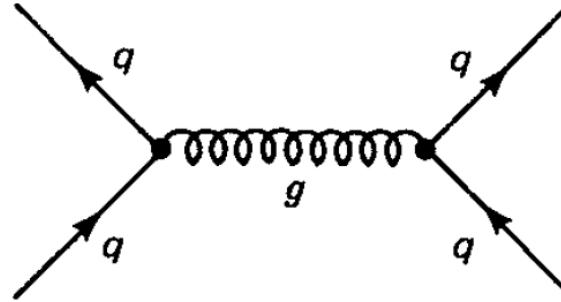
■ Vèrtexs fonamentals



Quark *up blue* se transforma en un *up red* emetent un gluó *blue-antired* (**conservació del color i del sabor, BA, càrrega, I i I₃, no E-p**)

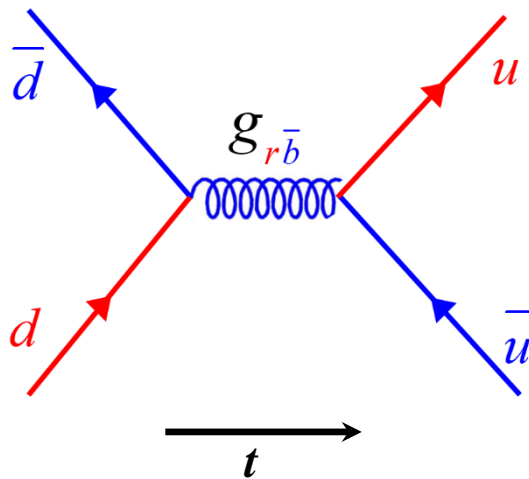
Un gluó *green-antiblue* es materialitza en un quark *down green* i un antiquark *down anti-blue* (**conservació del sabor i del color**)

- Com en QED, podem combinar dos o més vèrtexs fonamentals per a generar processos més complexos (i físics). El diagrama de menor orde que descriu la interacció entre dos quarks és:

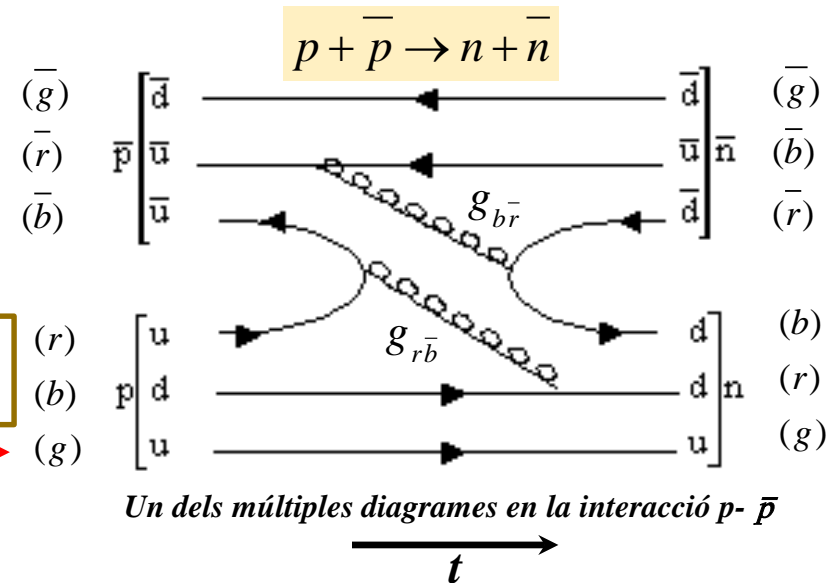


- Exemples:

$$d + \bar{d} \rightarrow u + \bar{u}$$



Quarks
espectadors



- Els gluons, mediadors de la interacció forta, han de conservar el sabor, doncs ho fa la I.F.
- Les forces entre hadrons (per ex. nucleons) són forces efectives (tipus Van der Waals) resultat de la interacció fonamental entre els quarks constituents.

- Una diferència molt important entre QED i QCD és el valor de **la constant d'acoblament**.
Exemples de barions inestables i les seues principals desintegracions:

Barió	Quarks	Q (MeV)	Modo de desintegració i BR	Vida mitjana
$\Sigma^0(1192)$	uds	74	$\Lambda\gamma$ (100%)	7.4×10^{-20} s
$\Sigma^+(1189)$	uus	189	$p\pi^0$ (52%)	0.8×10^{-10} s
$\Sigma^0(1385)$	uds	208	$\Lambda\pi^0$ (87%)	5.5×10^{-23} s

- $[\Lambda] = uds$ $[p] = uud$ $[\pi^0] = u\bar{u} + d\bar{d}$ (diagrames de Feynman en pàg. següent):

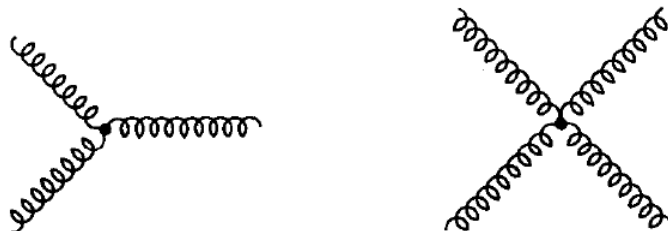
$\Sigma^0(1192) \rightarrow \Lambda\gamma$ Encara que sense canvi de sabor, no és fort sinó un procés e.m.

$\Sigma^0(1385) \rightarrow \Lambda\pi^0$ És un procés fort (conserva isospín i sabor).

Intensitats relatives de la interacció forta i em

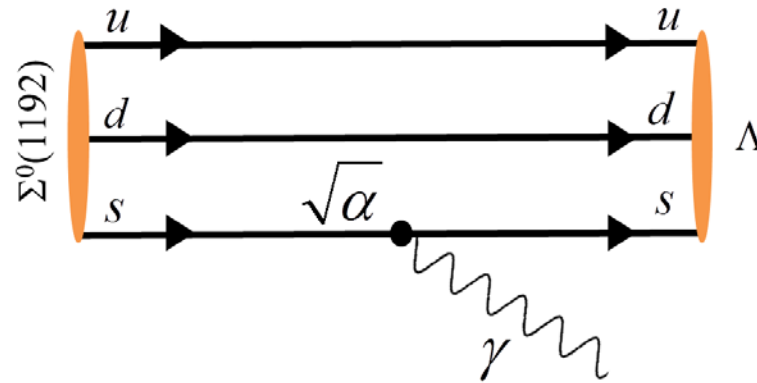
$$\frac{\Gamma_1(\Sigma^0(1385) \rightarrow \Lambda\pi^0)}{\Gamma_2(\Sigma^0(1192) \rightarrow \Lambda\gamma)} \approx \frac{7.4 \times 10^{-20} \times 0.87}{5.5 \times 10^{-23} \times 1.0} \sim \frac{\alpha_s^2}{\alpha} \Rightarrow \alpha_s \sim 1, \text{ com que } \alpha \sim \frac{1}{137} \sim 10^{-2}$$

- Els gluons, en ser bicolores, transporten càrrega de color, per la qual cosa poden interaccionar entre ells (QCD és doncs una teoria gauge no abeliana).



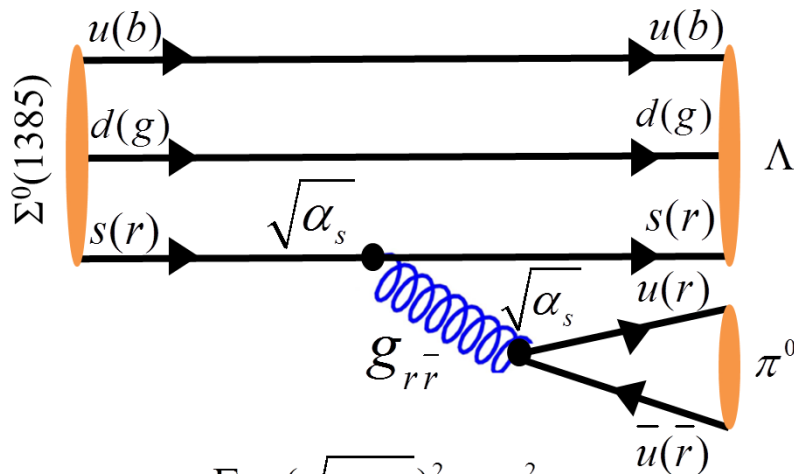
Estos nous vèrtexs compliquen QCD, però al mateix temps l'enriqueixen, permetent, per exemple, estats lligats només de gluons (anomenats “glueballs”).

$$\Sigma^0(1192) \rightarrow \Lambda \gamma$$

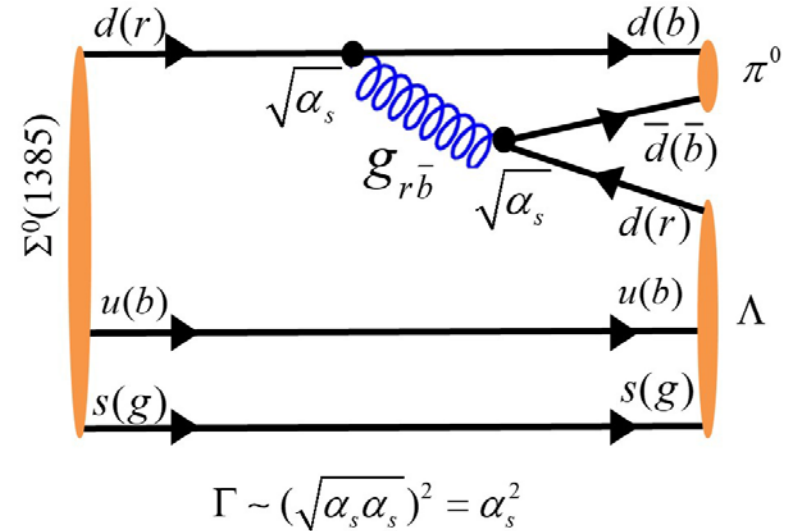


$$\Gamma \sim (\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$$

$$\Sigma^0(1385) \rightarrow \Lambda \pi^0$$



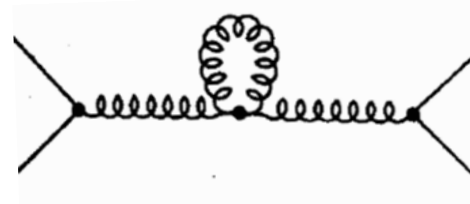
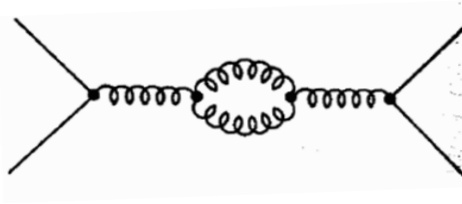
$$\Gamma \sim (\sqrt{\alpha_s \alpha_s})^2 = \alpha_s^2$$



$$\Gamma \sim (\sqrt{\alpha_s \alpha_s})^2 = \alpha_s^2$$

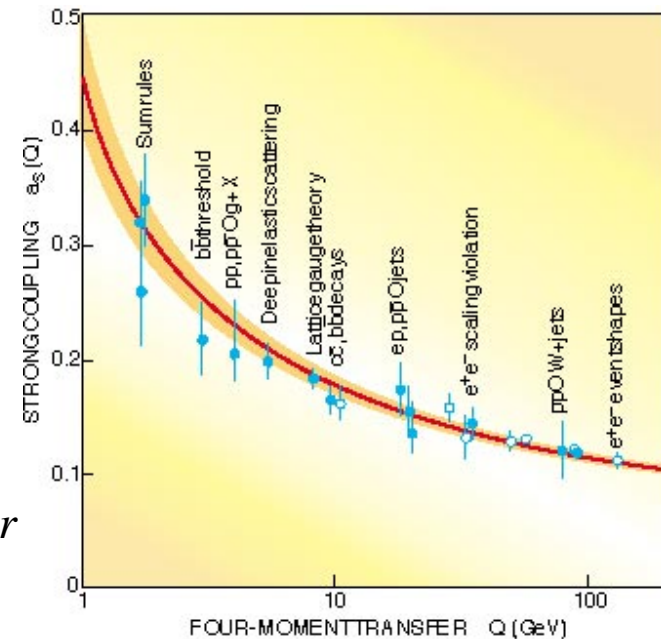
Evolució de la constant d'acoblament de QCD

- La polarització del buit inclou ara vèrtexs $q-q-g$ i $g-g$:
 - Els $q-q-g$ contribueixen com en QED (apantallament del color), augment de la constant d'acoblament a curtes distàncies.
 - Els $g-g$ contribueixen en sentit oposat (anti-apantallament).



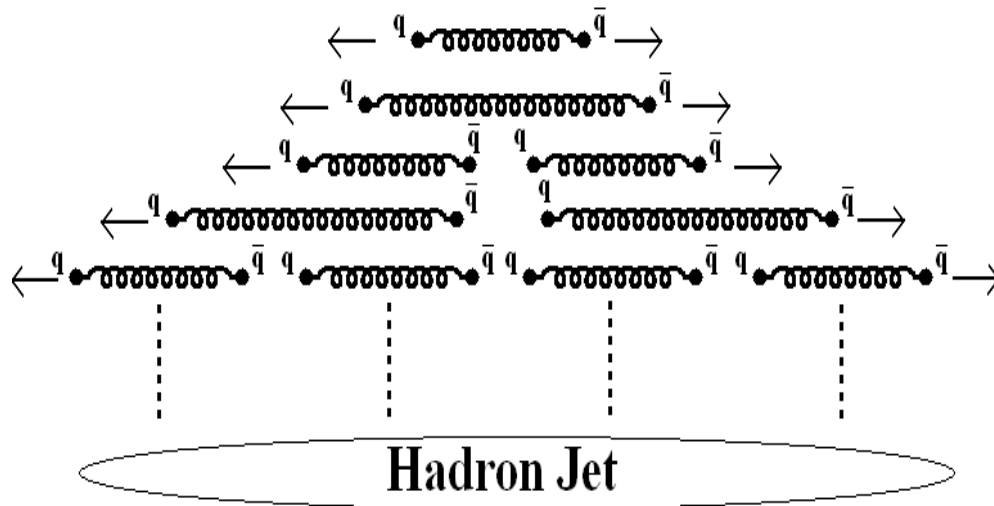
- La competició entre els dos efectes depèn del nombre f de sabors ($q-q-g$) i del nombre n de colors ($g-g$).
- Per a $f=6$ i $n=3$, α_s **disminueix a curtes distàncies**, la qual cosa permet l'aplicabilitat de la QCD en règim pertorbatiu a alta E .

$$V_{QCD} \approx -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + kr$$

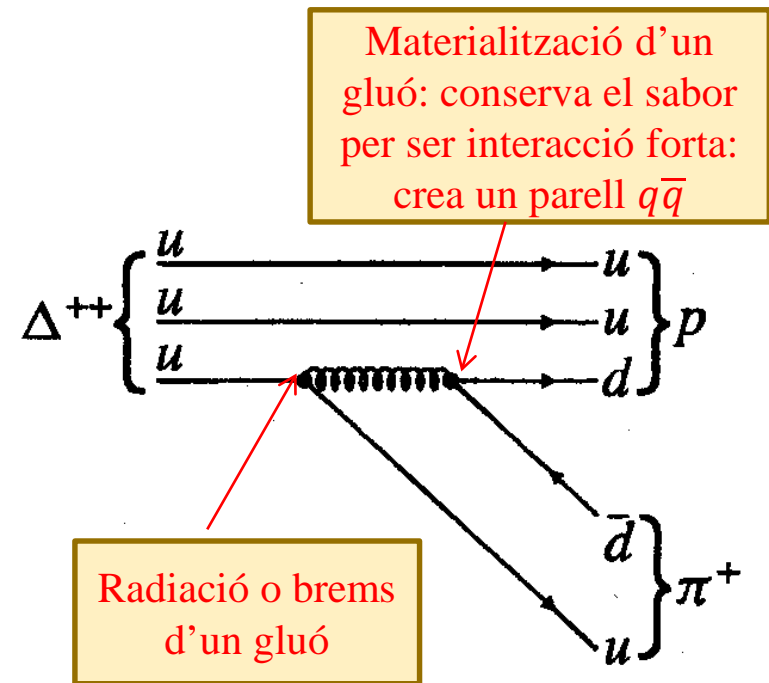


■ Conseqüències:

- **Libertat asimptòtica:** els quarks interaccionen cada vegada menys a mesura que s'aproximen.
- **Confinament quark** (els quarks no existeixen en estat lliure): la intensitat de la interacció ha d'augmentar indefinidament amb la distància \Rightarrow La separació entre quarks produeix la formació de **parelles $q\bar{q}$** , generant els anomenats “**jets**” de partícules.



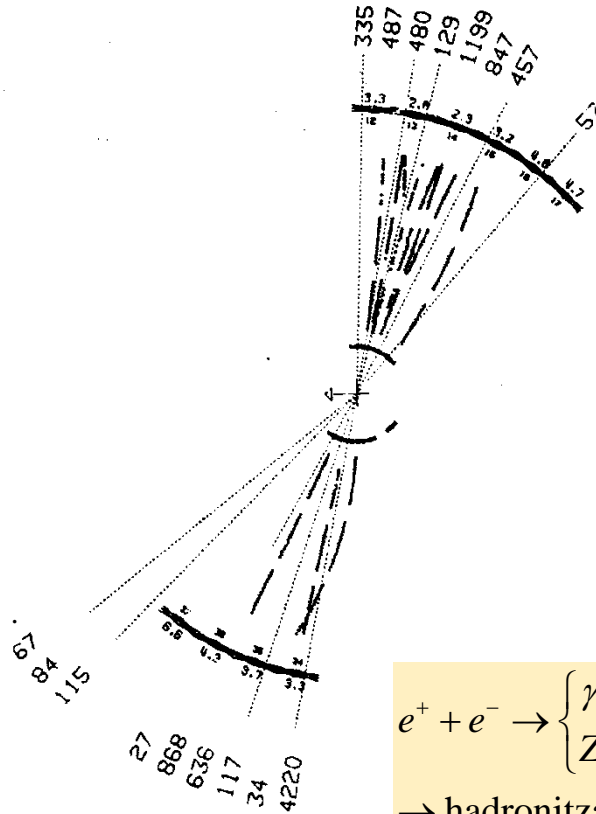
El confinament dels quarks genera el fenomen de l'hadronització



Desintegració de la ressonància Δ^{++}

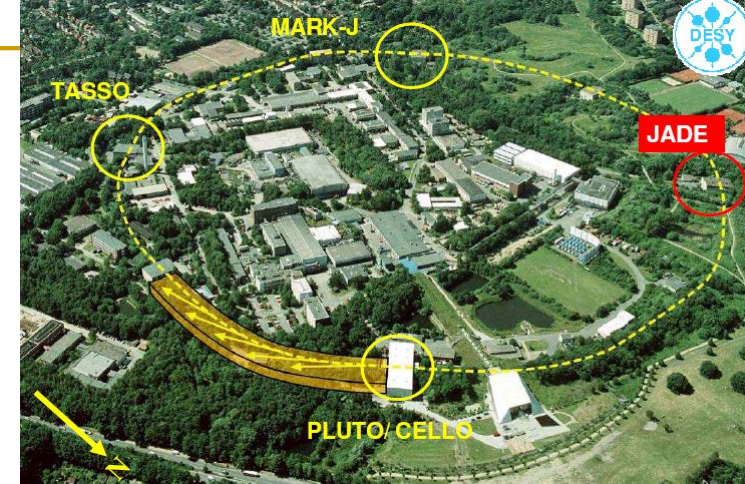
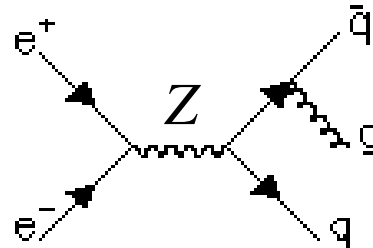
Descobriment dels gluons

- Efecte del confinament quark vist en un detector:

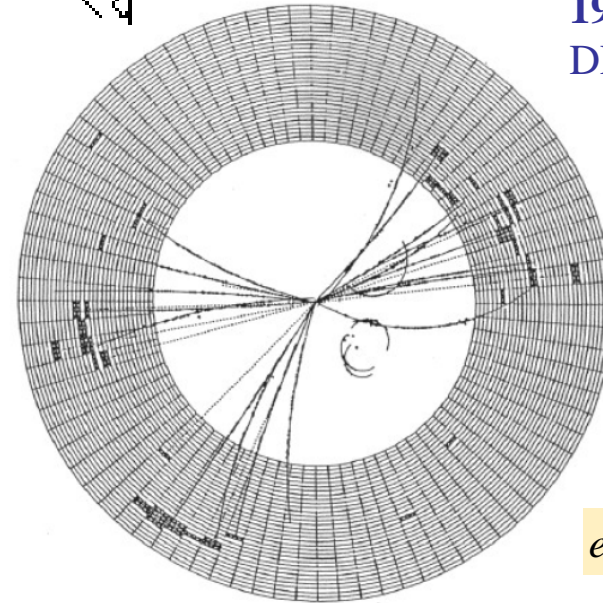


$$e^+ + e^- \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ Z \end{matrix} \right\} \rightarrow q\bar{q} \rightarrow \text{hadronització}$$

Producció d'hadrons en una col·lisió electró-positró a 30 GeV en centre de masses interpretat a partir del procés elemental: producció de quarks mitjançant partícules virtuals i hadronització d'estos.



1979
DESY (Hamburg)

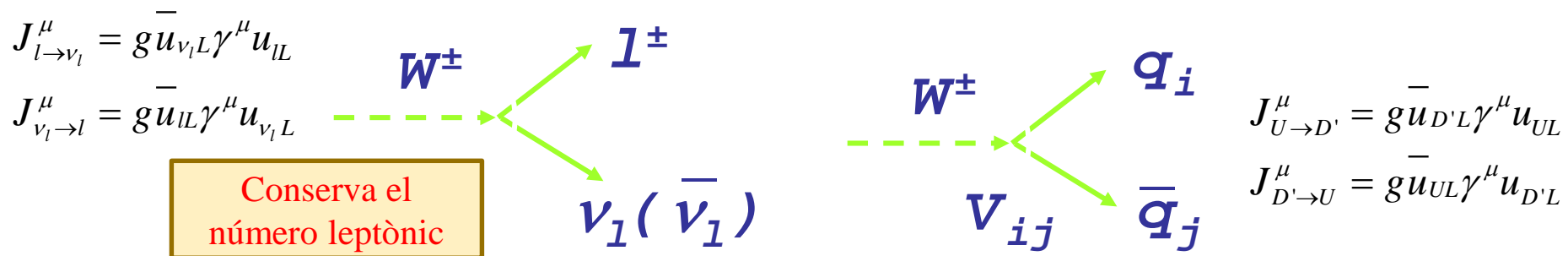


$$e^+ e^- \rightarrow q\bar{q}g$$

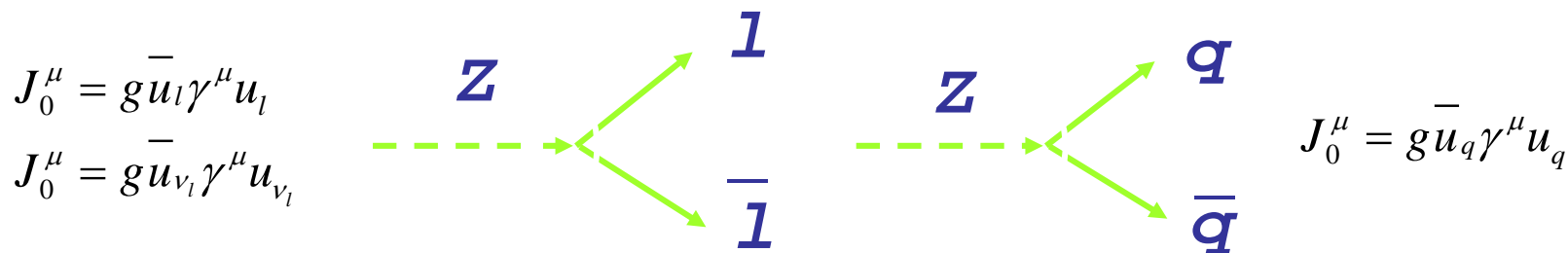
Succés de 3 'jets' (JADE, DESY) (Descobriment del gluó: un quark radia un gluó que es materialitza en un jet d'hadrons).

Interaccions dèbils i universalitat

- No existeix pròpiament dit una càrrega responsable de la interacció dèbil, però de vegades es parla de “càrrega dèbil” (o sabor dèbil).
- La simetria gauge dèbil és del tipus $SU(2)_{\text{isospín dèbil}}$, i està trencada a través del mecanisme BEH (ruptura espontània de simetria), que ha predit l'existència del bosó de Higgs, ja descobert!
- Tant **els quarks com els leptons** (carregats i neutres) són sensibles a la interacció dèbil.
- Hi ha dos tipus d'interaccions dèbils:
 - Per **corrents carregats**, mediat pels bosons W^\pm ($m \approx 80 \text{ GeV}/c^2$) (\Rightarrow abast finit, per la massa).



- Per **corrent neutre**, mediat pel bosó Z ($m \approx 92 \text{ GeV}/c^2$) (\Rightarrow abast finit, per la massa del bosó).

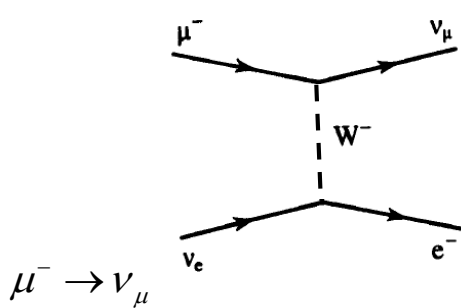


- Si la interacció dèbil és universal, les corrents tindran la mateixa estructura V-A, amb idèntica constant d'acoblament g :

$$J_{l \rightarrow \nu_l}^\mu = g \bar{\nu}_l \gamma^\mu l_L$$

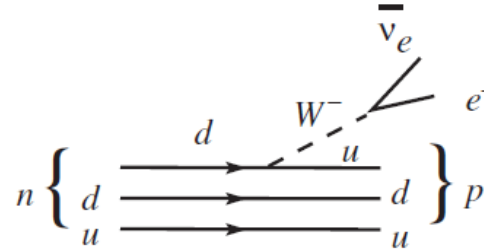
$$J_{q \rightarrow q'}^\mu = g \bar{q}'_L \gamma^\mu q_L$$

- Però, per processos com els següents,



$$J_{\mu^- \rightarrow \nu_\mu}^\mu = g \bar{\nu}_{\mu L} \gamma^\mu \mu_L$$

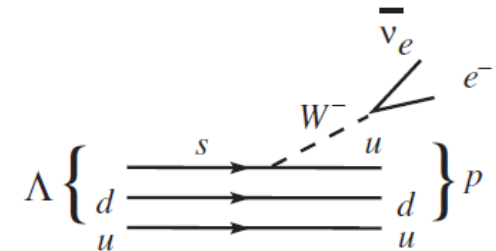
$$M \propto g^2 (\bar{\nu}_{\mu L} \gamma^\mu \mu_L) P_{\mu\nu} (\bar{e}_L \gamma^\nu \nu_{eL})$$



$$d \rightarrow u \quad (\Delta S = 0)$$

$$J_{d \rightarrow u}^\mu = g \bar{u}_L \gamma^\mu d_L$$

$$M \propto g^2 (\bar{u}_L \gamma^\mu d_L) P_{\mu\nu} (\bar{e}_L \gamma^\nu \nu_{eL})$$



$$s \rightarrow u \quad (\Delta S = 1)$$

$$J_{s \rightarrow u}^\mu = g \bar{u}_L \gamma^\mu s_L$$

$$M \propto g^2 (\bar{u}_L \gamma^\mu s_L) P_{\mu\nu} (\bar{e}_L \gamma^\nu \nu_{eL})$$

s'observa $g_{\mu^- \rightarrow \nu_\mu} \approx g_{d \rightarrow u} \approx 20 g_{s \rightarrow d}$, a partir de les mesures de les seues amplitudes de desintegració i de corregir per les diferències d'espai de fase (masses).

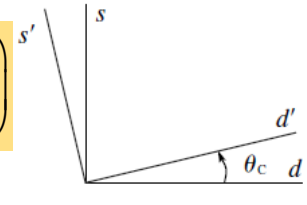
- La solució per mantenir la **universalitat de les ID** fou proposada per **Cabibbo** al 1963:

$$\begin{pmatrix} \nu_l \\ l^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}$$

Les interaccions dèbils carregades tenen lloc dins d'aquests doblets isospín dèbil

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}$$

θ_c : angle de Cabibbo



- És a dir, els estats d'interacció dèbil d' , s' són rotacions dels d'interacció forta d , s .

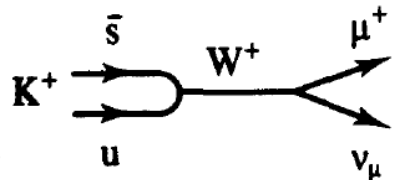
- El corrent hadrònic de Cabibbo carregada (amb increment de càrrega, $d' \rightarrow u$) serà:

$$J_{d' \rightarrow u}^\mu = g \bar{u}_L \gamma^\mu d'_L = g \bar{u}_L \gamma^\mu (d_L \cos \theta_C + s_L \sin \theta_C) = \underbrace{g \cos \theta_C \bar{u}_L \gamma^\mu d_L}_{d \rightarrow u, \Delta S=0} + \underbrace{g \sin \theta_C \bar{u}_L \gamma^\mu s_L}_{s \rightarrow u, \Delta S=1}$$

- Les amplitudes de desintegració seran, menyspreant els factors d'espai fàsic:

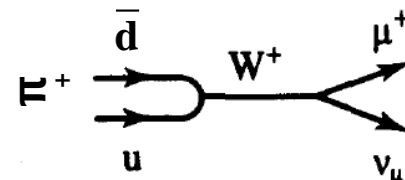
$$\Gamma(\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu) \propto g^4 \quad \frac{\Gamma(\Lambda \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e)}{\Gamma(n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e)} \approx \frac{g^4 \sin^2 \theta_C}{g^4 \cos^2 \theta_C} = \tan^2 \theta_C \Rightarrow \theta_C \approx 13^\circ$$

- Altres resultats de transicions $\Delta S=1$ vs $\Delta S=0$ confirmen el mateix valor de θ_C , per exemple:



Suprimir Cabibbo

$$g \sin \theta_C \bar{u}_L \gamma^\mu s_L$$



Afavorit Cabibbo

$$g \cos \theta_C \bar{u}_L \gamma^\mu d_L$$

- Les corrents leptòniques i hadròniques anteriors es poden escriure ara com:

$$J_{d' \rightarrow u}^\mu = g \bar{u}_L \gamma^\mu d'_L = g \bar{\chi}_L \gamma^\mu \tau_+ \chi_L \equiv J_+^\mu, \quad \chi_L = \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L, \quad \tau_\pm = (\tau_1 \pm i\tau_2)/2,$$

$$J_-^\mu = g \bar{\chi}_L \gamma^\mu \tau_- \chi_L = g \bar{d}'_L \gamma^\mu u_L = J_{u \rightarrow d'}^\mu \equiv J_+^{\mu\dagger}, \quad \tau_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- En general, podem escriure

$$J_\pm^\mu = g \bar{\chi}_L \gamma^\mu \tau_\pm \chi_L$$

Doblets d'isospín dèbil

$$\chi_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L$$

$$J_+^\mu \equiv J^\mu \Leftrightarrow W^-$$

$$J_-^\mu \equiv J^{\mu\dagger} \Leftrightarrow W^+$$

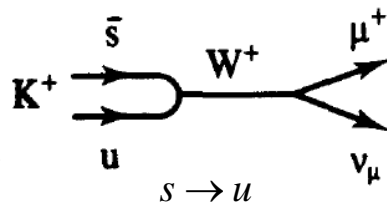
Mecanismes GIM i KM

- Es tracta d'un dels majors triomfs de la física de partícules.
- Una conseqüència immediata de l'estructura de corrent carregada és la possibilitat de corrents neutres:

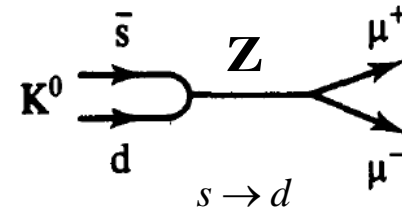
$$J_0^\mu = g \bar{\chi}_L \gamma^\mu \tau_3 \chi_L = g \left(\bar{u}_L \gamma^\mu u_L - \bar{d}'_L \gamma^\mu d'_L \right) =$$

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad = g \underbrace{\left(\bar{u}_L \gamma^\mu u_L - \cos^2 \theta_C \bar{d}_L \gamma^\mu d_L - \sin^2 \theta_C \bar{s}_L \gamma^\mu s_L \right)}_{\Delta S=0} - g \sin \theta_C \cos \theta_C \underbrace{\left(\bar{d}_L \gamma^\mu s_L + \bar{s}_L \gamma^\mu d_L \right)}_{\Delta S=1}$$

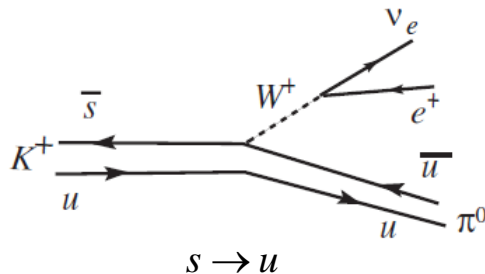
- Per tant, amb $\theta_C \approx 13^\circ$ processos de CC i CN amb canvi d'estranyesa haurien de tindre probabilitats similars. Però, s'observa (entre altres):



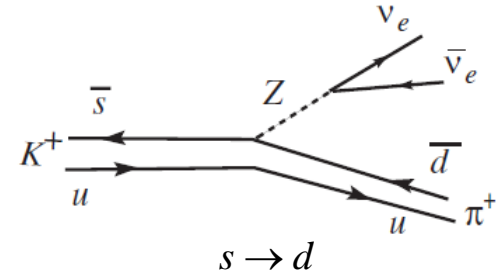
$$Br(K^+[u\bar{s}] \rightarrow \mu^+ \nu_\mu) = (63.51 \pm 0.11)\%$$



$$Br(K_L^0[d\bar{s}] \rightarrow \mu^+ \mu^-) = (6.84 \pm 0.11) \times 10^{-9}$$



$$Br(K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e) = (5.07 \pm 0.04)\%$$



$$Br(K^+ \rightarrow \pi^+ \nu_e \bar{\nu}_e) = (1.7 \pm 1.1) \times 10^{-10}$$

- La solució al problema fou proposada en 1970 per Glashow, Iliopoulos i Maiani (GIM).
- El **mecanisme GIM** postula un nou quark, el charm ó c , amb la mateixa càrrega que el quark u , i que acompanya a l'estrany formant un nou doblet d'isospín dèbil:

$$\chi_L = \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \quad \text{La mateixa rotació de Cabibbo}$$

- En efecte, la CN de Cabibbo tindrà ara el terme adicional:

$$\begin{aligned} g \bar{\chi}_L \gamma^\mu \tau_3 \chi_L &= g \left(\bar{c}_L \gamma^\mu c_L - \bar{s}'_L \gamma^\mu s'_L \right) = \\ &= g \underbrace{\left(\bar{c}_L \gamma^\mu c_L - \sin^2 \theta_c \bar{d}_L \gamma^\mu d_L - \cos^2 \theta_c \bar{s}_L \gamma^\mu s_L \right)}_{\Delta S=0} + g \underbrace{\sin \theta_c \cos \theta_c \left(\bar{d}_L \gamma^\mu s_L + \bar{s}_L \gamma^\mu d_L \right)}_{\Delta S=1} \end{aligned}$$

- Sumant les dues contribucions els termes $\Delta S=1$ cancel·len, i s'obté:

$$J_0^\mu = g \left(\bar{u}_L \gamma^\mu u_L + \bar{c}_L \gamma^\mu c_L - \bar{d}_L \gamma^\mu d_L - \bar{s}_L \gamma^\mu s_L \right)$$

\Rightarrow Les corrents neutres conserven estranyesa i encant, i acoblen a directament a $u\bar{u}$, $d\bar{d}$, $s\bar{s}$ i $c\bar{c}$.

No existeixen corrents neutres amb canvi de sabor

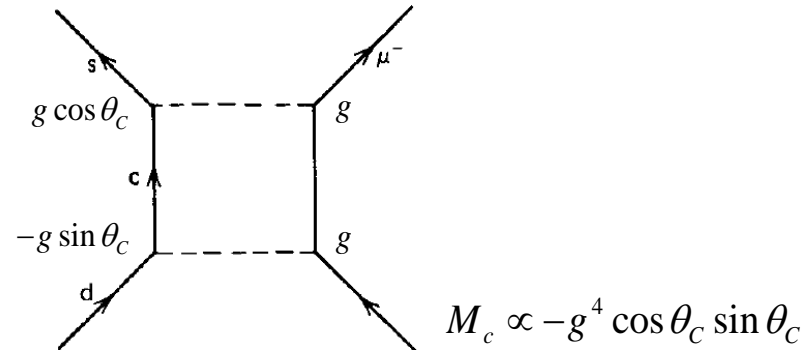
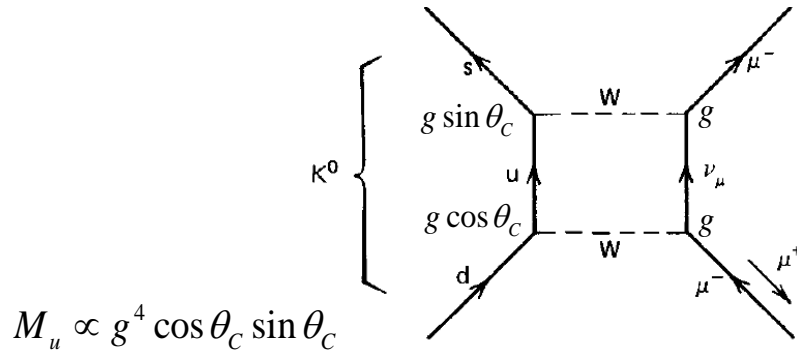
- Des d'una perspectiva històrica açò va ser la predicció de l'existència del quark c , descobert al 1974, encara que quan es va proposar quasi ningú va creure que fos així...
- Atenció: les corrents neutres (dèbils, e.m. ó fortes) impliquen tant fermions levogirs como dextrogirs, a excepció dels neutrins:

$$\left(e^- \right)_R \quad \left(\mu^- \right)_R \quad \left(u \right)_R \quad \left(d \right)_R \quad \left(c \right)_R \quad \left(s \right)_R$$

- GIM permet explicar la supressió, però no zero, de les probabilitats de les desintegracions

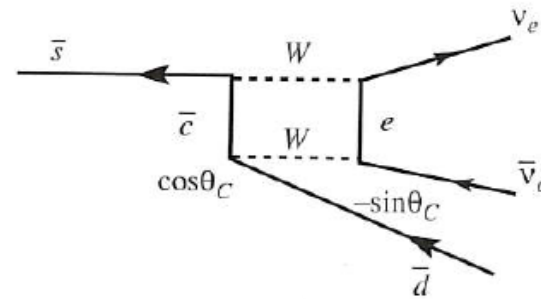
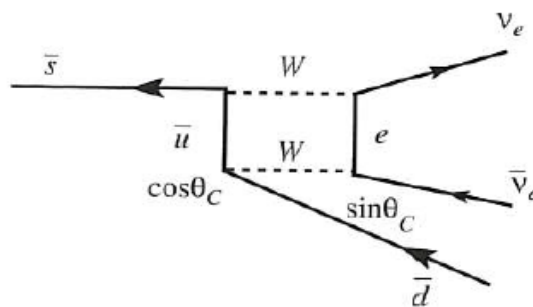
$K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ i $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu_e \bar{\nu}_e$ esmentades.

- En efecte, la desintegració leptònica $K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ se produeix a segon ordre per l'intercanvi de dos bosons W , amb contribució dels dos quarks, u i c :



- Si les masses dels quarks c i u foren idèntiques les contribucions FCNC dels dos diagrames cancel·len exactament (recordeu, els propagadors depenen de la massa de la partícula virtual).

- En el cas de la desintegració semileptònica $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu_e \bar{\nu}_e$ tenim el mateix:



- En els dos casos el Br mesurat es consistent amb una massa del quark $c \sim 1.5$ GeV.
- Consistent amb la massa de 3.097 GeV del mesó J/ψ (estat lligat fonamental $c\bar{c}$).

- Abans de la descoberta del quark c , Kobayashi i Maskawa (1973) van estendre l'esquema de Cabbibo-GIM a tres generacions de dobletes d'isospín dèbil de quarks:

$$\chi_L^{(q_i)} = \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L$$

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

V s'anomena matriu de mescla de quarks o de CKM

- Amb açò podem escriure el corrent carregat de quarks com:

$$J_{\pm}^{\mu} = g \sum_{i=1}^3 \bar{\chi}_L^{(q_i)} \gamma^{\mu} \tau_{\pm} \chi_L^{(q_i)}$$

$$U = \begin{pmatrix} u \\ c \\ s \end{pmatrix}, \bar{U} = (\bar{u} \quad \bar{c} \quad \bar{t}), D = \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}, \bar{D} = (\bar{d} \quad \bar{s} \quad \bar{b})$$

$$J_{+}^{\mu} = g \bar{U}_L \gamma^{\mu} V D_L = g \sum_{i,k=1}^3 \bar{U}_{L(i)} \gamma^{\mu} V_{ik} D_{L(k)}$$

$$J_{-}^{\mu} = g \bar{D}_L V^{\dagger} \gamma^{\mu} U_L = g \sum_{i,k=1}^3 \bar{D}_{L(k)} V_{ki}^{*} \gamma^{\mu} U_{L(i)} \equiv J_{+}^{\mu \dagger}$$

- Per això els elements de la matriu s'escriuen

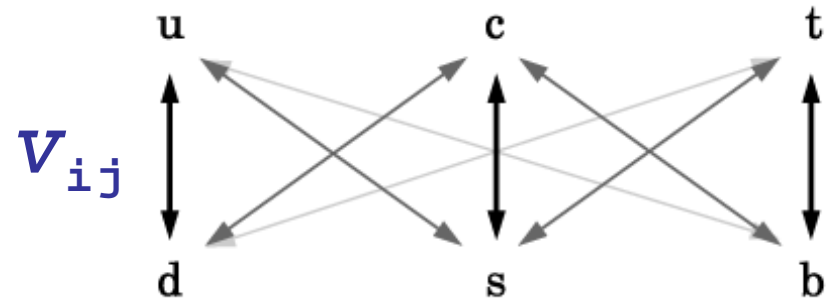
Element $V_{DU} \Rightarrow$ Acoblament $D \rightarrow U + W^{-}$

$$V = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}$$

$$|V| \approx \begin{pmatrix} 0.97 & 0.23 & 0.004 \\ 0.23 & 0.97 & 0.04 \\ 0.008 & 0.04 & 1 \end{pmatrix}$$

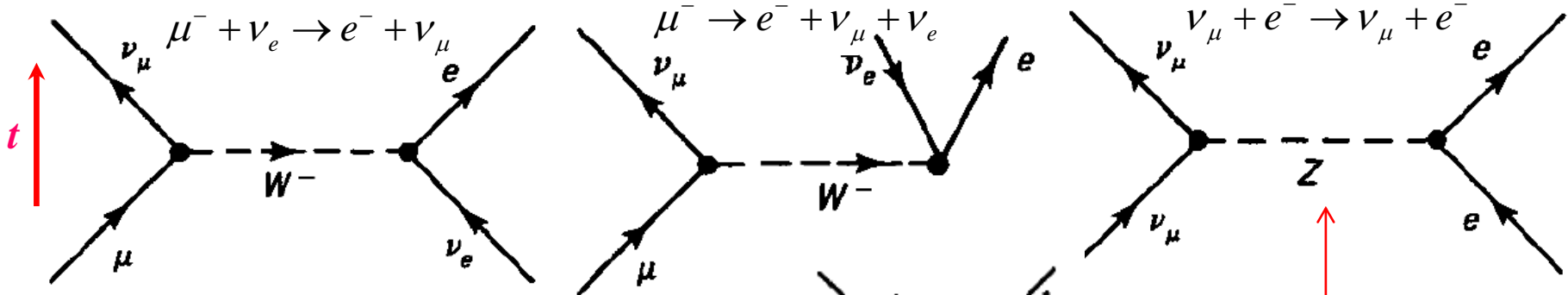
- La unitarietat i dimensió 3×3 de V implica que està definida per 3 magnituds i 1 fase:

- Explica la ruptura de CP en kaons i mesons B (motivació original de KM).
- Predicció de la 3a família, abans del descobriment del quark c i leptó τ .

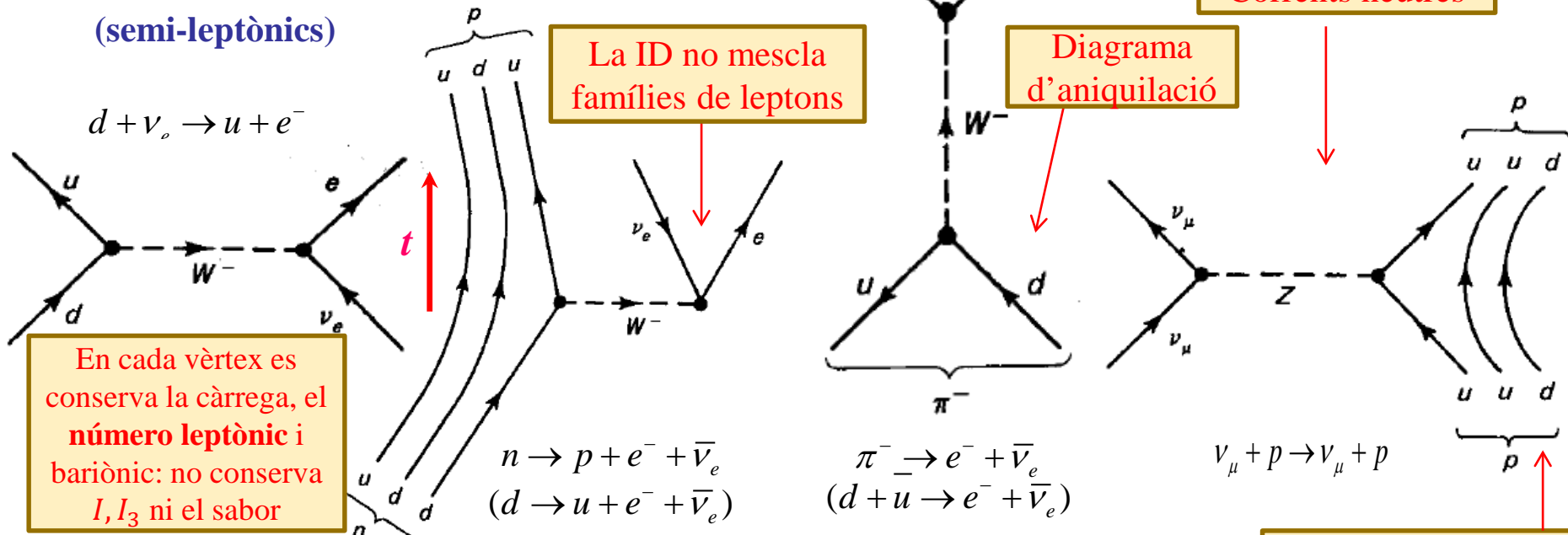


Exemples de processos dèbils

- Exemples de processos leptònics purs: en cada vèrtex es conserva el número leptònic per separat.

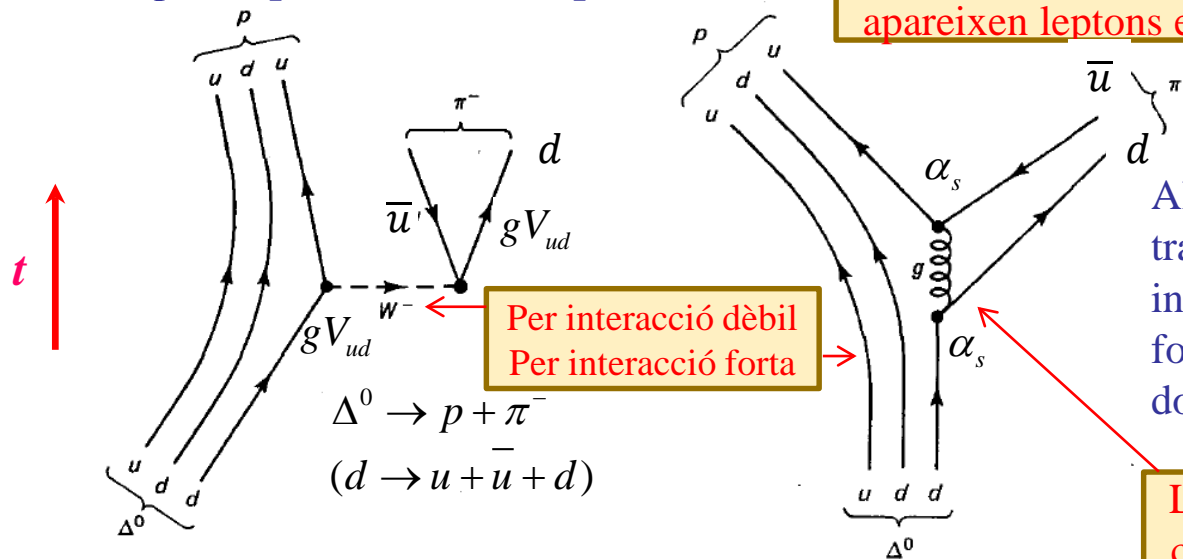


- Exemples de processos amb quarks i leptons (semi-leptònics)



La desintegració β nuclear i la desintegració del pió són el mateix tipus de procés.

■ Exemple de **procés hadrònic pur**:



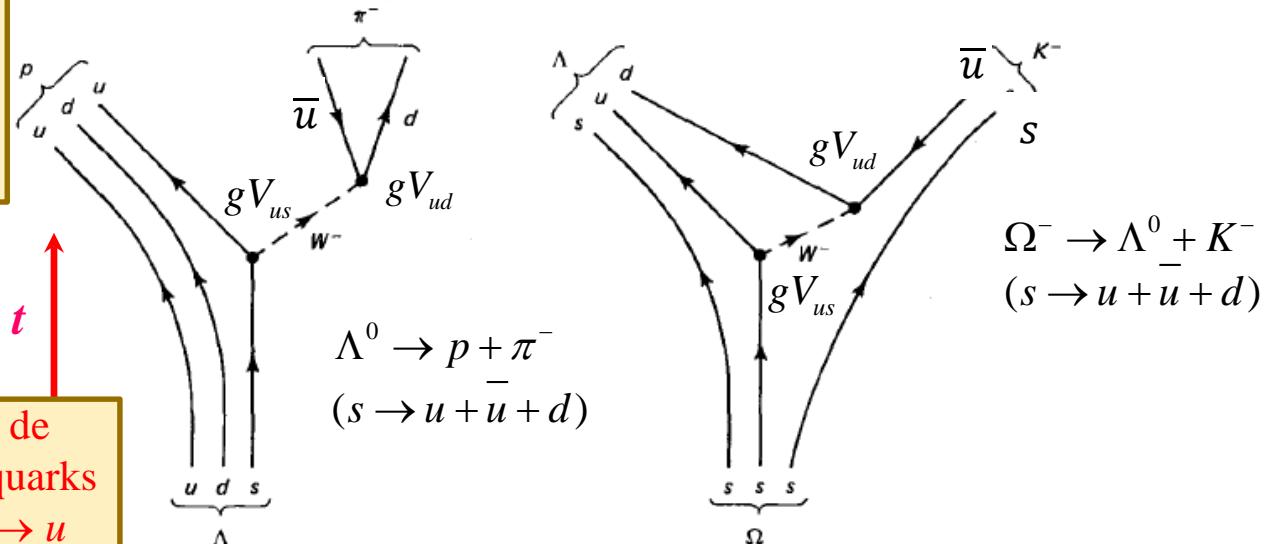
Són processos no leptònics: no apareixen leptons en l'estat final

Al mateix estat final s'arriba a través del bosó dèbil com per intercanvi de gluons (interacció forta), i per tant el procés fort dominarà sobre el procés dèbil.

Les interaccions fortes conserven I_3 i el sabor (brems d'un gluó)

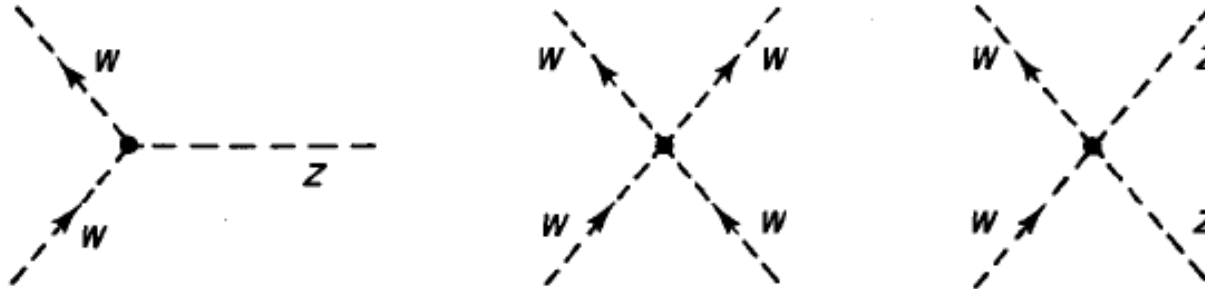
■ Exemple de corrents carregats amb canvi d'estranyesa (sabor):

Observeu en les desintegracions dels hadrons l'existència de quarks "espectadors"

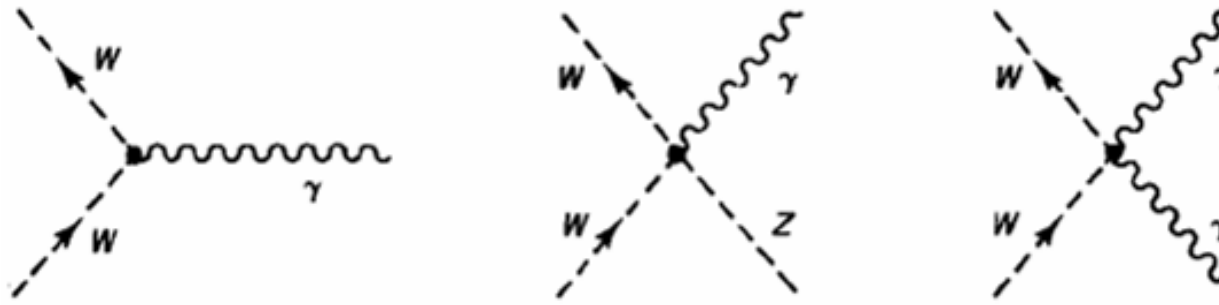


Els processos dèbils de corrent carregat entre quarks canvien de família $s \rightarrow u$

- Els bosons W i Z s'acoblen també directament entre ells (de la mateixa manera que ho feien els gluons) (la teoria és invariant gauge no abeliana):

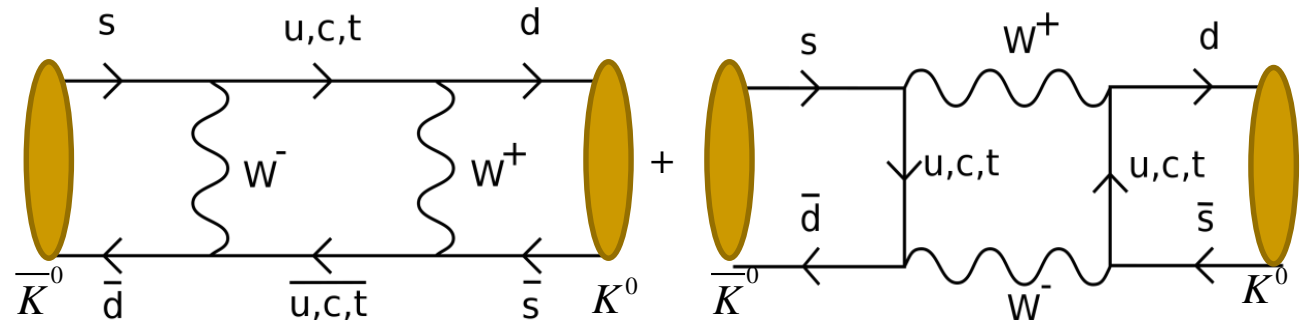


- Com el W és carregat, també s'acobla al fotó:



- La interacció dèbil és pertorbativa (veure a continuació), per la qual cosa sempre dominen els diagrames de menor ordre.

Exemple de procés a 2^o ordre (1^{er} ordre no existeix):
Oscil·lacions (mescla) de
 de K^0 i \bar{K}^0



Intensitat de la interacció dèbil

- Calculem ara la intensitat relativa de la interacció dèbil usant les desintegracions ja vistes dels barions Σ :

Intensitats relatives de la interacció dèbil i e.m. respecte de la forta

$$\frac{\Gamma_1(\Sigma^+(1189) \rightarrow p\pi^0)}{\Gamma_2(\Sigma^0(1385) \rightarrow \Lambda\pi^0)} = \frac{\tau_2}{\tau_1} \approx \frac{5.5 \times 10^{-23} \times 0.52}{0.8 \times 10^{-10} \times 0.87} \sim \frac{\alpha_{w,eff}^2 |V_{ud} V_{us}|^2}{\alpha_s^2} \Rightarrow \alpha_{w,eff} \sim 10^{-6} \alpha_s \sim 10^{-4} \alpha$$

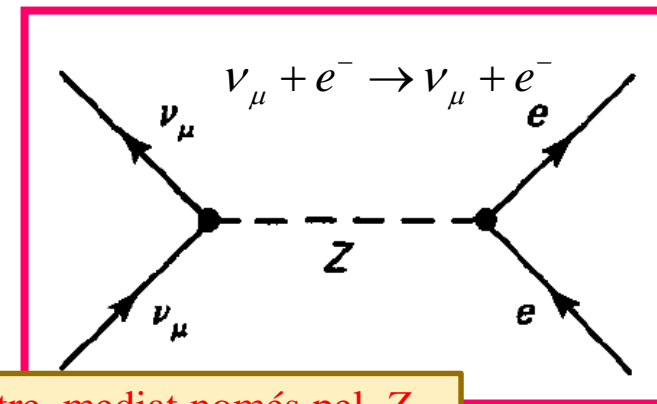
Procés dèbil amb canvi de estranyesa

Procés fort (conserva isospín i estranyesa)

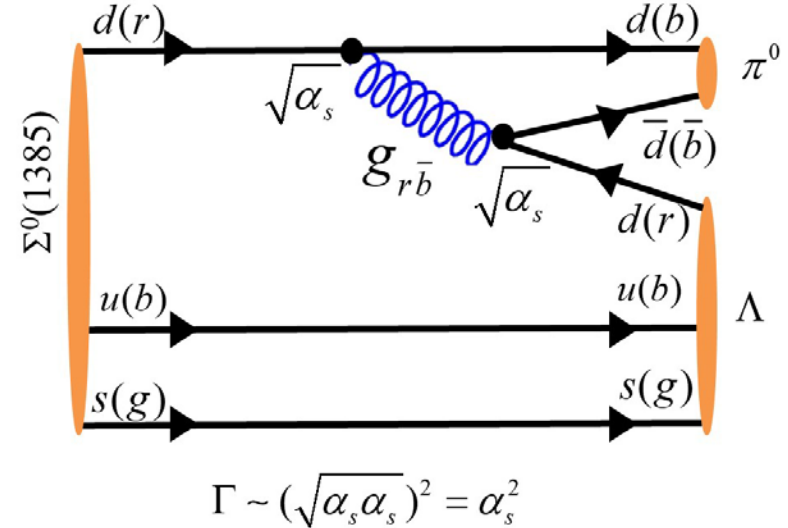
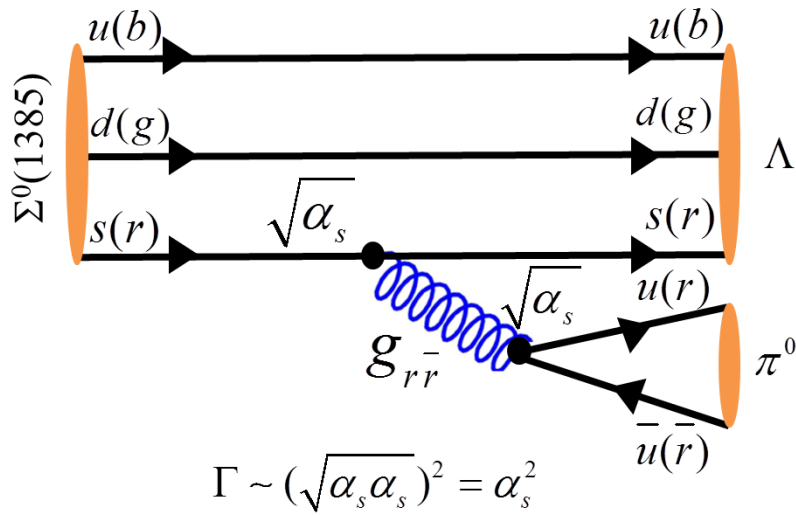
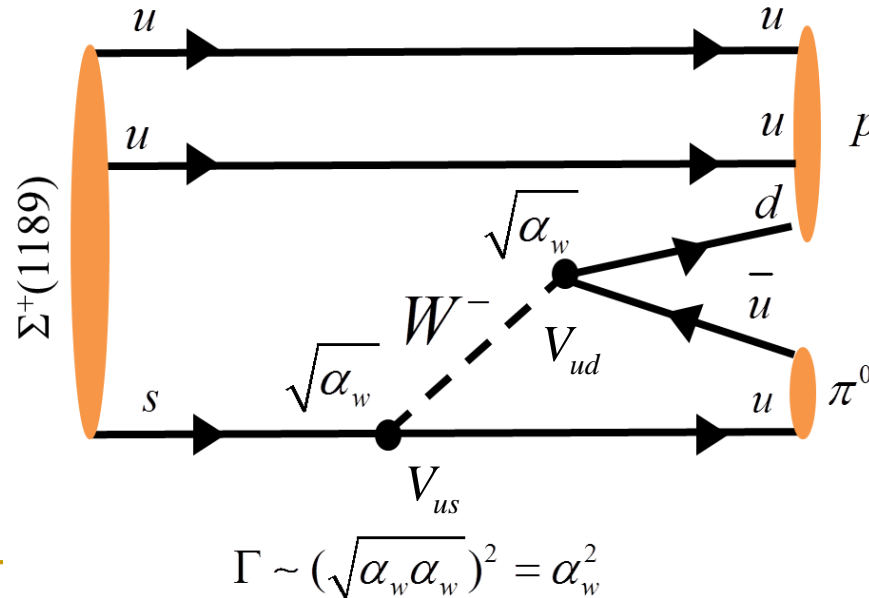
- Els processos dèbils estan molt desfavorits enfront dels processos forts o electromagnètics, excepte si estos últims estan prohibits per alguna llei de conservació.
- Això explica que:
 - La primera interacció dèbil (per corrent carregat) a descobrir-se (la desintegració β nuclear) no tardara a identificar-se com a tal (Fermi, 1933).
 - Però les interaccions per corrent neutre no es van identificar teòricament fins el desenrotllament de la Teoria Electro-dèbil, i confirmades en experiments del CERN (1973).



Difusió d'electrons per interacció electro-dèbil: mediadors γ i Z , que competeixen

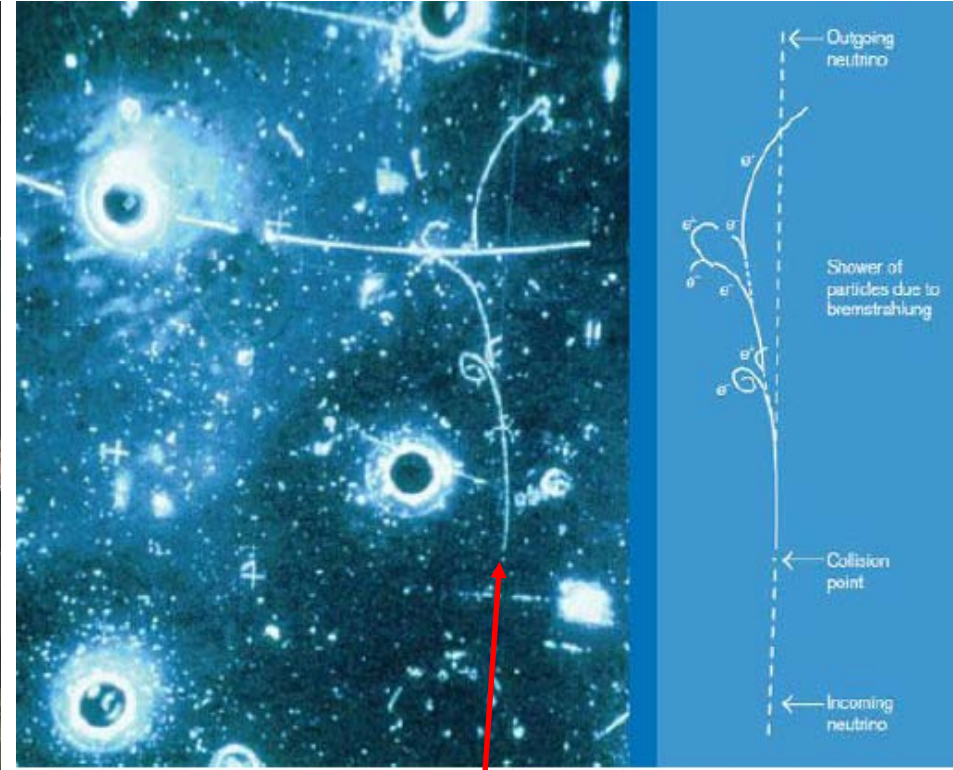


Corrent neutre, mediat només pel Z . El fotó no s'acobla a partícules neutres

$\Sigma^0(1385) \rightarrow \Lambda \pi^0$

 $\Sigma^+(1189) \rightarrow p \pi^0$


Descobriment dels corrents neutres

- 1973. Cambra de bombolles Gargamelle (CERN)

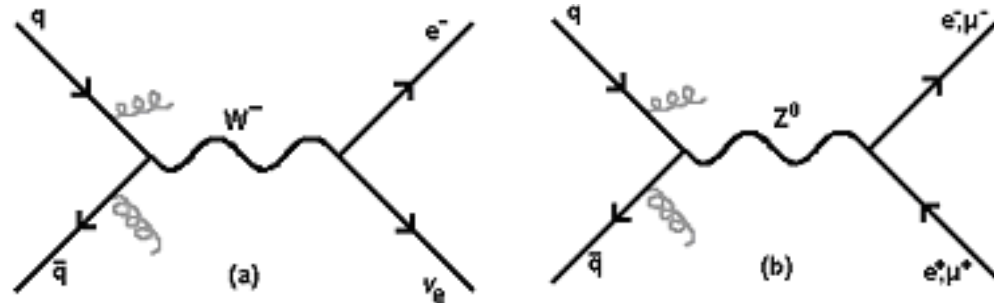


e^-

$$\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-$$

Descobriment dels bosons W^\pm i Z

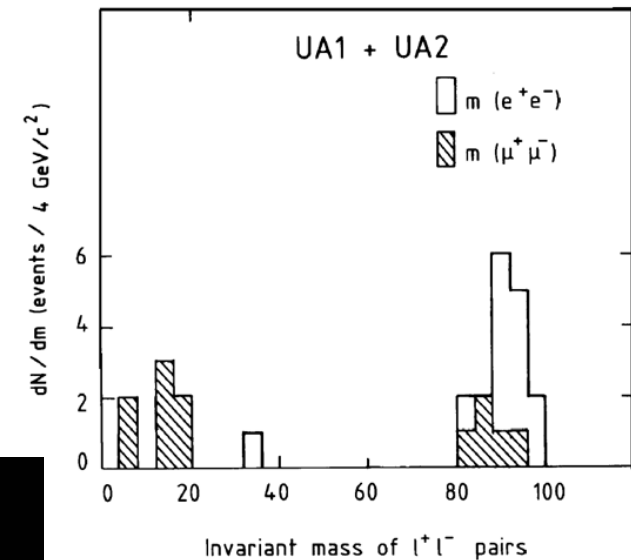
- 1983, bosons W^\pm i Z van ser descoberts al CERN als experiments UA1 i UA2 en col·lisions proton-antiprotó:



$$\begin{aligned} \bar{p} + p &\rightarrow W^\pm + X, \quad W^\pm \rightarrow e^\pm + \nu_e (\bar{\nu}_e) \\ \bar{p} + p &\rightarrow Z + X, \quad Z \rightarrow e^+ + e^- (\mu^+ + \mu^-) \end{aligned}$$



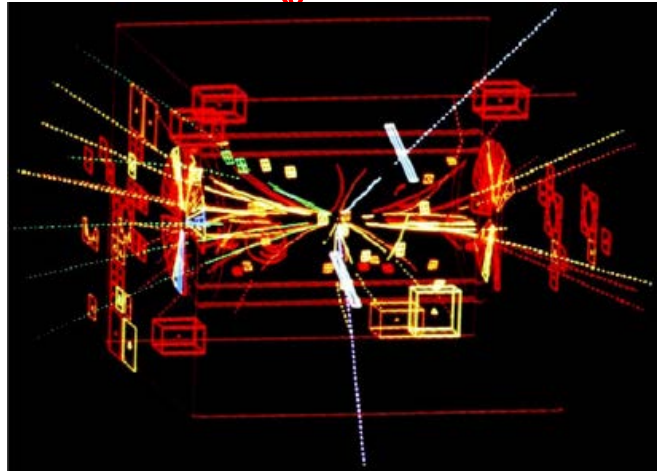
Carlo Rubbia i Simon van der Meer



Mesura **Teoria Electro-dèbil**

$$m_W = 80.9 \pm 1.5 \text{ (82} \pm 2\text{) GeV}$$

$$m_Z = 95.6 \pm 1.4 \text{ (92} \pm 2\text{) GeV}$$



Estudi detallat dels portadors de la força dèbil

- Entre 1989 i 2001 als experiments del LEP (CERN) i SLC (SLAC), se produeixen milions de bosons W^\pm i Z , el que permet mesurar les seues propietats amb detall.
- També s'ha estudiat amb detall al Tevatron (anys 2000) i més recentment al LHC.
- La consistència dels resultats experimentals amb la Teoria Electrodèbil és aclaparadora, en les masses i en molts altres observables (mesurat a aquests i molts altres experiments):

$$m_{\text{exp}}(W^\pm) = 80.403 \pm 0.029 \text{ GeV}$$

$$m_{\text{teo}}(W^\pm) = 80.376 \pm 0.017 \text{ GeV}$$

$$m_{\text{exp}}(Z) = 91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV}$$

$$m_{\text{teo}}(Z) = 91.1874 \pm 0.0021 \text{ GeV}$$

$$\sin^2 \theta_w = 0.2324 \pm 0.0012 \quad (0.23152 \pm 0.00014)$$

- Aquest acord i precisió va permetre inclòs estimar la massa del bosó de Higgs a través de correccions radiatives (diagrames d'ordre superior) als molts observables mesurats.

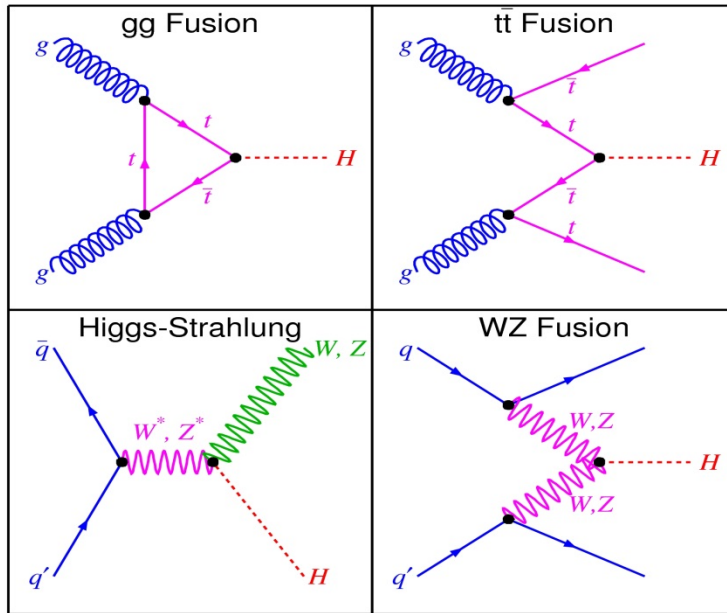


No son els valors més recents...

Descobriment del bosó de Higgs

- Descobert al 2012 al LHC (col·lisions pp), després de 45 anys d'haver estat inclòs el mecanisme BEH (Higgs) per Weinberg i Salam en la Teoria Electro-dèbil (1967).

Mecanismes de producció



Desintegracions possibles (Teoria electrodèbil, Model Estàndar)

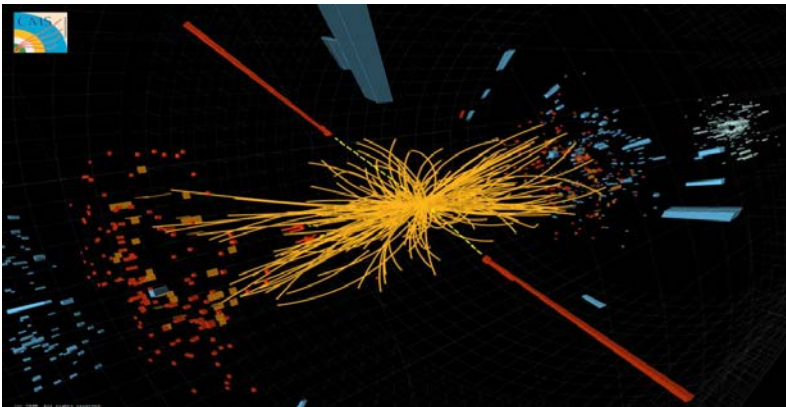
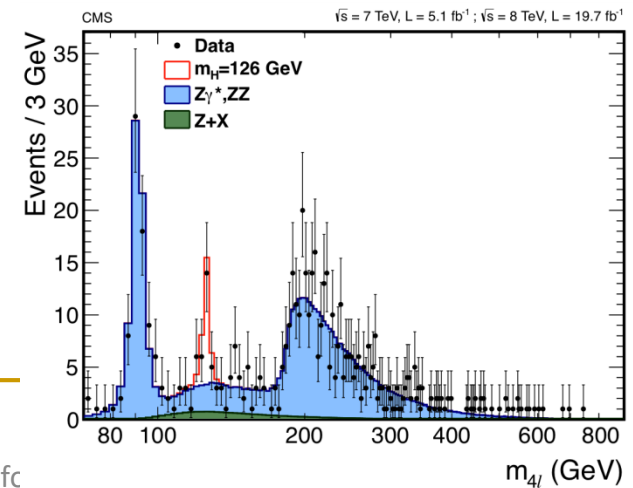
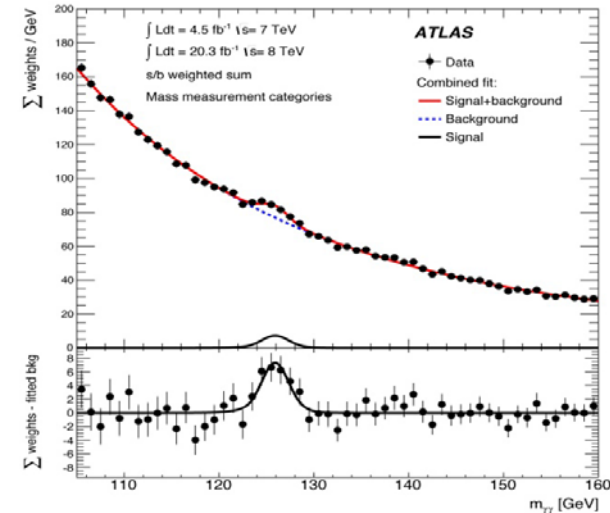
$$H \rightarrow \gamma\gamma$$

$$H \rightarrow ZZ \rightarrow 4l$$

$$H \rightarrow WW \rightarrow \begin{cases} l\nu l\nu \\ ll\nu\nu \\ llqq \end{cases}$$

$$H \rightarrow \tau^+\tau^- \rightarrow \begin{cases} ll4\nu \\ lh3\nu \\ lvqq \end{cases}$$

$$H \rightarrow b\bar{b}$$



Resum dels portadors de força fonamentals

BOSONS			force carriers spin = 0, 1, 2, ...		
Unified Electroweak spin = 1			Strong (color) spin = 1		
Name	Mass GeV/c ²	Electric charge	Name	Mass GeV/c ²	Electric charge
γ photon	0	0	g gluon	0	0
W⁻	80.39	-1	Higgs Boson spin = 0		
W⁺ W bosons	80.39	+1	Name	Mass GeV/c ²	Electric charge
Z⁰ Z boson	91.188	0	H Higgs	126	0

Properties of the Interactions

The strengths of the interactions (forces) are shown relative to the strength of the electromagnetic force for two u quarks separated by the specified distances.

Property	Gravitational Interaction	Weak Interaction (Electroweak)	Electromagnetic Interaction	Strong Interaction
Acts on:	Mass – Energy	Flavor	Electric Charge	Color Charge
Particles experiencing:	All	Quarks, Leptons	Electrically Charged	Quarks, Gluons
Particles mediating:	Graviton (not yet observed)	W⁺ W⁻ Z⁰	γ	Gluons
Strength at $\left\{ \begin{array}{l} 10^{-18} \text{ m} \\ 3 \times 10^{-17} \text{ m} \end{array} \right.$	10^{-41} 10^{-41}	0.8 10^{-4}	1 1	25 60

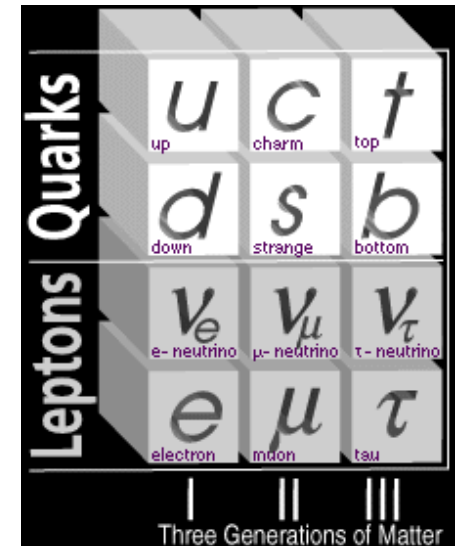
4. El Model Estàndard...

- El Model Estàndard descriu com interaccionen les partícules elementals entre elles per mitjà de tres interaccions (la gravitatòria no està inclosa).

Interacció	Intensitat	Mediador
Forta	1	Gluó, g
Electromagnètica	10^{-2}	Fotó, γ
Dèbil	10^{-6}	W^+, W^-, Z
Gravitatòria	10^{-39}	Gravitó, G

- Basat en la simetria gauge $SU(2)_{\text{isospín dèbil}} \times U(1)_{\text{hipercàrrega dèbil}} \times SU(3)_{\text{color(fort)}}$

- Tota la matèria està constituïda per dues classes de partícules, agrupades en tres generacions:
 - 12 fermions (d'espín $\frac{1}{2}$) (i els seus corresponents antifermions): 6 leptons i 6 quarks.
 - Comptant fermions i antifermions, i color, es té un total de 12 leptons i 36 quarks.
 - 12 bosons (d'espín enter) mediadors de les 3 interaccions:
 - ❖ Electro-dèbil (γ, W^+, W^-, Z).
 - ❖ Forta (8 gluons).



- Almenys una partícula de **Higgs**, per a dotar de massa als fermions i bosons.
- **Principals limitacions:** els neutrins se suposen sense massa i 19 paràmetres arbitraris (masses, angles de mescla, constants d'acoblament....



... i més allà

Qüestions obertes en Física de Partícules

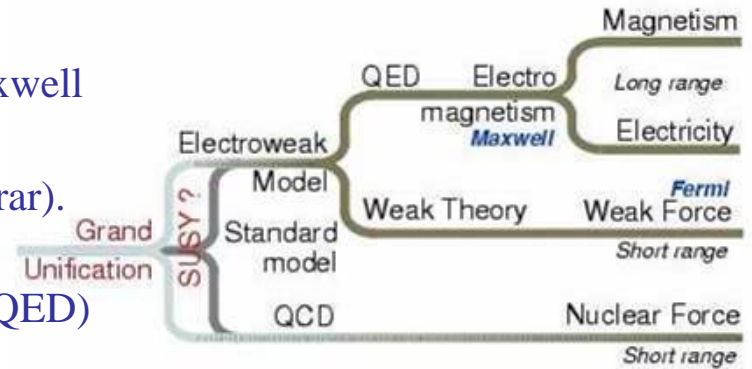
- Què determina els valors dels 19 paràmetres lliures del Model Estàndard?
- Origen de la massa de les partícules: el Higgs ja trobat: però en quina forma?
- Per què hi ha tres famílies de quarks i leptons de cada càrrega?
- Hi ha un patró en les seues masses?
- Existeixen més tipus de partícules i forces que podran ser descobertes a més altes energies (Super-simetria, etc.) ?
- Són els quarks i leptons realment fonamentals o són compostos?
- Quines partícules formen la matèria fosca?
- Com podem incloure la interacció gravitatòria en el Model Estàndard actual?
- Per què domina la matèria sobre l'antimatèria en l'Univers?....



Teories de Gran Unificació (GUT)

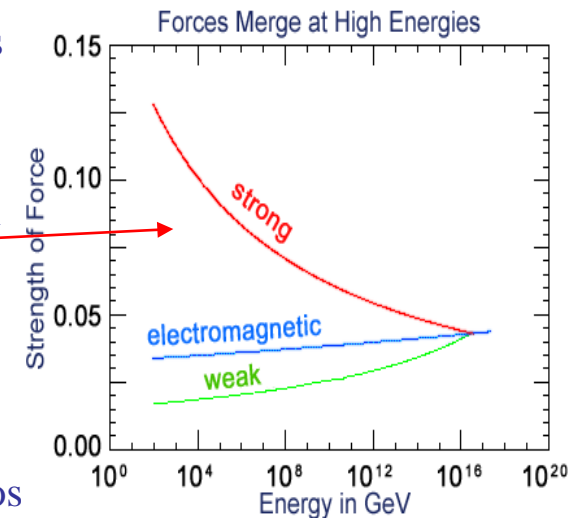
Unificació de les forces

- La **Teoria Clàssica de l'Electromagnetisme** de Maxwell va unificar l'electricitat i el magnetisme.
 - Consistent amb la relativitat especial (la va inspirar).
 - Quantificació del camp e.m. \Rightarrow QED.
- La **Teoria Electro-dèbil** unifica la interacció e.m. (QED) amb la interacció dèbil.
 - Interacció e.m. i dèbil són manifestacions de la “mateixa força”.
 - La diferència d'intensitats i el diferent abast de les interaccions es deu a la diferència de massa dels bosons intermediaris (0 per γ , $\sim 90 \text{ GeV}/c^2$ para W^\pm y Z), però l'acoblament d'ambdós ve determinat per la mateixa constant d'estructura fina.



■ Teories de gran unificació (GUT):

- Unificació sense gravetat, ja que les 3 constants convergeixen per a $M_X \sim 10^{15} \text{ GeV}/c^2$.
- Convergència cridanera en l'extensió Super-simètrica del ME ('Supersimetria' o 'SUSY').
 - Grup especial de matrius ortogonals d'orde 10, $SO(10)$.
 - Predicció: cada fermió i bosó del ME té la seua parella bos fermiònica.
 - Trobar el Higgs (o les seues versions 'Supersimètriques') és una qüestió clau.

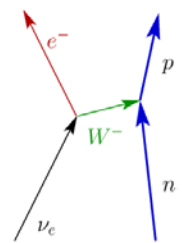
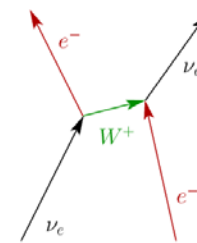
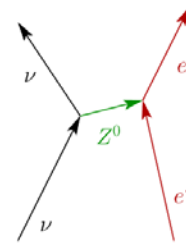
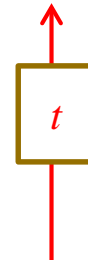
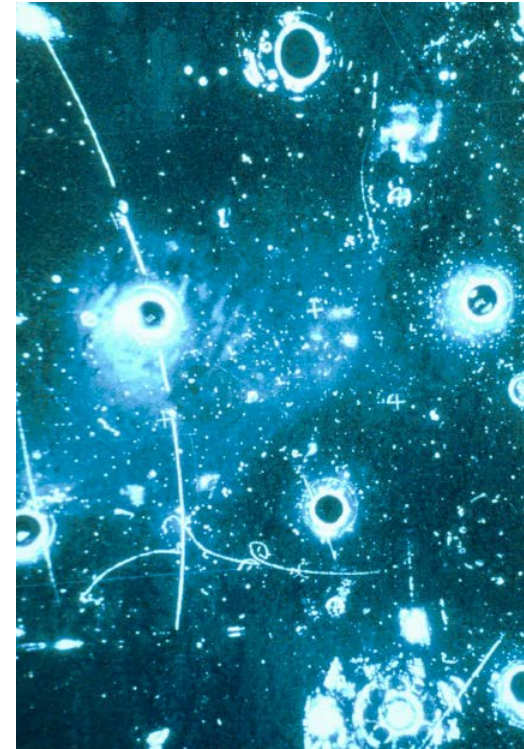


Basades en simetries gauge de major orde que incloguen el ME

Tema 5 EXTRA: Les interaccions fonamentals

Límit NR de l'equació de Dirac
 Fermions de Majorana
 Transicions i teoria de pertorbacions
 Propagadors de les interaccions
 Unificació electro-dèbil
 Regles de Feynman d'interacció electro-dèbil
 El mecanisme de Brout–Englert–Higgs (BEH)
 Nucleosíntesi del Big Bang

Descobriments dels corrents neutres



Neutral current

Charged current

Límit NR de l'equació de Dirac

- Per a un electró NR, u_A es major que u_B per un factor ordre β . Efectivament, com $\vec{p} = m\vec{\beta}$, $E \approx m$,

$$u_B^{(1)} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \chi^{(1)} = \frac{1}{E + m} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} \approx \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \beta_z \\ \beta_x + i\beta_y \end{pmatrix}, \quad u_B^{(2)} \approx \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \beta_x - i\beta_y \\ -\beta_z \end{pmatrix}$$

\Rightarrow Electrons NR es podem descriure amb bi-espinors

- El límit NR de l'equació de Dirac es troba considerant aquesta equació en un camp e.m.

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad \partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + iqA_\mu, \text{ amb } A_\mu = (\phi, -\vec{A}), \quad \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right)$$

- Per al cas de l'electró, $q = -|e| < 0$, $E_{NR} = E - m$, $e\phi \ll m$, i

$$E_{NR} u_A = \left[\frac{1}{2m} (-i\vec{\nabla} + e\vec{A})^2 + \frac{|e|}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} - e\phi \right] u_A$$

Equació de
Schrödinger-Pauli

Interacció del moment dipolar magnètic
de l'electró amb el camp magnètic

Interacció de l'electró
amb el camp e.m.

La predicció de g és un triomf monumental de Dirac. El seu valor és 2.00232, diferència deguda a correccions radiatives de la TQC (a veure). Confirmat experimentalment amb precisió $2:10^{-10}$.

$$\frac{|e|}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} = \vec{\mu} \cdot \vec{B}, \quad \vec{\mu} = -\frac{|e|}{2m} \vec{\sigma} = -\frac{|e|}{2m} 2\vec{S} = -g \frac{|e|}{2m} \vec{S}, \quad g = 2$$

Moment dipolar
magnètic de l'electró

Factor giromagnètic
de l'electró

Fermions de Majorana

- Seria possible tindre neutrins massius i encara així assegurar que les interaccions febles sols acoblen a ν_L i ν_R ? \Rightarrow **Fermions de Majorana**
- En representació de Weyl, l'equació de Dirac és:

$$E \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m) \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} -\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \cdot \vec{p} + \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} m \right] \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} & mI \\ mI & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1) & (E + \vec{\sigma} \cdot \vec{p})u_A - mu_B = 0 \\ (2) & (E - \vec{\sigma} \cdot \vec{p})u_B - mu_A = 0 \end{cases}$$

**Equacions acoblades
per a u_A i u_B**

- És possible desacoblar, com en el cas de $m = 0$, si u_B (u_A) es construeix usant exclusivament les components de u_A (u_B), de la manera següent:

$$u_I = \begin{pmatrix} u_A \\ -i\sigma_2 u_A^* \end{pmatrix} \quad u_{II} = \begin{pmatrix} i\sigma_2 u_B^* \\ u_B \end{pmatrix}$$

- Substituint u_I en (1) i (2) es comprova que són idèntiques amb canvi de signe en E i moment.
- El mateix ocorre amb u_{II} .
- Per tant, les construccions u_I i u_{II} transformen com espinors de Dirac, però a diferència d'aquells estan definits per bi-espinors independents (desacobllats). Per tant

$$(1) \quad (E + \vec{\sigma} \cdot \vec{p})u_A + im_A \sigma_2 u_A^* = 0$$

$$(2) \quad (E - \vec{\sigma} \cdot \vec{p})u_B - im_B \sigma_2 u_B^* = 0$$

- Cada equació té solucions d' $E > 0$ i $E < 0$.
- Les dues equacions podem descriure fermions (anti-fermions) de masses diferents.

- El conjugat de càrrega (antipartícula) de u_I i u_{II} és la pròpia partícula:

$$u_{I,c} = i\gamma^2 u_I^* = i\gamma^2 \begin{pmatrix} u_A \\ -i\sigma_2 u_A^* \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A^* \\ -i\sigma_2 u_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma_2 i\sigma_2 u_A \\ -i\sigma_2 u_A^* \end{pmatrix} = u_I$$

De la mateixa manera, $u_{II,c} = u_{II}$.

⇒ **Partícula i antipartícula coincideixen.** Aquest tipus de fermions s'anomenen **de Majorana**.

- Noteu que en el cas $m = 0$, fermions de Dirac i Majorana són equivalents, pel que no es poden distingir les dues teories. Però sí que es pot en cas que $m \neq 0$, inclosos els neutrins. Vegem...
 - Definim ν_e ($\bar{\nu}_e$) com la partícula neutra produïda juntament amb β^+ (β^-):

$$\begin{array}{ll} p \rightarrow n + e^+ + \nu & \nu \leftrightarrow e^+ \\ n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu} & \bar{\nu} \leftrightarrow e^- \end{array}$$

Definició associada a la conservació de número leptònic (electrònic), L , per ν 's de Dirac

- ν 's de Dirac amb $m = 0$ són estats propis d'helicitat, $\lambda = -1$, mentre que anti- ν de $\lambda = +1$.
⇒ Auto-estats d'helicitat i número leptònic coincideixen.
- Per $m \neq 0$, l'helicitat no és un bon número quàntic, però quiralitat \equiv helicitat per $m/2E \rightarrow 0$:

$$u_{\nu,L} \approx u_{\nu,L}^- + \frac{m}{2E} u_{\nu,L}^+ \quad \text{per } \nu \qquad \nu_{\nu,L} \approx \nu_{\nu,L}^+ + \frac{m}{2E} \nu_{\nu,L}^- \quad \text{per } \bar{\nu}$$

⇒ Quiralitat L es mescla d'helicitat dominant $- (+)$ i suprimida $+ (-)$ per ν (anti- ν).

- I recordem que l'estructura V-A de la corrent és $\bar{u}_{e,L} \gamma^\mu u_{\nu,L}$.

- Açò defineix la fenomenologia dels diferents tipus de neutrins:

$m = 0$ (Dirac \equiv Majorana)


ν  makes l^-

$q = -1, L = +1, \lambda = -1$


$\bar{\nu}$  makes l^+

$q = +1, L = -1, \lambda = +1$

$m \neq 0$, Dirac


ν  make l^-
amplitude m/E_ν

$q = -1, L = +1, \lambda = -1$ dominant


$\bar{\nu}$  make l^+
amplitude m/E_ν

$q = +1, L = -1, \lambda = +1$ dominant

$m \neq 0$, Majorana

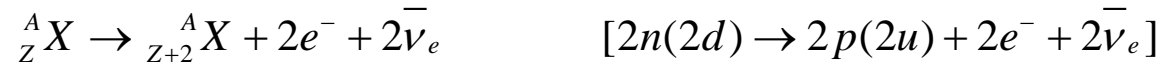
" ν "  makes l^-
amplitude m/E_ν

$q = -1, \lambda = -1$ dominant

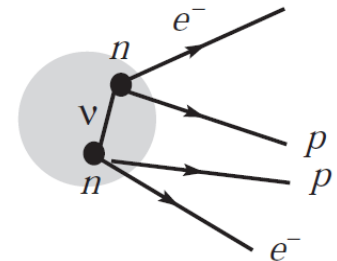
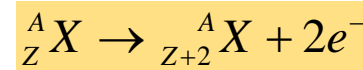
" $\bar{\nu}$ "  makes l^+
amplitude m/E_ν

$q = +1, \lambda = +1$ dominant

- Amb açò, és clar que no existeix cap evidència experimental de ν 's Dirac vs Majorana
- Una manera de resoldre la qüestió és mitjançant la **desintegració doble β sense ν 's**.
- La doble β amb neutrins ($2\nu 2\beta$) és molt rara (τ molt gran, $\sim 10^{19}$ - 10^{21} anys) però està permesa:



- Ocorren generalment quan la desintegració simple β està energèticament prohibida, com ara els nuclis de ${}^{76}\text{Ge}$, ${}^{100}\text{Mo}$, ${}^{130}\text{Te}$, ${}^{186}\text{Xe}$
- Si els ν 's són de Majorana (completament neutres), el procés $0\nu 2\beta$ és també possible:

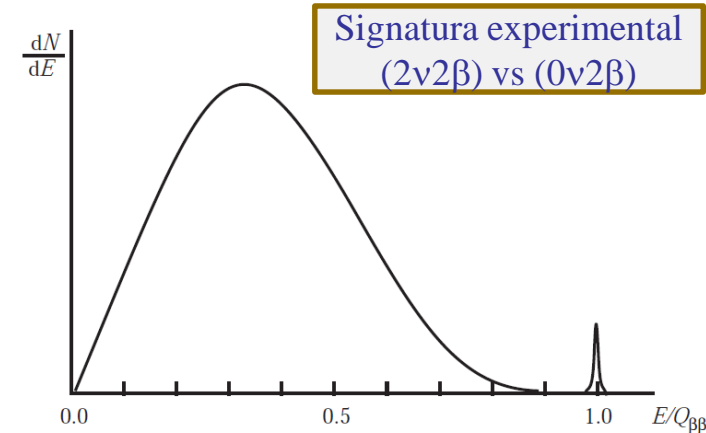


□ Pas 1: $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$

□ Pas 2: " $\bar{\nu}_e$ " + $p \rightarrow n + e^+$ Predominant

" $\bar{\nu}_e$ " + $n \rightarrow p + e^-$ Suprimit

- La supressió de ($0\nu 2\beta$) vs ($2\nu 2\beta$) no és $\sim (m/2E)^2$ ja que en el primer cas el ν és virtual, mentre en el segon són reals, el que fa que els dos processos puguin ocórrer amb probabilitats semblants, depenent de la massa del ν .
- Una recerca de molta activitat arreu el món.



Transicions i teoria de pertorbacions

- Una transició d'un estat inicial a un estat final es pot descriure per una pertorbació sobre el Hamiltonià del sistema estacionari:

$$H = H_0 + V(\vec{x}, t) \quad V(\vec{x}, t) \ll H_0 \quad H_0 |E_n\rangle = E_n |E_n\rangle$$

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = H |\psi\rangle \Rightarrow |\psi\rangle = \sum_n a_n(t) e^{-iE_n t} |E_n\rangle$$

- Com ja vam fer, substituïm la solució general en l'equació de Schrödinger tenim:

$$(1) \quad \dot{a}_f(t) = -i \sum_n a_n(t) V_{fn} e^{i(E_f - E_n)t} \quad V_{fn} \equiv \langle E_f | V | E_n \rangle$$

- Si suposem que en un instant $t = -T/2$, abans de que actue el potencial V , el sistema es troba a un estat $|i\rangle$ de H_0 ,

$$a_i(-T/2) = 1, \quad a_n(-T/2) = 0 \text{ per } n \neq i \Rightarrow \dot{a}_f(t) = -i V_{fi} e^{i(E_f - E_i)t}$$

- Si el potencial es xicotet i transient, podem assumir en primera aproximació que les condicions inicials anteriors apliquen per tots els temps, i integrar

$$(2) \quad a_f(t) = -i \int_{-T/2}^t V_{fi} e^{i(E_f - E_i)t'} dt' \quad V_{fi} \equiv \langle E_f | V | E_i \rangle$$

- Si en $t = +T/2$ la interacció ja ha deixat d'actuar,

$$T_{fi} \equiv a_f(T/2) = -i \int_{-T/2}^{+T/2} V_{fi} e^{i(E_f - E_i)t} dt$$

- Si V és independent del temps,

$$(2') \quad a_f(t) = -iV_{fi} \int_{-\infty}^t e^{i(E_f - E_i)t'} dt'$$

$$T_{fi} = -iV_{fi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(E_f - E_i)t} dt = -2\pi i V_{fi} \delta(E_f - E_i)$$

- La funció δ expressa que la energia de la partícula es conserva en la transició $i \rightarrow f$. Però, pel P.H. això implica que els estats E_i i E_f estan separats per un interval temporal infinit.
- Per donar significat físic a $|T_{fi}|^2$, s'introdueix

$$W = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|T_{fi}|^2}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} 2\pi \frac{|V_{fi}|^2}{T} \delta(E_f - E_i) \int_{-T/2}^{+T/2} e^{i(E_f - E_i)t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} 2\pi \frac{|V_{fi}|^2}{T} \delta(E_f - E_i) \int_{-T/2}^{+T/2} dt =$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} 2\pi \frac{|V_{fi}|^2}{T} \delta(E_f - E_i) T = 2\pi |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i)$$

Probabilitat de transició
per unitat de temps

- Si $\rho(E_f)$ és la densitat d'estats finals, $\rho(E_f)dE_f$ representa el nombre d'estats finals entre E_f i $E_f + dE_f$. Integrant obtenim:

$$W_{fi} = 2\pi \int \rho(E_f) dE_f |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) \Rightarrow W_{fi} = 2\pi |V_{fi}|^2 \rho(E_i)$$

Regla d'or de Fermi

- Podem millorar la primera aproximació utilitzant $a_n(t)$ de (2), (2') per $n \neq i$ i substituint en (1). Amb (2'),

$$\dot{a}_f(t) = \dots + (-i)^2 \sum_{n \neq i} V_{fn} V_{ni} \left[\int_{-\infty}^t e^{i(E_n - E_i)t'} dt' \right] e^{i(E_f - E_n)t}$$

■ Integrant

$$a_f(t) = \dots - \sum_{n \neq i} V_{fn} V_{ni} \int_{-\infty}^t dt'' e^{i(E_f - E_n)t''} \int_{-\infty}^{t''} dt' e^{i(E_n - E_i)t'}$$

$$T_{fi} = a_f(T/2) = \dots - \sum_{n \neq i} V_{fn} V_{ni} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i(E_f - E_n)t} \int_{-\infty}^t dt' e^{i(E_n - E_i)t'}$$

- Per fer la integral en dt' , prenem una quantitat positiva ε , que la farem $\varepsilon \rightarrow 0$ després d'integrar:

$$\int_{-\infty}^t dt' e^{i(E_n - E_i - i\varepsilon)t'} = i \frac{e^{i(E_n - E_i - i\varepsilon)t}}{E_i - E_n + i\varepsilon}$$

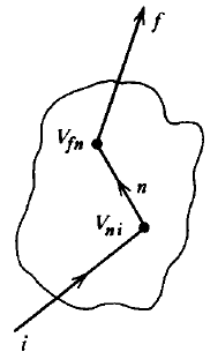
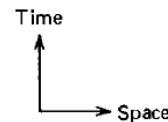
- Per tant,

$$T_{fi} = \dots - i \sum_{n \neq i} \frac{V_{fn} V_{ni}}{E_i - E_n + i\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i(E_f - E_n)t} e^{i(E_n - E_i - i\varepsilon)t} \Rightarrow T_{fi} = \dots - 2\pi i \sum_{n \neq i} V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n + i\varepsilon} V_{ni} \delta(E_f - E_i - i\varepsilon)$$

- Per aquest segon ordre, es demostra que la regla d'or de Fermi aplica amb el canvi:

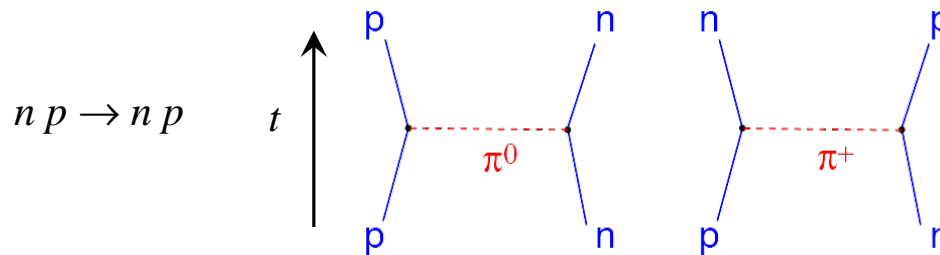
$$V_{fi} \rightarrow V_{fi} + \sum_{n \neq i} V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n + i\varepsilon} V_{ni} + \dots$$

- Aquestes equacions són una sèrie pertorbativa per l'amplitud a primer, segon,... ordre en la interacció V



Propagadors de les interaccions

- Podem veure que en cada **vèrtex** tenim un **factor tipus** V_{ni} , i entre ells un **propagador** d'estats intermedis, que té la forma $1/(E_i - E_n)$.
- Els estats intermedis són virtuals, en el sentit que $E_n \neq E_i$, encara que per descomptat hi ha conservació d'energia entre els estats inicials i finals, indicat per la δ .
- Cal recordar que la idea de l'intercanvi de bosons va ser originàriament proposta per Yukawa (1935) per a explicar el curt abast de la interacció nuclear (bosons massius).

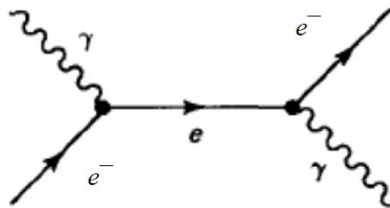


$$\Delta t \Delta E \sim \hbar, \Delta E = mc^2 \Rightarrow \Delta t \sim \frac{\hbar}{mc^2}$$

$$R = c\Delta t = \frac{\hbar c}{mc^2} \approx \frac{197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{mc^2} \approx 1.5 \text{ fm}$$

$$m_{\pi^\pm} = 140 \text{ MeV}/c^2 \quad m_{\pi^0} = 135 \text{ MeV}/c^2$$

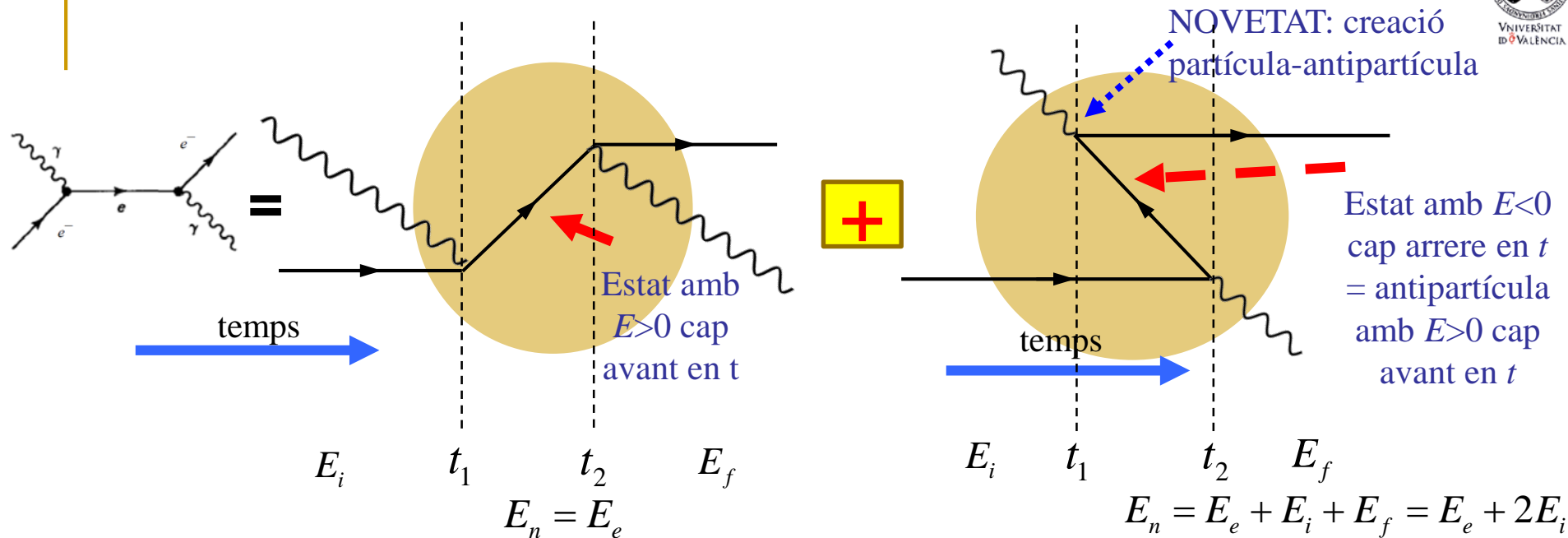
- ¿Com es pot generalitzar este esquema al cas relativista (MQR i TQC)?
- En general, tal com va mostrar Feynman, una partícula de massa m té un propagador $\propto \frac{1}{p^2 - m^2}$.
- Per demostra-ho, prenem l'exemple la difusió d'un fotó per un electró, $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$:



Dos vèrtex \Rightarrow necessitem 2n ordre en teoria de pertorbacions:

$$T_{fi}^{(2)} = -2\pi i \sum_{n \neq i} V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n} V_{ni} \delta(E_f - E_i)$$

- El sumatori es refereix a tots els possibles diagrames amb ordenació temporal corresponents al diagrama de Feynman anterior, i són:



Observeu que en este cas, les partícules “virtuals” que s’intercanvien són els fermions (electró) i el bosó γ és una partícula real en l’estat inicial i final

$$T_{fi}^{(2)} \propto V_{fn} \frac{1}{E_i - E_e} V_{ni} + V_{fn} \frac{1}{E_i - E_e - 2E_i} V_{ni} = V_{fn} \frac{2E_e}{E_i^2 - E_e^2} V_{ni}$$

- Per l’estat inicial, partícules A i B: $(p_A + p_B)^2 = (E_A + E_B)^2 - (\vec{p}_A + \vec{p}_B)^2 \Rightarrow E_i^2 = (p_A + p_B)^2 + (\vec{p}_A + \vec{p}_B)^2$
- Com per l’electró propagador $E_e^2 = \vec{p}^2 + m_e^2$ i $\vec{p} = \vec{p}_A + \vec{p}_B$, tenim

$$E_i^2 - E_e^2 = (p_A + p_B)^2 + \vec{p}^2 - \vec{p}^2 - m_e^2 = p^2 - m_e^2$$

- Per tant, cada diagrama ordenat temporal no es invariant, però la suma d’ells sí que ho és.

- Podem reescriure l'amplitud T_{fi} com

$$T_{fi} = -2\pi i \delta(E_f - E_i) \left(\langle f | V | i \rangle + \sum_{n \neq i} \langle f | V | n \rangle \frac{1}{E_i - E_n} \langle n | V | i \rangle + \dots \right)$$

- Com $H_0 |E_n\rangle = E_n |E_n\rangle$ i $\sum |n\rangle \langle n| = 1$ per als estats intermedis, podem escriure formalment

$$T_{fi} = 2\pi \delta(E_f - E_i) \langle f | (-iV) + (-iV) \frac{i}{E_i - H_0} (-iV) + \dots | i \rangle$$

- Per tant, $-iV$ és el factor de cada vèrtex, i el propagador es pot veure com i vegades l'invers de l'operador de l'equació d'ones actuant sobre l'estat intermedi:

$$H |\psi\rangle = E_i |\psi\rangle \Rightarrow -i(E_i - H_0) |\psi\rangle = -iV |\psi\rangle$$

- Cas I. El propagador per a un partícula sense espí vendrà determinat per l'equació de KG:

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - m^2 \right) \phi = -V \phi \Rightarrow (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = -V \phi$$

Per la solució d'ona plana el costat esquerre de l'equació resulta $-p^2 + m^2 \Rightarrow \frac{i}{p^2 - m^2}$

- Cas II. Pel propagador de l'electró l'equació a utilitzar és la de Dirac. Amb camp e.m.

$$\left[i\gamma^\mu (\partial_\mu + iqA_\mu) - m \right] \psi = 0 \Rightarrow i(\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = iq\gamma^\mu A_\mu \psi$$

- Per cada vèrtex tenim per tant un terme $-ie\gamma^\mu$

- Per l'ona plana, el costat esquerre és $(\gamma^\mu p_\mu - m)u \Rightarrow \frac{i}{\not{p} - m} = i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \quad \not{p} = p_\mu \gamma^\mu$

- Cas III. Propagador del fotó. L'equació d'ones ara son les de Maxwell en forma covariant:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = J^\nu \Rightarrow (g^{\nu\mu} \partial_\lambda \partial^\lambda - \partial^\nu \partial^\mu) A_\mu = J^\nu$$

En el gauge de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$ i prenent la forma plana d' A^μ , el costat esquerro queda

$$g^{\nu\mu}(-q^2) \Rightarrow i \frac{1}{-g^{\nu\mu} q^2} = i \frac{-g^{\nu\mu}}{q^2}$$

- Cas IV. Partícules vectorials massives. L'equació en aquest cas és com el dels fotons amp el canvi

$$\square \rightarrow \square + m^2$$

(recordeu KG) però no s'aplica el gauge de Lorentz per tractar-se de partícules massives:

$$\left[g^{\nu\mu} (\square + m^2) - \partial^\nu \partial^\mu \right] B_\mu = J^\nu$$

Per una ona plana de B_μ , el costat esquerro resulta $g^{\nu\mu}(-p^2 + m^2) + p^\nu p^\mu$. El propagador serà

$$\frac{i}{g^{\nu\mu}(-p^2 + m^2) + p^\nu p^\mu} = i \frac{-g_{\nu\mu} + p_\nu p_\mu / m^2}{\left[g^{\nu\mu}(-p^2 + m^2) + p^\nu p^\mu \right] (-g_{\nu\mu} + p_\nu p_\mu / m^2)} \Rightarrow i \frac{-(g^{\nu\mu} - p^\nu p^\mu / m^2)}{p^2 - m^2}$$

Unificació Electro-dèbil

1961. S. Glashow. 1967; S. Weinberg, A. Salam

- Amb la invariància gauge U(1) $\psi \rightarrow \psi' = e^{-iq\theta(x)}\psi$ del L de Dirac, $L = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$, hem arribat al L de la QED:

$$L = \underbrace{\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi}_{\text{Energia cinètica i de masa de } \psi} - \underbrace{e\bar{\psi}\gamma^\mu Q A_\mu \psi}_{\text{Interacció}} - \underbrace{\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}_{\text{Energia cinètica de } A_\mu} \quad Q = \begin{cases} -1 & e^-, \mu^-, \tau^- \\ 2/3 & u, c, t \\ -1/3 & d, s, b \end{cases}$$

□ Interacció: $-eJ_{(\text{em})}^\mu A_\mu$, $J_{(\text{em})}^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu Q\psi$ $U(1)_{\text{em}}$ $D_\mu J_{(\text{em})}^\mu = 0$

- Per unificar amb la interacció feble s'imposa a més invariància gauge SU(2), $\psi \rightarrow \psi' = e^{ig\vec{\tau}\cdot\vec{\Lambda}(x)}\psi$, que origina un camp iso-vectorial \vec{W}_μ amb dues components carregades i una neutra, amb la constant d'acoblament g :

$$-g'J_{(Y)}^\mu B_\mu, \quad J_{(Y)}^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu Y\psi \quad \text{U(1)}_Y \quad -g\mathbf{J}^\mu \cdot \mathbf{W}_\mu, \quad \mathbf{J}^\mu = \bar{\chi}_L\gamma^\mu \boldsymbol{\tau}\chi_L \quad \text{SU(2)}_L$$

B_μ : 1 bosó
vectorial neutre

Corrent
d'hipercàrrega dèbil

\mathbf{W}_μ : 3 bosons
vectorials

Isotriplet de corrents
d'isospín dèbil

- Y és el generador de $U(1)_Y$ i genera el grup de la mateixa manera que Q genera $U(1)_{\text{em}}$.
- $\boldsymbol{\tau}$ és el generador de $SU(2)_L$.
- El camps χ_L són doblets, i tenen que estar associats als doblets d'isospín dèbil dels corrents carregades conegudes ja que \mathbf{J} té dues components carregades.

- Els corrent carregades seran doncs: $J^{(\pm)\mu} = \bar{\chi}_L \gamma^\mu \tau_\pm \chi_L$
- La corrent e.m. (neutra) té que estar inclosa en les corrents \mathbf{J} , $J_{(Y)}$, en concret $J^{(3)\mu}$, $J_{(Y)}$.
- Si la **hipercàrrega dèbil** Y se defineix com en el cas de Gell-Mann-Nishijima,

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2}$$

amb T_3 tercera component d'isospín dèbil, tindrem $J_{(\text{em})}^\mu = J^{(3)\mu} + \frac{1}{2} J_{(Y)}^\mu$.

- Amb aquesta estructura de corrents i relació amb la corrent em:

- Els fermions **levogirs** formen **doblets d'isospín dèbil**:

$$\chi_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L$$

- Els fermions **dextrogirs** formen **singlets d'isospín dèbil**:

$$\psi_R = (e^-)_R (u)_R (d)_R$$

Lepton	T	T^3	Q	Y
ν_e	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
e_L^-	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-1
e_R^-	0	0	-1	-2

Quark	T	T^3	Q	Y
u_L	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
d_L	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
u_R	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$
d_R	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$

Assignacions de
números quàntics
d'isospín i
hipercàrrega dèbils
per leptons i quarks

- Els dos camps neutres físics, A_μ i Z_μ , son combinacions ortogonals del camps gauge $W_\mu^{(3)}$, B_μ , on l'angle θ_W és l'angle de mescla electro-dèbil (angle de Weinberg).

$$\begin{pmatrix} W_\mu^{(3)} \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta_W & \cos \theta_W \\ \cos \theta_W & -\sin \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix}$$

- La interacció de corrent dèbil neutre es pot escriure en termes d'estos camps físics com:

$$-gJ^{(3)\mu}W_{\mu}^{(3)} - \frac{1}{2}g'J_{(Y)}^{\mu}B_{\mu} = -\left[g\sin\theta_W J^{(3)\mu} + \frac{1}{2}g'\cos\theta_W J_{(Y)}^{\mu}\right]A_{\mu} - \left[g\cos\theta_W J^{(3)\mu} - \frac{1}{2}g'\sin\theta_W J_{(Y)}^{\mu}\right]Z_{\mu}$$

- El primer terme està associat a la corrent em, per tant

$$g\sin\theta_W J^{(3)\mu} + \frac{1}{2}g'\cos\theta_W J_{(Y)}^{\mu} = eJ_{(\text{em})}^{\mu} = e\left[J^{(3)\mu} + \frac{1}{2}J_{(Y)}^{\mu}\right] \Rightarrow e = g\sin\theta_W = g'\cos\theta_W$$

L'angle de Weinberg relaciona la intensitat de l'acoblament de corrents neutres i carregades

- Portant aquest resultat al segon terme s'obté $-eJ_{(\text{em})}^{\mu}A_{\mu} - \frac{e}{\sin\theta_W \cos\theta_W}\left[J^{(3)\mu} - \sin^2\theta_W J_{(\text{em})}^{\mu}\right]Z_{\mu}$

- Amb aquesta invariància, el L seria, per al cas electró-neutrí, per exemple ($Y_L = -1$, $Y_R = -2$):

$$L = \bar{\chi}_L \gamma^{\mu} \left[i\partial_{\mu} - \frac{1}{2}g\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}_{\mu} - \left(-\frac{1}{2}\right)g'B_{\mu} \right] \chi_L + \bar{e}_R \gamma^{\mu} \left[i\partial_{\mu} - (-1)g'B_{\mu} \right] e_R - \underbrace{\frac{1}{4}\mathbf{W}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{W}^{\mu\nu}}_{\text{Energia cinètica i auto-acoblament de } \mathbf{W}_{\mu}} - \underbrace{\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}}_{\text{Energia cinètica de } B_{\mu}}$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_{\mu}B_{\nu} - \partial_{\nu}B_{\mu}$$

- Però este L descriu **fermions i bosons sense massa**.

- Termes com $-m\bar{\psi}\psi, M^2 B_{\mu}B^{\mu}$ no es poden afegir perquè ja no seria invariant gauge:

$$-m\bar{e}e = -m\bar{e}\left[\frac{1}{2}(1-\gamma^5) + \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\right]e = -m(\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R)$$

- Per a generar masses de una manera invariant gauge s'utilitza el mecanisme BEH (aka Higgs).

- Ruptura espontània de la simetria gauge, genera un camp escalar que afegeix un terme de massa als camps fermiònics i bosònics, inclòs ell mateix

\Rightarrow **Bosó de Higgs**

Predicció de les masses dels bosons
 M_W i M_Z de la teoria electro-dèbil

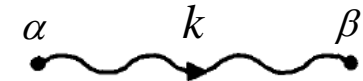
$$G = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{\alpha}{M_W^2 \sin^2 \theta_W}$$

$$M_W = M_Z \cos \theta_W$$

Regles de Feynman d'interacció electro-dèbil

Per cada línia interna d'un bosó **vectorial massiu**:

$$\frac{-i(g_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta / m^2)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}$$



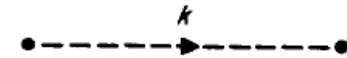
Per cada línia externa representant un bosó vectorial W^\pm or Z inicial o final:

$$\varepsilon^\mu \quad \text{(initial)}$$

$$\varepsilon^{*\mu} \quad \text{(final)}$$

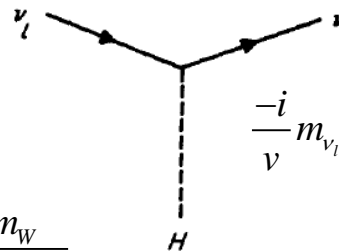
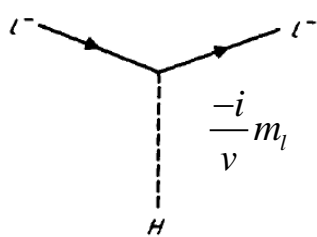
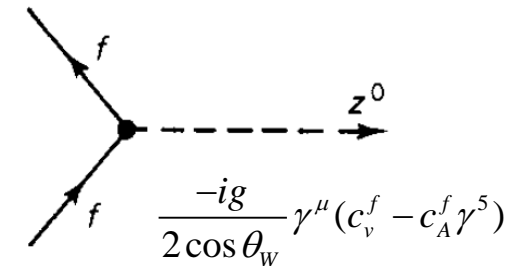
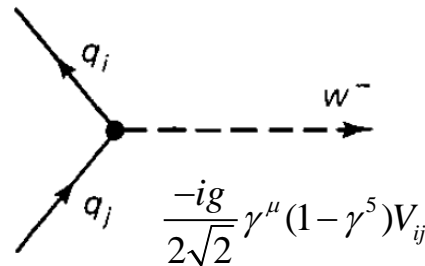
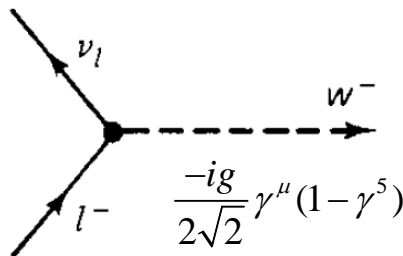
Per cada línia interna Higgs:

$$\frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}$$



Vèrtexs:

$$g = \frac{e}{\sin \theta_w}$$



$$m_W = \frac{1}{2}vg, m_Z = \frac{m_W}{\cos \theta_w}$$

f	c_V	c_A
ν_e, ν_μ, ν_τ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
e^-, μ^-, τ^-	$-\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_w$	$-\frac{1}{2}$
u, c, t	$\frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_w$	$\frac{1}{2}$
d, s, b	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w$	$-\frac{1}{2}$

+ vèrtexs d'auto-interacció (bosons vectorials massius i Higgs)

El mecanisme de Brout–Englert–Higgs (BEH)

- L'equació de Klein-Gordon descriu bosons escalars (sense espín):

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0 \quad L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

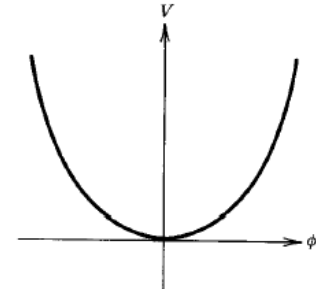
En aquest cas la massa del bosó està “imposada a mà”

- Existeix una manera alternativa de generar dinàmicament la massa del bosó:

$$L = T - V = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \left(\frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4 \right) \quad \lambda > 0$$

L'estat base (buit) és $\phi = 0$

- Expansió en sèrie del potencial (suficient prendre fins ordre 4).
- L es invariant baix el canvi $\phi \rightarrow -\phi$ (simetria baix reflexió).
- Termes de auto-interacció (2 i 4 bosons).



- Mínim de potencial:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \phi(\mu^2 + \lambda \phi^2) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu^2 > 0 \Rightarrow \phi = 0 \\ \mu^2 < 0 \Rightarrow \phi = \pm v, v = \sqrt{-\mu^2 / \lambda} \end{array} \right\}$$

L'estat base (buit) és $\phi = +v, -v$

- El Lagrangià, reescrit al voltant del mínim $\phi = +v$ (estat fonamental) és:

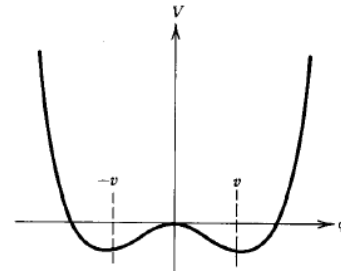
$$\phi(x) = v + \eta(x)$$

Camp pertorbatiu (fluctuacions quàntiques al voltant de l'estat fonamental $\phi = +v$)

$$L' = \underbrace{\frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2}_T - \underbrace{\frac{\lambda v^2 \eta^2}{m_\eta^2}}_{m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}} - \lambda v \eta^3 - \frac{1}{4} \lambda \eta^4 + \text{const.}$$

El camp escalar adquireix massa

Termes d'auto-interacció: vèrtex de 3 i 4 bosons



- L y L' haurien de donar lloc a les mateixes equacions de moviment, però L no es resoluble (V en L no és pertorbatiu)

L es simètric baix reflexió de ϕ .

L' al voltant de $\phi = +v$ no respecta la simetria \Rightarrow “Ruptura espontània de simetria”

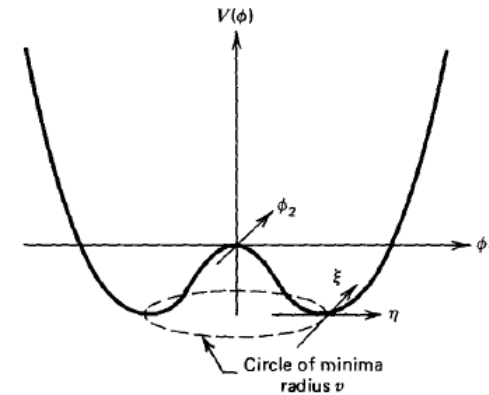
- Prenem ara un camp escalar complex $\phi = (\phi_1 + i\phi_2) / \sqrt{2}$:

$$L = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_2)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{1}{4} \lambda (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2$$

- El mínim en el pla (ϕ_1, ϕ_2) per $\mu^2 < 0$ és ara una circumferència:

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = v^2, \quad v^2 = -\mu^2 / \lambda$$

- Sense perdre generalitat, prenem un punt real del mínim, $(\phi_1, \phi_2) = (v, 0)$, per a desenvolupar en sèrie:



$$\phi(x) = \sqrt{\frac{1}{2}} [v + \eta(x) + i\xi(x)] \quad L' = \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 - \underbrace{\frac{\lambda v^2 \eta^2}{2}}_{m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}} + \text{const.} + \mathcal{G}(\eta^3, \xi^3, \eta^4, \xi^4)$$

⇒ El camp η “adquireix” massa, però apareix altre camp ξ sense massa: bosó de “Goldstone”.

Teorema de Goldstone: Sempre que una simetria continua es romp de manera espontània apareixen escalars sense massa (bosons de “Goldstone”).

- Imposem que L' siga invariant gauge [caso U(1)], és a dir, invariant sota $\phi(x) \rightarrow e^{-iq\alpha(x)} \phi(x)$

⇒ Derivada covariant: $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$ $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)$

$$L' \rightarrow L' = \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 - \underbrace{\frac{v^2 \lambda \eta^2}{2}}_{m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}} + \underbrace{\frac{1}{2} q^2 v^2 A_\mu A^\mu}_{m_A = |q|v} + qv A_\mu \partial^\mu \xi + \mathcal{G}(\eta^3, \xi^3, \eta^4, \xi^4)$$

■ Son els bosons de “Goldstone” reals?

- A primer ordre en η, ξ , $\phi(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}(v + \eta + i\xi) \simeq \sqrt{\frac{1}{2}}(v + \eta)e^{i\xi/v}$
- El que suggereix reescriure $\phi(x)$ en funció de altres camps $h(x)$ y $\theta(x)$,

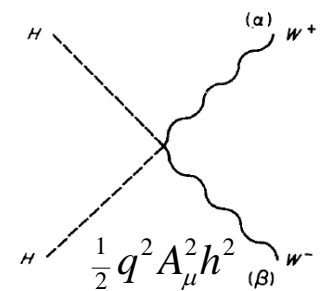
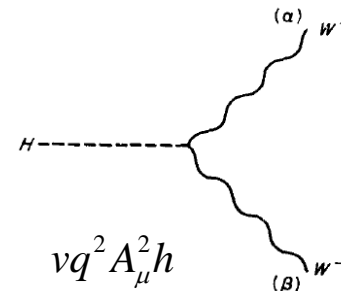
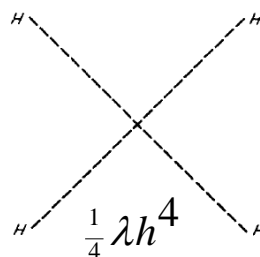
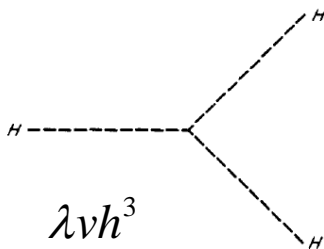
$$\phi(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}[v + h(x)]e^{i\theta(x)/v} \simeq \sqrt{\frac{1}{2}}[v + h(x) + i\theta(x)]$$

- En este cas, la invariància gauge requereix que el camp gauge es transforme com

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{v} \partial_\mu \theta(x)$$

$$L'' = \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - \underbrace{\frac{v^2 \lambda h^2}{m_h = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}}}_{m_A = |q|v} + \underbrace{\frac{1}{2} q^2 v^2 A_\mu A^\mu}_{m_A = |q|v} - \lambda v h^3 - \frac{1}{4} \lambda h^4 + \frac{1}{2} q^2 A_\mu^2 h^2 + v q^2 A_\mu^2 h$$

- El camp de Goldstone desapareix (conseqüència de la llibertat d'elecció gauge).
- Escalar massiu η (partícula de Higgs) i bosó vectorial gauge massiu.
- Auto-acoblaments Higgs-Higgs i Higgs-bosons gauge:



- El mecanisme per generar les masses de totes les partícules (no sols els bosons gauge) és molt semblant \Rightarrow La partícula de Higgs juga un paper fonamental.

Nucleosíntesi del Big Bang

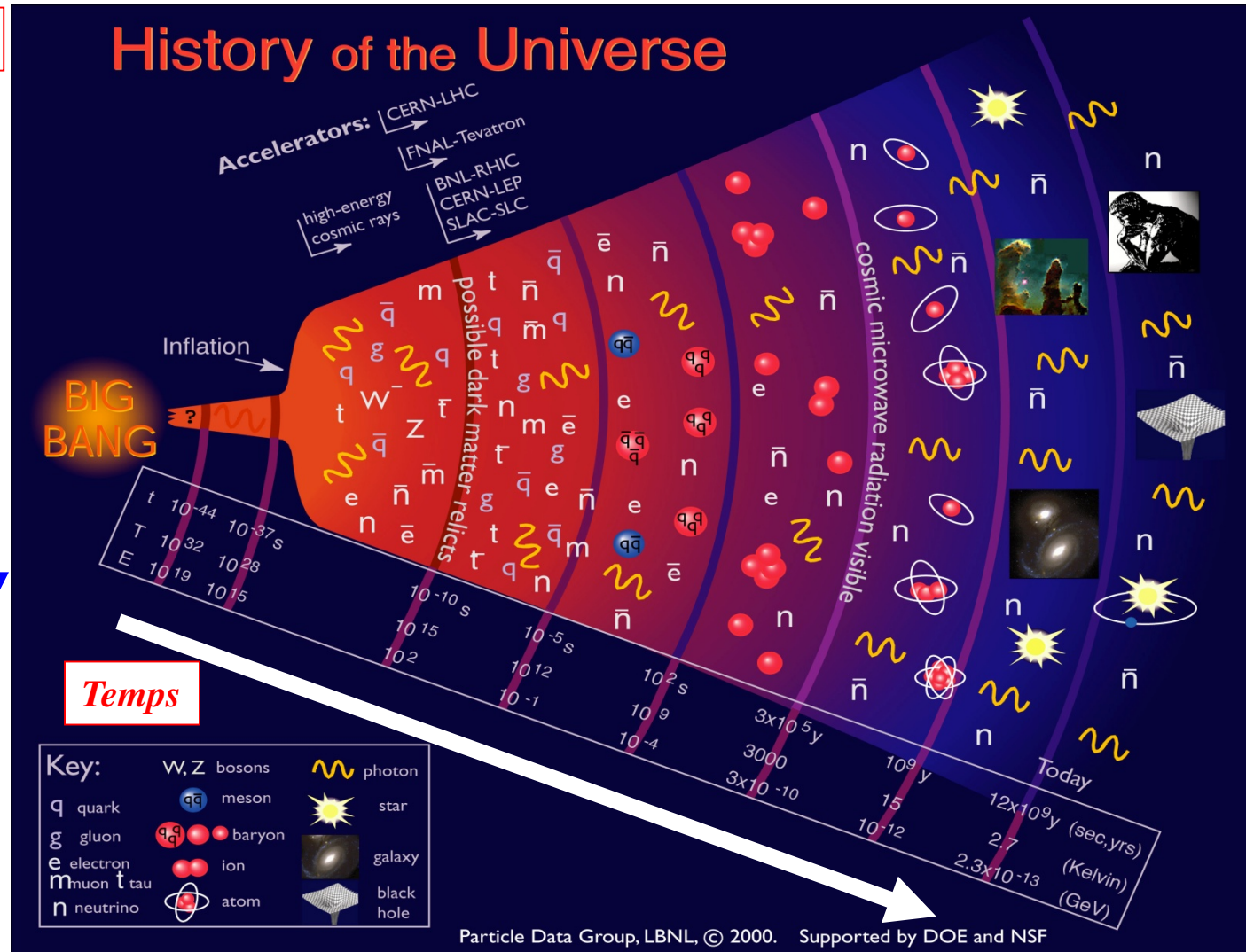
Temps

Física de Partícules

- Big Bang
- La “sopa de quarks”
- Formació dels hadrons

Física Nuclear

- Nucleosíntesi del Big Bang (nuclis lleugers)
- Nucleosíntesi estel·lar (nuclis pesats)



Equilibri inicial. Era de Planck

$$t=10^{-44} \text{ s}, T=10^{32} \text{ K}, E=10^{19} \rightarrow 10^{15} \text{ GeV}$$

Evidències del Big Bang de l'Univers:

- A. Penzias i R. Wilson descobreixen casualment la radiació de fons de l'Univers de 2.7 K.
- Hubble demostra que l'Univers està en expansió. A més les galàxies mes allunyades ho fan a major velocitat.

⇒ Teoria del **Big Bang** ⇒ L'Univers va aparèixer fa uns 13×10^9 anys en una gran explosió.

Per davall d'uns 10^{-43} s els efectes quàntics de la gravetat juguen un paper rellevant que no podem predir per l'absència d'un model satisfactori de la mateixa i la seua unificació amb la resta de forces.

- En estos primers instants és vàlida la gran unificació de les interaccions: totes les interaccions tenen la mateixa intensitat i totes les partícules es comporten com radiació.
- Es genera la mateixa quantitat de partícules que d'antipartícules.
- Càrrega total elèctrica 0.
- Càrrega total de color neutra.
- Com $kT \gg mc^2$ (m de qualsevol partícula), tenim prou energia per a crear qualsevol parell partícula-antipartícula, les quals poden aniquilar-se en fotons i d'altres; hi ha col·lisions i desintegracions que generen noves partícules,... Existiex un equilibri de “radiació”.
- S'espera que: $N_\gamma \sim N_e \sim N_\nu \sim N_q \sim N_{\bar{q}} \sim N_X \sim N_{\bar{X}}$
de manera que si en algun moment hi ha espècies més abundants tindríem més col·lisions (transformant-se en altres espècies) i es re-establiria l'equilibri.

Era dels bosons i dels quarks

$$t=10^{-37} \text{ s}, T=10^{28} \text{ K}, E=10^{15} \text{ GeV}$$

- La temperatura i l'energia de l'Univers és bastant gran com per a que totes les partícules (bosons, quarks, electrons, fotons etc) estiguen en equilibri. Ara bé, les observacions actuals comporten un desequilibri entre el nombre de fotons, barions i anti-barions.
- Si el nombre de partícules i antipartícules s'haguera mantingut igual, arribaria un moment en què

$$X + \bar{X} \rightarrow \gamma \quad \text{Reacció permesa}$$

$$\gamma \rightarrow X + \bar{X} \quad \text{Reacció prohibida per falta d'energia}$$

degut a que l'Univers està expandint-se i en conseqüència refredant-se \Rightarrow esperaríem trobar un Univers format només per fotons (sense humans!).

- Però el que s'observa és: $N_\gamma / N_{\text{barions}} \sim 10^9$ i $N_{\text{antibarions}} \sim 0$

- Per tant, s'ha d'haver produït una violació de la simetria partícula/antipartícula (violació de la simetria de CP , violació del número bariònic) apareixent un quark addicional per cada 10^9 antiquarks:

$$\left. \begin{array}{l} 10^9 + 1 \text{ quarks} \\ 10^9 \text{ antiquarks} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{aniquilació}} \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ quark} \\ 10^9 \gamma\text{'s} \end{array} \right.$$

La sopa de quarks

$$t=10^{-6} \text{ s}, T=10^{13} \text{ K}, E=1 \text{ GeV}$$

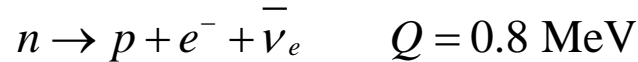
- L'Univers continua refredant-se i les partícules amb massa $> 1 \text{ GeV}$ ja no poden produir-se i es desintegren a partícules més lleugeres i fotons.
- Els bosons X, W, Z es desintegren en quarks i leptons. Els quarks pesats (s, c, t, b) 'freeze out' desintegrant-se finalment en quarks u i d . La violació de CP d'estes desintegracions poden contribuir a la ruptura de simetria observable entre matèria i antimatèria.
- En estos moments la sopa de quarks lliures ja només conté quarks u i d . A esta sopa cal afegir els leptons, fotons, gluons i traces de bosons i quarks pesats.

Era dels hadrons: confinament quark

$$t=10^{-5} \text{ s}, T=10^{12} \text{ K}, E=0.1 \text{ GeV}$$

- El plasma de quarks u i d i gluons condensa en hadrons neutres de color on són confinats:
 - Barions:
 - $uud \Rightarrow$ protó ($938.3 \text{ MeV}/c^2$).
 - $ddu \Rightarrow$ neutró ($939.6 \text{ MeV}/c^2$).
 - Mesons:
 - Pions. Exemple: $\pi^+ = u\bar{d}$ ($139.6 \text{ MeV}/c^2$).
 - Altres barions o mesons estranys són rars i es desintegren ràpidament.
 - Només els protons són estables i els neutrons són de vida suficientment llarga per a contribuir en els següents processos.

Relació protons/neutrons



- Mentre $kT \gg 0.8 \text{ MeV}$, la reacció serà reversible i p/n estaran en equilibri tèrmic $N_n \sim N_p$ perquè les masses són pràcticament iguals. De fet, seguiran la distribució de Maxwell-Boltzman:

$$N \propto m^{3/2} e^{(-m c^2 / k T)} \Rightarrow \frac{N_n}{N_p} = \left(\frac{m_n}{m_p} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\left[\frac{(m_n - m_p) c^2}{k T} \right]}$$

- A $kT \sim 0.8 \text{ MeV}$, $n \rightarrow p + e^{-} + \bar{\nu}_e$ ja no és reversible, $\frac{N_n}{N_p} = \left(\frac{939.6}{938.3} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\left[\frac{(939.6 - 938.3)}{0.8} \right]} \approx \frac{1}{5}$,

i en eixe moment tindrem **5 protons per neutró**.

- Els neutrons lliures seguiran desintegrant-se amb $\tau \approx 940 \text{ s}$ fins que formen part d'algun nucli.
- Temps de refredament entre $kT = 0.8 \text{ MeV}$ i $kT = 0.1 \text{ MeV}$: $t \sim 300 \text{ s}$

$$N_n(t) = N_n(0) e^{-t/\tau} = 0.73 N_n(0), \quad N_p(t) = N_p(0) + 0.27 N_n(0)$$

$$\frac{N_p(t)}{N_n(t)} = \frac{N_p(0) + 0.27 N_n(0)}{0.73 N_n(0)} \approx \frac{5 + 0.27}{0.73} \approx 7$$

Neutrons que han sobreviscut

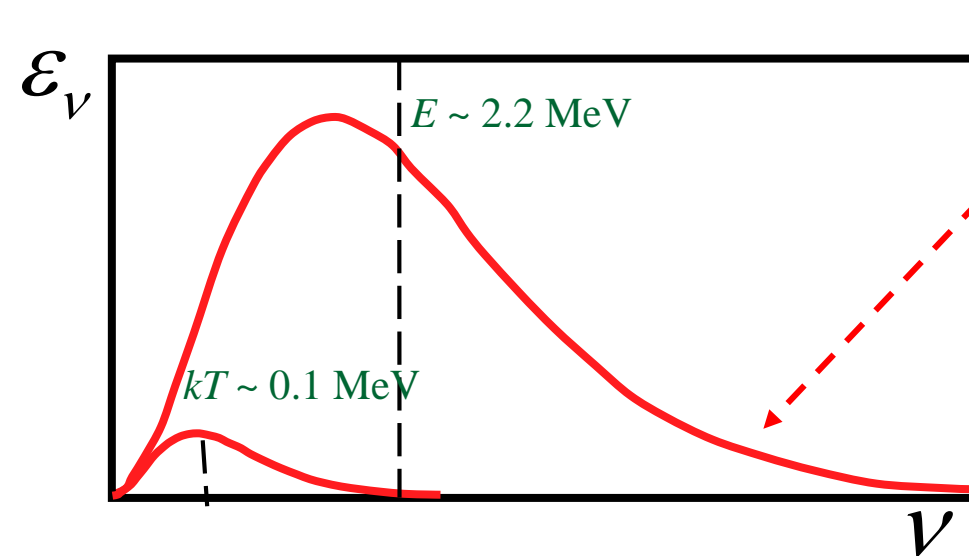
Protons procedents
de la desintegració
dels neutrons

Al final del procés hi haurà
7 protons/neutró

Etapa de nucleo-síntesi

$$t=10^2 \text{ s}, T=10^9 \text{ K}, E=0.1 \text{ MeV}$$

- Esta etapa comença quan la temperatura cau per baix del valor en que l'energia dels fotons no és suficient per a disgregar el deuteró: $p + n \rightarrow D + \gamma$.
- Partim de 7 protons per neutró.
- El deuteró té una energia de lligadura de 2.2 MeV. La pregunta a fer és: No hauria de començar la nucleosíntesi a 2.2 MeV en compte del punt 0.1 MeV? El problema radica en la diferència de poblacions de fotons i neutrons (10^9 fotons per cada barió).



Fotons en la cua de l'espectre de radiació del cos negre

$$N_\gamma(h\nu > E) = \int_{E/h}^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu d\nu}{h\nu} \approx N_\gamma \exp(-E/kT)$$

La síntesi començarà quan tingam només un fotó de $E > 2.2 \text{ MeV}$ per cada barió:

$$N_\gamma \exp(-E/kT) \approx N_b$$

$$\frac{E}{kT} \approx \ln\left(\frac{N_\gamma}{N_b}\right) \approx \ln 10^9 \approx 20$$

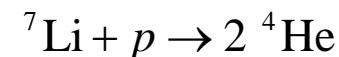
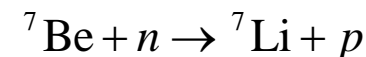
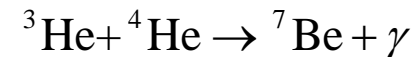
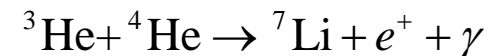
- Si $E = 2.2 \text{ MeV}$ necessitem $kT \sim 0.1 \text{ MeV}$.
- La cua d'alta energia de l'espectre és ara inoperativa per a dissociar els D formats.
- Com a màxim tindrem 1 deuteró per cada 6 p .

Processos fonamentals de la nucleosíntesi

	Producte	Energia d'enllaç
$n + p \rightarrow D + \gamma$	Deuteri	2.2 MeV
$\left. \begin{array}{l} D + D \rightarrow {}^3\text{He} + n \\ p + D \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma \end{array} \right\}$	${}^3\text{He}$	7.72 MeV
$\left. \begin{array}{l} n + D \rightarrow T + \gamma \\ D + D \rightarrow T + p \\ n + {}^3\text{He} \rightarrow T + p \end{array} \right\}$	Triti	8.48 MeV
$\left. \begin{array}{l} n + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + \gamma \\ D + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + p \\ p + T \rightarrow {}^4\text{He} + \gamma \\ D + T \rightarrow {}^4\text{He} + n \\ {}^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + 2p \end{array} \right\}$	${}^4\text{He}$	28.3 MeV

En les estrelles que es formaran posteriorment, estes i altres fusions sí que es produiran fàcilment a causa de l'alta densitat i temperatura.

- El deuteró té la mínima energia de lligadura (2.2 MeV) i per tant és fàcil trencar-lo.
- La formació del deuteró representa el '**coll de botella**' de la nucleosíntesi, ja que la formació de tots els altres nuclis ($A > 2$) ha d'esperar (per a produir-se, sense passar pel deuteri, necessitarien col·lisions de tres cossos les quals són altament improbables).
- A continuació es formarà el ${}^4\text{He}$, que és molt estable ($E_{\text{llig}} \sim 28 \text{ MeV}$), mentre que els nuclis amb $A=5$ són inestables.
- Les fusions posteriors són rares (energies de lligadura xicotetes). ↓



Abundàncies primordials

- Com el ${}^4\text{He}$ és tan estable, tots els camins de fusió ens condueixen a ell, i les fusions posteriors a nuclis més pesats seran molt rares.
- Per tant, tots els neutrons de la etapa anterior acaben en un ${}^4\text{He}$, i els protons residuals romandran lliures (la reacció $p+p$ no és possible en un Univers ja refredat. Pot ocórrer en les estrel·les a elevada temperatura, doncs és un procés dèbil i s'ha de superar la barrera de Coulomb).
- A primer ordre, com $N_p/N_n \sim 7$

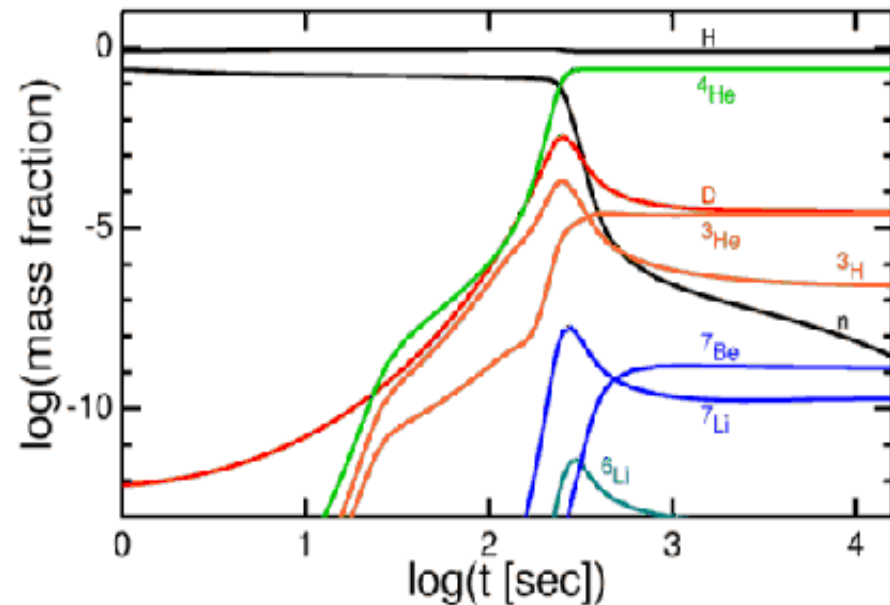
$$X_p \equiv \frac{\text{mass in H}}{\text{total mass}} = \frac{N_p - N_n}{N_p + N_n} = \frac{6}{8} = 0.75$$

$$Y_p \equiv \frac{\text{mass in He}}{\text{total mass}} = \frac{2N_n}{N_p + N_n} = \frac{2}{8} = 0.25$$

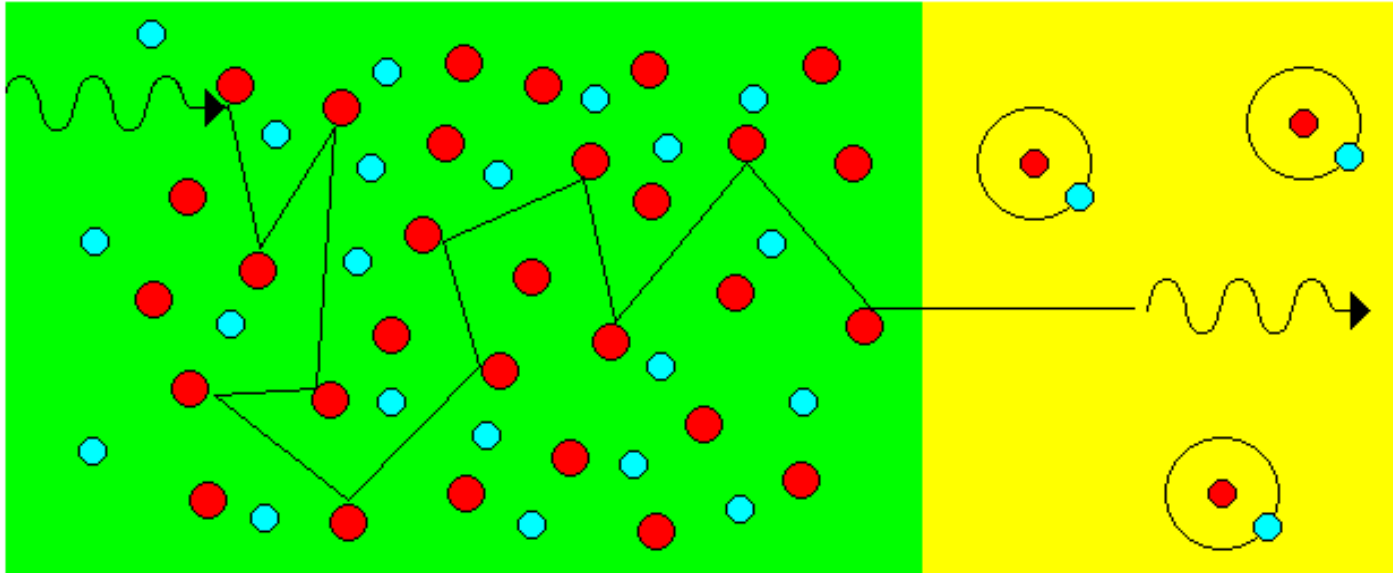
Estes són les Abundàncies Primordials de H & He (en massa, no en número). Coincideix molt bé amb les observacions a l'Univers.

En conclusió: els primers 250 segons de l'Univers governats per la física nuclear i partícules representen una era de ràpids canvis que acaben en un Univers format per un núvol de H i He que continua expandint-se i refredant-se sense majors canvis per un temps de $3 \times 10^5 \text{a}$. En este punt $T = 3 \times 10^3 \text{K}$, ja es permet que els electrons siguin capturats pels nuclis per a formar àtoms, desacoblant-se completament la matèria i la radiació.

Resultats de simulacions Monte Carlo



- Uns 30 minuts després del Big Bang, la nucleosíntesi es para amb la relació entre H i He citada. La T és d'uns 3×10^8 K ($kT = 25$ KeV) i la densitat de 30 kg.m^{-3} $2.7 \times 10^{17} \text{ kg.m}^{-3}$.
- Al cap de 3×10 anys, la temperatura ha disminuït prou ($T = 3000$ K, $kT = 0.3$ eV) com perquè els electrons puguen ser capturats pels nuclis lleugers i formen àtoms. Es desacobla la radiació (fotons) de la matèria \Rightarrow l'Univers es fa neutre i 'transparent'.

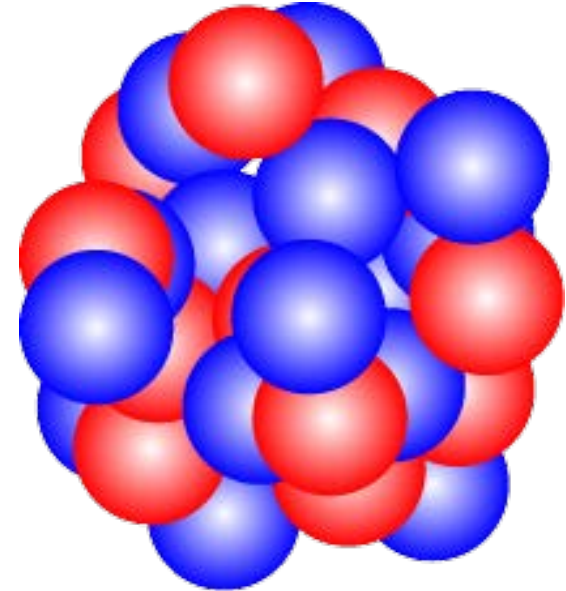


- Els fotons que s'han produït poden arribar fins a nosaltres (en espai i temps) \Rightarrow Radiació de fons de 2.7 K que observem hui en dia.
- El següent pas en la formació de nuclis es dona en l'interior de les estrelles amb el cremat de H i He. Açò produirà nuclis més pesats, però este procés de nucleosíntesi no modifica pràcticament la relació original de 24% d'He i 76% de H.

Tema 6:

Propietats i models nuclears

1. Grandària i distribució nuclears
 - 1.1 Distribució de càrrega i matèria nuclear
2. Massa i abundància de nuclis
 - 2.1 Espectrometria de masses
 - 2.2 Mètode de les reaccions nuclears
 - 2.3 Abundàncies isotòpiques
3. Energia de lligadura. Fórmula semi empírica i paràbola de masses
 - 3.1 Energia d'enllaç per nucleó
 - 3.2 Estabilitat i fonts d'energia
 - 3.3 Vall de l'estabilitat
 - 3.4 Fórmula semiempírica de la massa. Paràboles de massa
4. Altres propietats globals nuclears
 - 4.1 Espí, paritat i isospín nuclears
 - 4.2 Estructura quàntica dels nivells energètics nuclears
 - 4.3 Moments elèctrics nuclears: moment quadrupolar
 - 4.4 Moment dipolar magnètic nuclear
 - 4.5 Aplicació: Ressonància Magnètica Nuclear



6. Models nuclears. Models de capes
 - 6.1 Model de partícula independent
 - 6.2 Potencial espí-òrbita: números màgics
 - 6.3 Model extrem de partícula independent
 - 6.4 Espí i paritat dels nivells

1. Grandària i distribucions nuclears

Distribució de càrrega nuclear: difusió elàstica de e^-

- Per a nuclis no puntuals:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Point}} |F(\vec{q})|^2$$

$$\vec{q} = \vec{p}_i - \vec{p}_f$$

Transformada de Fourier

$$F(\vec{q}) = \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} d^3\vec{r}, \quad \rho(\vec{r}) = Z |\psi(\vec{r})|^2$$

$$\int \rho(r) 4\pi r^2 dr = Z$$

- Si la distribució de càrrega té simetria esfèrica:

$$F(q) = \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty \rho(r) r \sin(qr) dr$$

$$q = 2p \sin(\theta/2)$$

$$p \equiv |\vec{p}_i| = |\vec{p}_f| \text{ (elàstica) Momentum del feix}$$

- Desenrotllant en sèrie la funció sinus: $\lambda \geq R \rightarrow qr \leq 1 \Rightarrow \sin(qr) \approx qr - \frac{1}{6}(qr)^3$

$$F(q) = \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty \rho(r) \left[qr - \frac{1}{6}(qr)^3 \right] r dr = \int \rho(r) 4\pi r^2 dr - \frac{1}{6} q^2 \int r^2 \rho(r) 4\pi r^2 dr = Z \left(1 - \frac{1}{6} q^2 \langle r^2 \rangle \right)$$

$$qr \downarrow \Rightarrow q \downarrow \Rightarrow \theta \downarrow \Rightarrow b \uparrow$$

ja que $b = \frac{Zze^2}{mv^2} \cotan \frac{\theta}{2}$

⇒ Quan el projectil té una λ major que el radi no informa sobre la distribució de càrrega, solament és possible conèixer el radi quadràtic mig.

- Per a un nucli esfèric de **densitat constant** $\rho(r) = \rho_0$ es té:

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int_0^R r^2 \rho_0 dV}{\int_0^R \rho_0 dV} = \frac{\int_0^R r^2 \rho_0 4\pi r^2 dr}{\int_0^R \rho_0 4\pi r^2 dr} = \frac{3}{5} R^2 \Rightarrow R = 1.29 \sqrt{\langle r^2 \rangle}$$

El paràmetre que mesurem és $\langle r^2 \rangle$ que es relaciona amb el radi R d'una esfera carregada uniformement així

- **Procediment:** Mesurant la distribució angular de $\sigma(\theta)$ i comparant amb $\sigma_{\text{Point}}(\theta)$ obtenim el factor de forma $F(q)$, d'on obtenim el radi quadràtic mig de la distribució de càrrega.

- La secció eficaç diferencial per a la dispersió elàstica d'electrons relativistes (espín 1/2) per **nuclis puntuals** (espín 0) i sense retrocés va ser obtinguda per Mott:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} = \left(\frac{Z\alpha\hbar c}{4T}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

T energia cinètica i β velocitat de l'electró

Correcció relativista

- Si sobre la expressió anterior apliquem el factor de forma, s'observa que la distribució de les mesures $\sqrt{\langle r^2 \rangle} / A^{1/3}$ en funció del número màssic A és constant, **per a $A \geq 50$** .

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = (0.97 \pm 0.04) A^{1/3} \text{ fm}$$

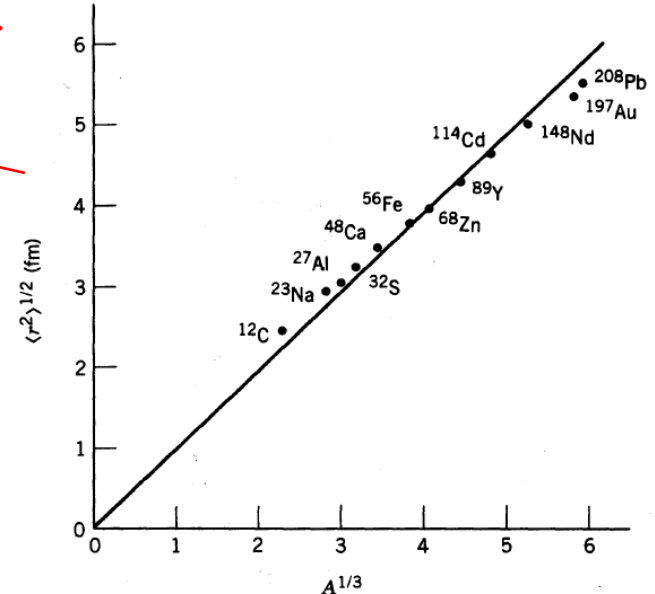
Si se suposa una densitat de càrrega constant, es verifica:

$$R = 1.29 \sqrt{\langle r^2 \rangle} \Rightarrow R = r_0 A^{1/3}, \quad r_0 \approx 1.2 \text{ fm}$$

\Rightarrow El nombre de nucleons per unitat de volum és constant en els nuclis:

A pesar de la intensitat de les forces nuclears no hi ha col·lapse \rightarrow les forces nuclears se saturen

$$\frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3} \approx cte$$



Radi quadràtic mig (rms) de diferents nuclis obtinguts a partir d'experiments de dispersió d'electrons. El pendent de la recta és: $R = R_0 A^{1/3}$ on el valor de la constant és $R_0 \approx 1,23 \text{ fm}$

- Si $\lambda \ll R \rightarrow qr \gg 1 \Rightarrow F(q)$ el factor de forma és sensible a la distribució de la càrrega en el nucli:

$$\rho(r) = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty F(q) q \sin(qr) dq$$

Transformada de Fourier inversa

■ Procediment:

- En este cas es mesura la distribució angular de $\sigma(\theta)$ i comparant amb $\sigma_{Mott}(\theta)$ s'obté el factor de forma $F(q)$, la transformada de Fourier inversa del qual dóna la distribució de càrrega.
- S'obté experimentalment:

- La densitat de càrrega nuclear és en la pràctica \approx la mateixa per a tots els nuclis.

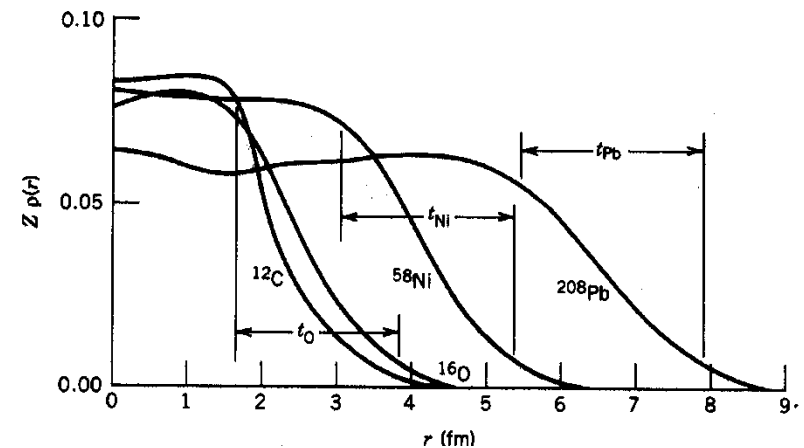
- La corba superficial és constant:

$$t \approx 2.3 \text{ fm}$$

- La parametrització de la distribució de càrrega més habitual és la **distribució de Fermi o de Saxon-Woods**:

$$\rho_{\text{Fermi}}(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-R)/a}}$$

$t \approx 4a \ln 3$: Amplària entre el 90% i el 10% del valor màxim



Distribució radial de la càrrega de diversos nuclis obtinguda a partir de la difusió d'electrons

- Per al protó sol utilitzar-se una forma dipolar:

$$G(q^2) = \frac{1}{[1 - (q/q_0)^2]^2}$$

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-q_0 r}, q_0 \approx 0.84 \text{ GeV/c}$$

$$\langle r^2 \rangle = \frac{12}{q_0^2} \approx (0.81 \text{ fm})^2$$

Exercici

Factor de forma elèctric del protó

Distribució de matèria nuclear

■ Col·lisions α + nuclis (per exemple, α + Au):

- La difusió coulombiana prediu una dependència amb l'energia T de la partícula α (secció eficaç de Rutherford):

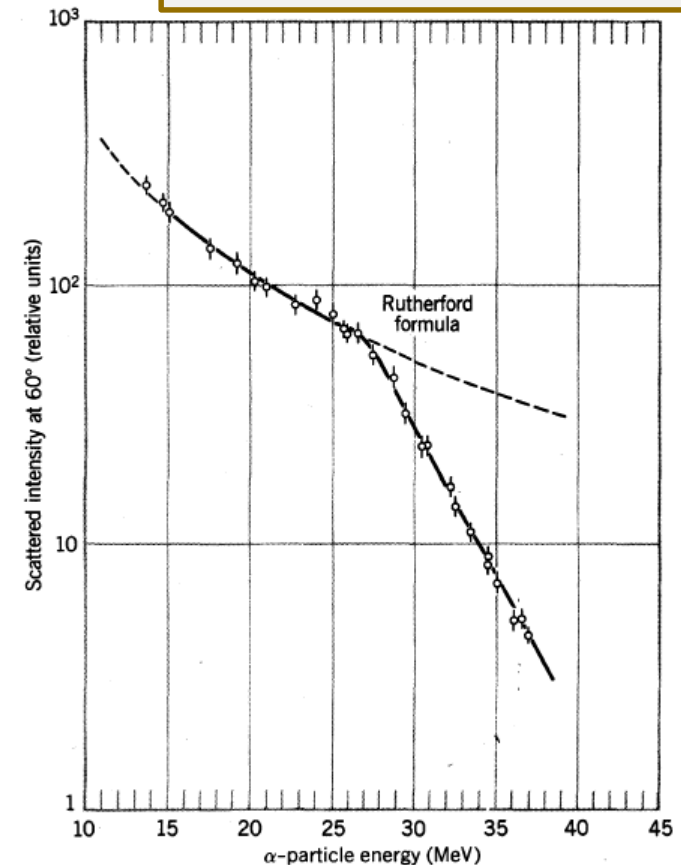
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Ruther}} = \left(\frac{Z\alpha\hbar c}{4T}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

- Si $T \uparrow$, els nuclis s'aproximen \Rightarrow senten la interacció forta, a més de la coulombiana \Rightarrow ruptura de la dependència de σ amb T^{-2} .

■ Estudi de la desintegració α

- El càlcul mecano-quàntic de les probabilitats de desintegració d'un emissor α depenen de la grandària de la barrera de potencial. La comparació amb les probabilitats determinades experimentalment ens dona informació del radi de matèria nuclear (protons i neutrons).

La interacció força del projectil amb el nucli donarà informació sobre la distribució de massa



Desviació de la fórmula de Rutherford per a la difusió

Resultats: Els **radis de càrrega i matèria nuclears són aproximadament iguals** (marge 0.1 fm). Este resultat és sorprenent ja que els nuclis pesats tenen un 50% més de neutrons que protons \Rightarrow radi de càrrega (protons) hauria de ser menor que el radi de la matèria nuclear (protons més neutrons).

Conclusions sobre les distribucions de càrrega i matèria nuclears

- El radi dels nuclis varia com:

$$R = r_0 A^{1/3}, \quad r_0 \approx 1.2 \text{ fm}$$

- La distribució de càrrega correspon a l'equació de Fermi o Saxon-Woods:

$$\rho_{\text{Fermi}}(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-R)/t}}$$

- La densitat nucleònica és constant:

$$n_A = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} \approx 0.14 \times 10^{45} \text{ nucleons/m}^3 \Rightarrow 0,14 \text{ nucleons/fm}^3$$

- La densitat màssica nuclear és:

$$\rho_M \approx 0.14 \times 10^{45} m_N / \text{m}^3 \approx 2.3 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$$

- **Independent de A** \Rightarrow comportament molt important de les forces nuclears, la saturació de les forces nuclears (cada nucleó només sent la influència dels nucleons que existeixen en el seu veïnat, la força nuclear té **abast finit**).
- Oposat a les forces electromagnètiques (àtom), d'abast infinit \Rightarrow en augmentar Z s'incrementa l'atracció entre nuclis i núvol electrònic, variant poc la grandària \Rightarrow la densitat augmenta amb Z.

- Les densitats màssiques de càrrega i de neutrons són:

$$\rho_p \approx \frac{Z}{A} \rho_M$$

$$\rho_n \approx \frac{N}{A} \rho_M$$

$$\frac{\rho_n}{\rho_p} \approx \frac{N}{Z}$$

2. Massa i abundància dels nuclis (isòtops)

Espectrometria de masses

Recordar definició de massa dels nuclis i defecte de massa, T2

- Tècnica utilitzada per a determinar les masses nuclears i les abundàncies relatives d'una mostra. Els espectròmetres de masses solen constar de:

- Una font d'ions: de la que s'obté un feix d'àtoms o molècules ionitzades, amb càrregues q , masses m i velocitats v .

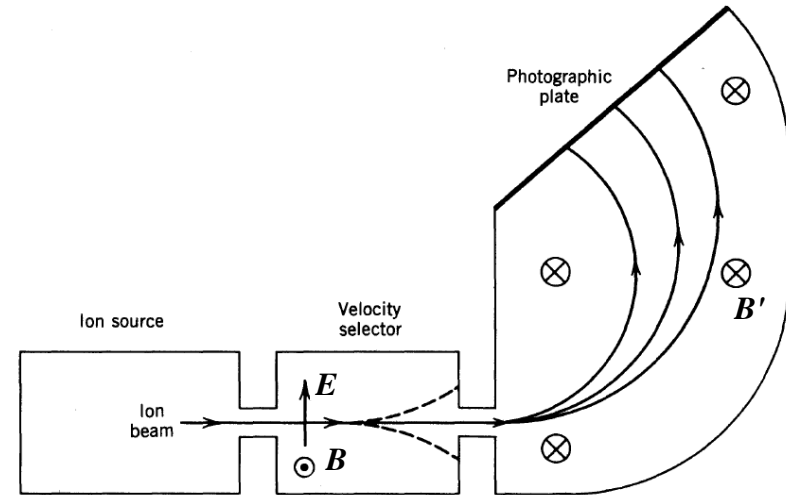
- Un selector de velocitat: camp elèctric E i magnètic B perpendiculars, que deflecten en sentits contraris els ions, de manera que els ions no deflectats compleixen:

$$qE = qvB \Rightarrow v = \frac{E}{B}$$

- Un selector de moments: camp magnètic uniforme B' que deflecta els ions en una trajectòria circular de radi r que depèn del moment i per tant de la massa de cada isòtop:

$$p = mv = qB'r \Rightarrow r = \frac{mv}{qB'}$$

- Si coneixem r , v i B' podem determinar m , que en la pràctica s'obté a través de mesures relatives a la **del ^{12}C que es pren exactament com 12 u.m.a.**
- Les masses atòmiques es poden determinar amb precisions de l'orde d'una part en un milió ($1:10^6$), usant distints mètodes (veure a continuació i material extra).
- El principal problema dels espectròmetres és que resulta pràcticament impossible tindre calibrat l'aparell per a determinar masses d'elements molt diferents o distants en la taula periòdica.



Mètode de les reaccions nuclears

- Un altre mètode per a determinar xicotetes diferències de masses és a través de la mesura de les energies de les partícules en reaccions nuclears: $a + A \rightarrow b + B$

Es defineix el

calor de reacció:

$$Q = M_{\text{inicial}} - M_{\text{final}} = [M_a + M_A - M_b - M_B]c^2 \quad (\text{I})$$

$$= T_{\text{final}} - T_{\text{inicial}} = T_b + T_B - T_a - T_A \quad (\text{II})$$

Si A està en repòs, i θ és l'angle mesurat d'emissió de b (situació habitual dels experiments):

$$Q = T_b \left(1 + \frac{M_b}{M_B} \right) - T_a \left(1 - \frac{M_a}{M_B} \right) - \frac{2}{M_B} \sqrt{T_a T_b M_a M_b} \cos \theta \quad (\text{III})$$

- Si coneixem les masses M_a , M_b , M_A , i mesurem $Q \Rightarrow M_B$ queda determinada, Eq. (I).
- Si coneixem M_a , M_b , M_A , i mesurem T_a , T_b , $\theta \Rightarrow$ es determina M_B , Eqs. (I)+(III).
- Este mètode és l'únic possible per a nuclis inestables o que no es poden ionitzar (neutró).
- Exemple: Reacció: $^{14}\text{N}(p, ^3\text{H})^{12}\text{N}$, $Q = -22.135 \pm 0.001 \text{ MeV}$

$$M(^{12}\text{N}) = M(^1\text{H}) + M(^{14}\text{N}) - M(^3\text{H}) - Q/c^2 = 12.018613 \pm 0.000001 \text{ u}$$
 - Obtenim per a la massa del nucli inestable ^{12}N , a partir del valor Q de la reacció i de les masses de nuclis estables.
 - La incertesa prové fonamentalment de l'error en el valor Q de la reacció.

Abundàncies isotòpiques

- L'espectroscòpia de masses permet mesurar les abundàncies relatives dels distints isòtops d'un element.
- Sintonitzant adequadament els camps E i B , s'obté un espectre de masses amb diferents pics les àrees relatives dels quals ens donen les proporcions de cada isòtop.
- Per exemple, els isòtops estables del criptó i les seues abundàncies relatives són:

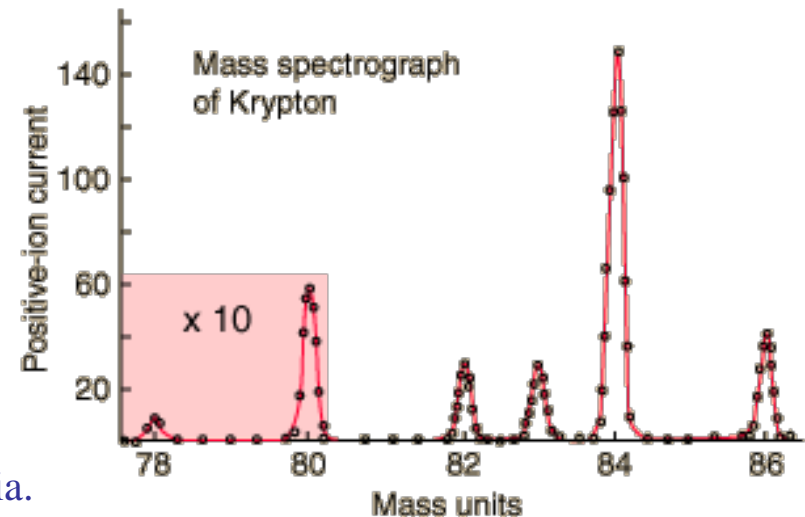
^{78}Kr	^{80}Kr	^{82}Kr	^{83}Kr	^{84}Kr	^{86}Kr
0.356%	2.27%	11.6%	11.5%	57.0%	17.3%

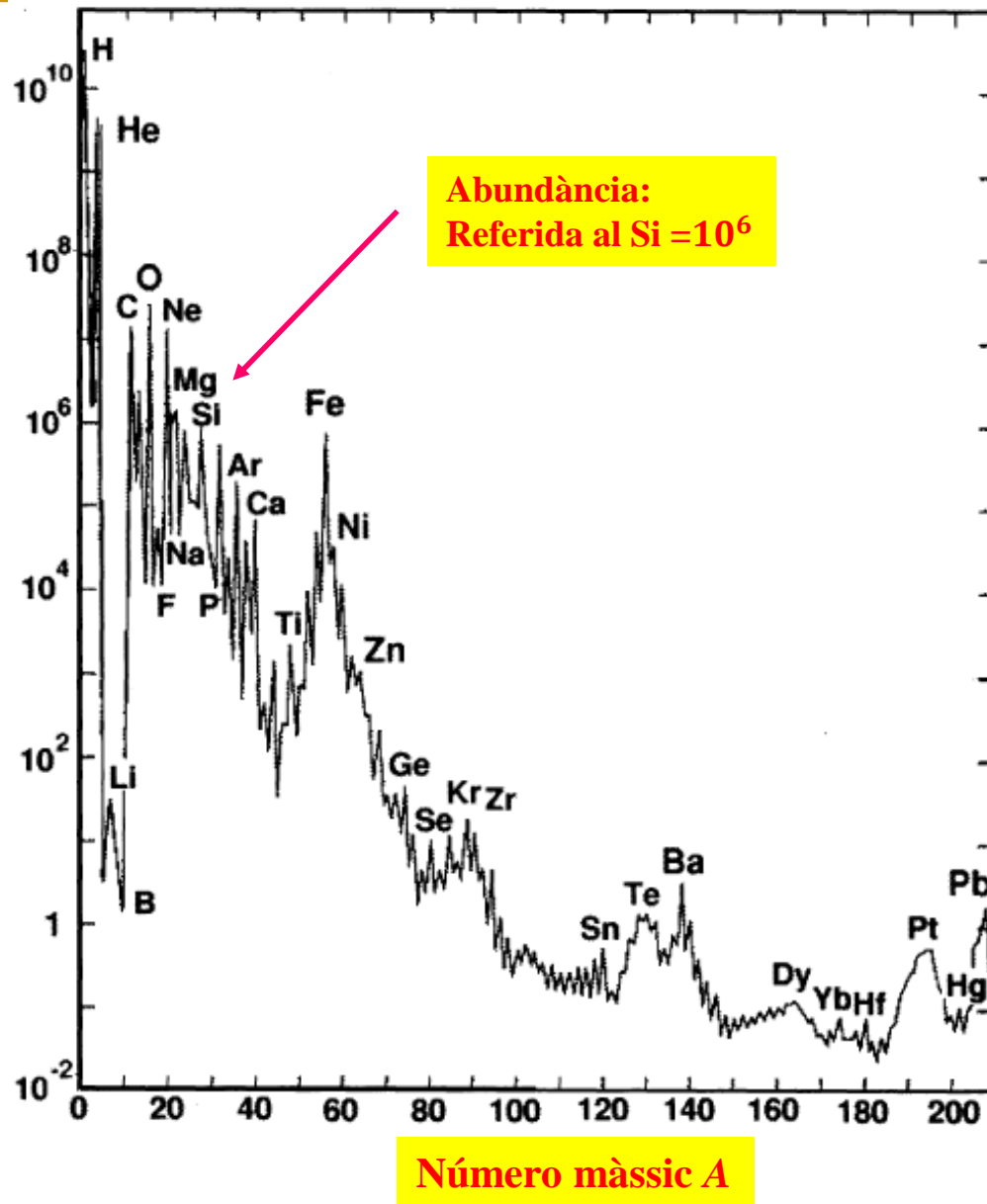
- Les masses que no apareixen corresponen a isòtops radioactius i no estan presents en el criptó natural.
- Quan es parla de la massa d'un element, es parla de la massa atòmica **amitjanada** amb els seus corresponents pesos relatius d'abundància.
- Per al cas del criptó:

$$M(\text{Kr}) = 0.00356M(^{78}\text{Kr}) + 0.0227M(^{80}\text{Kr}) + \dots = 83.8 \text{ u}$$

- L'abundància isotòpica actual sobre la Terra està directament lligada a la nucleosíntesis estel·lar (supernoves) i primordial (Big Bang) i a l'estabilitat nuclear.

Espectre de masses del Criptó





Observeu els ordres de magnitud que dona l'escala logarítmica entre els elements pesats [$A > A(\text{Fe})$] i els elements lleugers [$A < A(\text{Fe})$]

*Abundància dels elements en la Terra i en el Sistema Solar.
Es pren com a referència l'abundància del silici igual a 10^6 .
L'abundància s'ha mesurat en meteorits per espectroscòpia de masses.*

3. Energia de lligadura. Fórmula semiempírica i paràbola de masses

- **Energia d'enllaç d'un nucli:** diferència de masses entre el nucli i els seus constituents (positiva):

$$B\left({}^A_ZX_N\right) = \left[Z M\left({}^1_1H\right) + N m_n - M\left({}^A_ZX_N\right) \right] c^2$$

$$= \left[Z \Delta\left({}^1_1H\right) + N \Delta_n - \Delta\left({}^A_ZX_N\right) \right] c^2$$

- **Energia de separació d'un neutró:** Energia que cal subministrar per a alliberar un neutró del nucli:

$$S_n = B\left({}^A_ZX_N\right) - B\left({}^{A-1}_ZX_{N-1}\right)$$

$$= \left[M\left({}^{A-1}_ZX_{N-1}\right) - M\left({}^A_ZX_N\right) + m_n \right] c^2$$

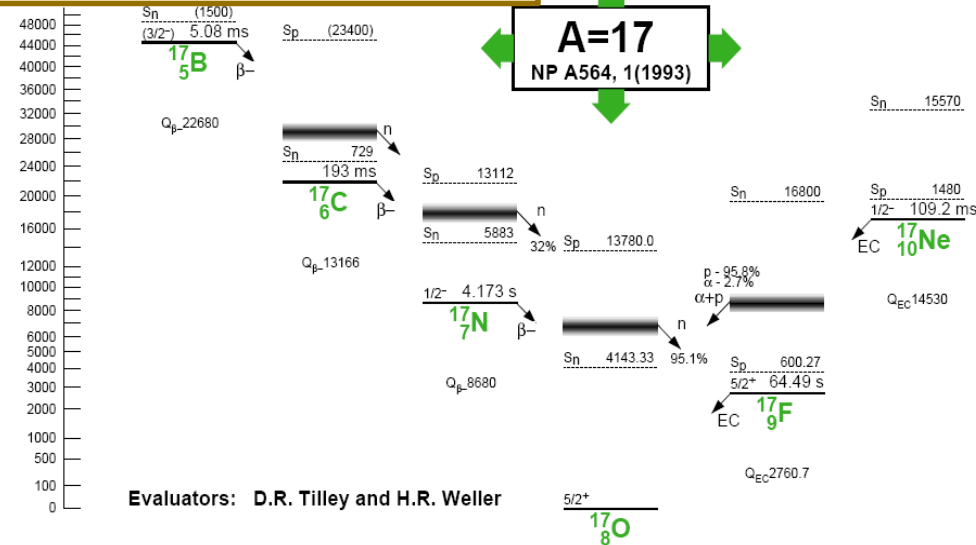
- **Energia de separació d'un protó:** Energia que cal subministrar per a alliberar un protó del nucli:

$$S_p = B\left({}^A_ZX_N\right) - B\left({}^{A-1}_{Z-1}X_N\right)$$

$$= \left[M\left({}^{A-1}_{Z-1}X_N\right) - M\left({}^A_ZX_N\right) + M\left({}^1_1H\right) \right] c^2$$

Atenció

Paràbola de masses per a A=17



Comentar: estabilitat i separació de nucleons

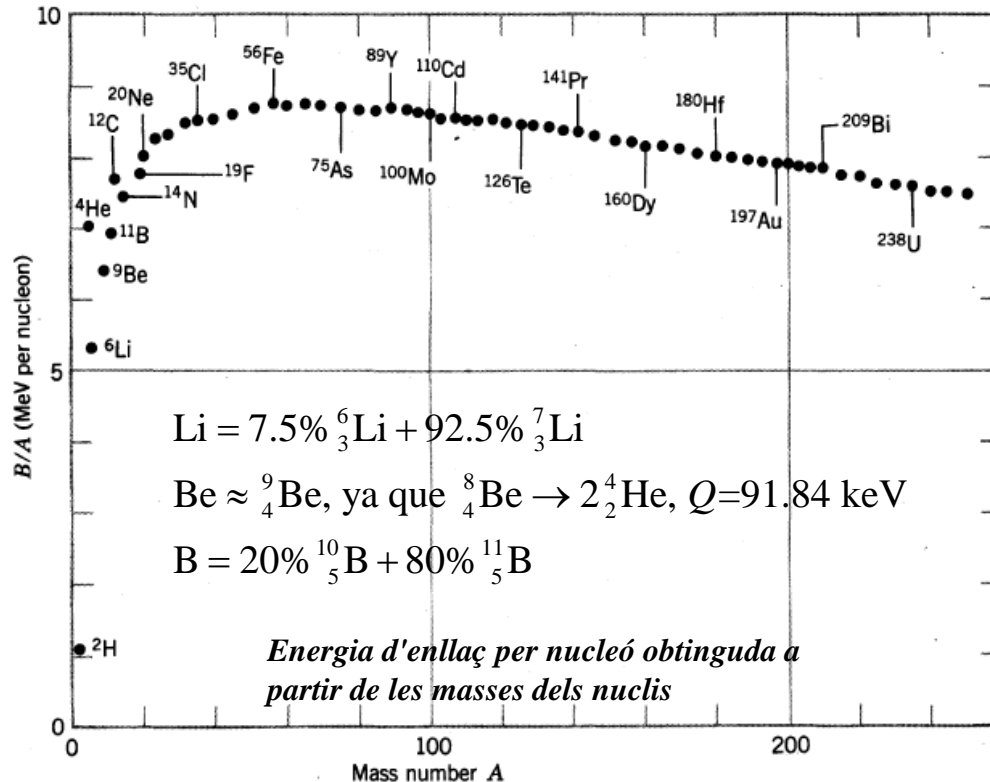
Núclid	Δ (MeV)	S_n (MeV)	S_p (MeV)
${}^{16}_8\text{O}_8$	-4.737	15.66	12.13
${}^{17}_8\text{O}_9$	-0.810	4.14	13.78
${}^{17}_9\text{F}_8$	+1.952	16.81	0.60

$$\Delta({}^1_1H) = 7.2890 \text{ MeV}/c^2$$

$$\Delta_n = 8.0713 \text{ MeV}/c^2$$

Defectes de massa

Energia d'enllaç per nucleó



- El valor mitjà de B/A és ≈ 8 MeV, excepte per a nuclis lleugers, molt major que la repulsió electrostàtica:

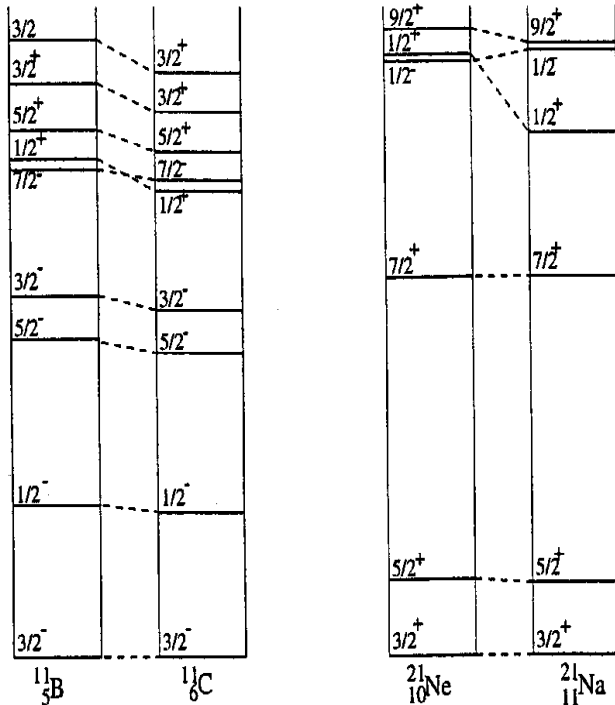
$$E_c = e^2 / [4\pi\epsilon_0 (r_1 + r_2)] \approx \alpha\hbar c / (2 \text{ fm}) \approx 0.5 \text{ MeV}$$

\Rightarrow la força atractiva és molt major que la repulsiva coulombiana \Rightarrow força forta.

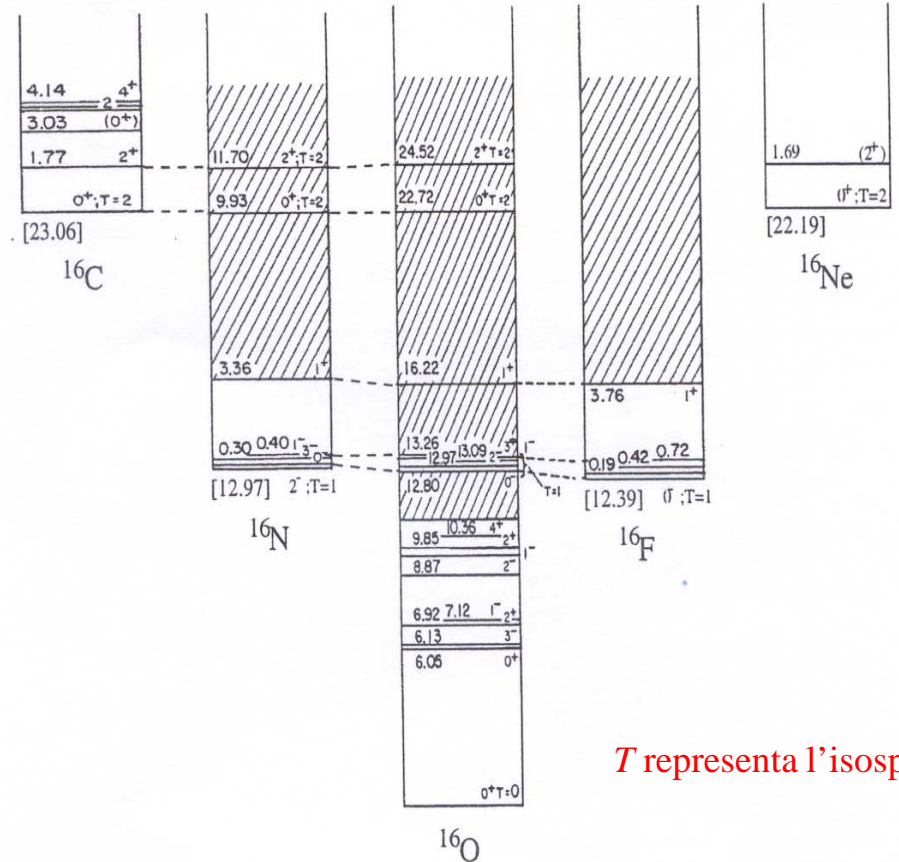
- $B/A \sim \text{constant} \Rightarrow$ saturació de forces \Rightarrow força atractiva de curt abast ($B \sim A$ i no $B \sim A^2$) però repulsiva a molt curt abast (< 0.5 fm) \Rightarrow no hi ha col·lapse (volum $\sim A$ i densitat nuclear constant amb A).
- La corba té un màxim en 8.7 MeV per a $A \approx 56$ (**zona del ferro**) \Rightarrow són els nuclis més estables.
- Disminueix fins a 7.6 MeV per a $A \approx 240$

- Nuclis $A > 60$ podrien trencar-se en dos nuclis més lleugers (més estables) \Rightarrow **Fissió + energia**
- Nuclis $A < 60$ podrien unir-se en un nucli més pesat (més estable) \Rightarrow **Fusió + energia alliberada**
- Hi ha un sol estat lligat de dos nucleons, el p - n (deuteró), amb espín $J = 1 \Rightarrow$ les forces nuclears depenen de l'espín.
- La diferència de B/A per a **nuclis espill** \approx diferència d'energia coulombiana més la diferència de massa dels constituents \Rightarrow les forces nuclears són independents de la càrrega \Rightarrow **simetria de càrrega de les forces nuclears (\rightarrow Introducció de l'isospín)**

Nuclis espill i estats isobàrics anàlegs (IAS)



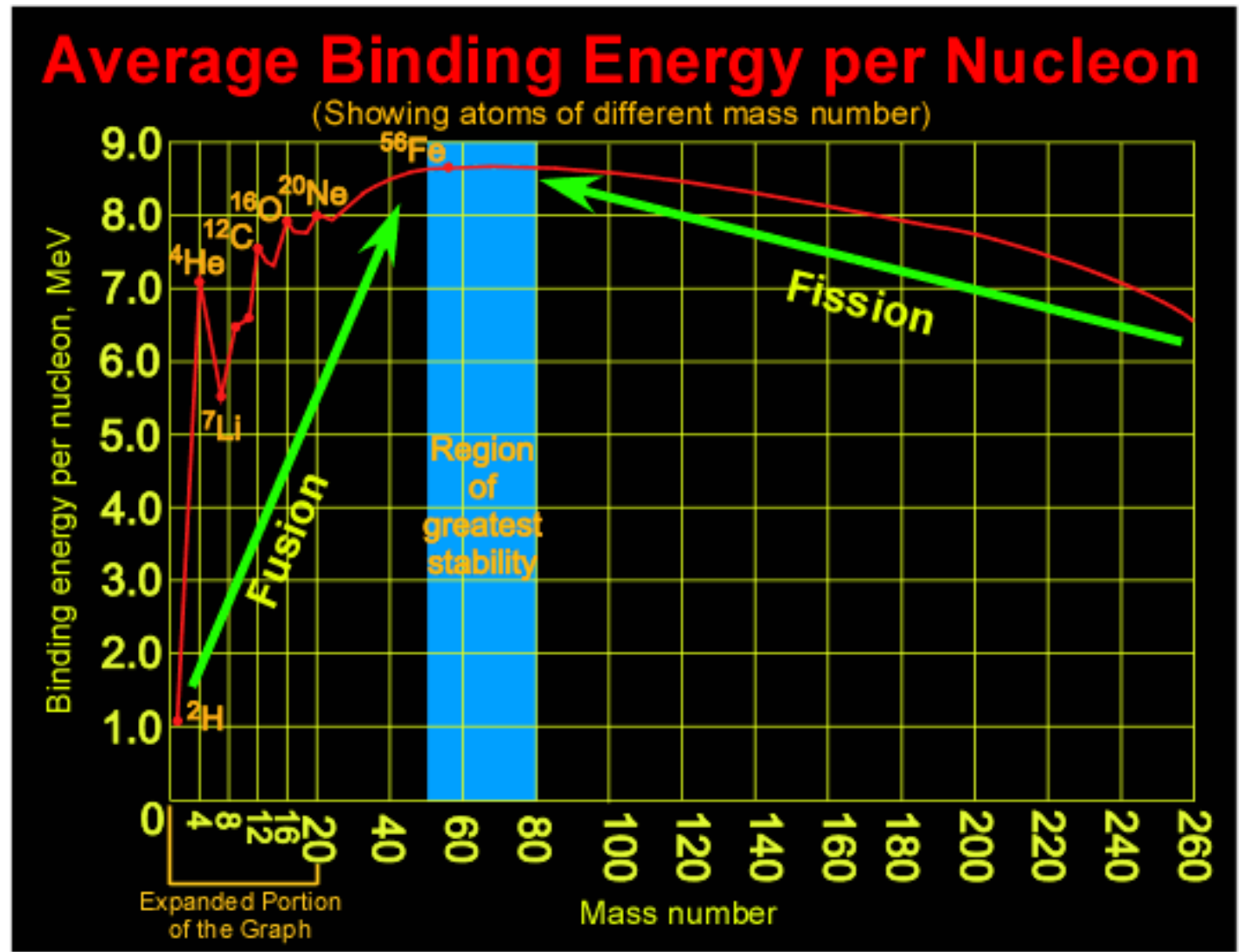
Espectre dels nivells nuclears dels isòbars $A=11$ i $A=21$ (nuclis espill) que demostra la semblança en la seua estructura



T representa l'isospín

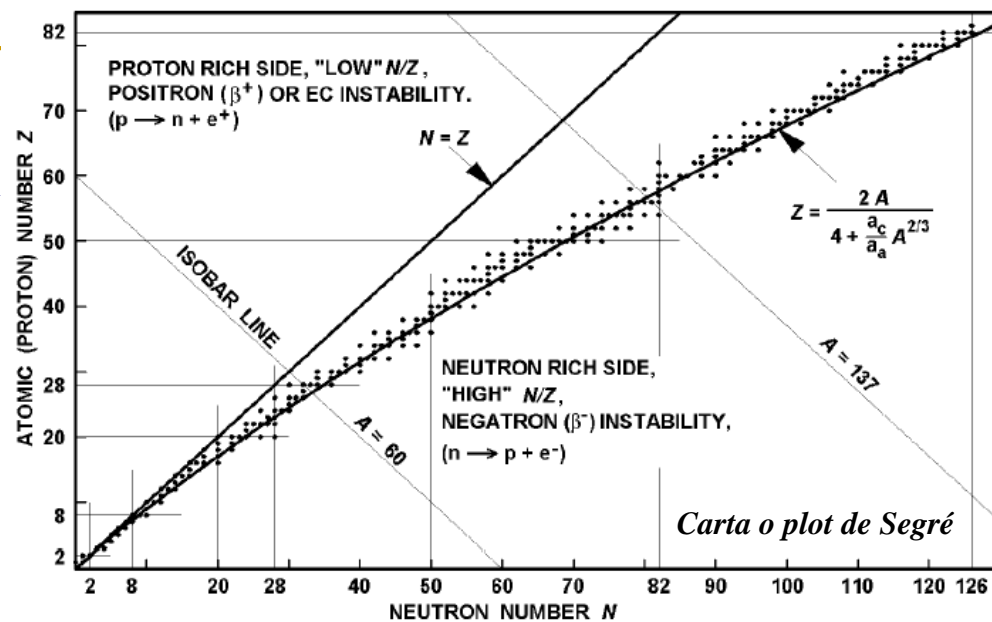
Isòbars $A=16$ amb els estats IAS connectats per traços. Prenem com origen d'energies el nucli ^{16}O : es representen les energies dels nuclis restants relatives a l'estat fonamental del ^{16}O corregides per l'efecte de Coulomb i per la diferència de masses del $p-n$ (correccions entre currets)

Estabilitat i possibles fonts d'energia



La vall de l'estabilitat

- **Carta o plot de Segré:** representació en un pla (Z,N) dels nuclis estables.
 - Per a $A < 40$, $Z \approx N$
 - A partir d' $A \sim 40$, el quocient N/Z va augmentant fins a prendre valors $N/Z \sim 1.56$ (ó $Z/A \sim 1/2.5$) (per als urànids).



- A partir de la carta de Segré i de la taula de nuclis i les seues abundàncies es dedueix:
 - El **principi d'exclusió de Pauli** justifica l'equilibri entre protons i neutrons per a $A < 40$.
 - Hi ha molts més nuclis estables tipus parell-parell (en Z i N) \Rightarrow **forces d'emparellament**.
 - Clusters α amb elevats B/A (molt estables): ${}^4\text{He}$, ${}^8\text{Be}$, ${}^{12}\text{C}$, ${}^{16}\text{O}$
 - Existeixen 165 nuclis parell-parell estables, 105 parell-senar, i només 4 senar-senar, tots molt lleugers (degut a les forces d'emparellament): ${}^2_1\text{H}$, ${}^6_3\text{Li}$, ${}^{10}_5\text{B}$, ${}^{14}_7\text{N}$
 - Hi ha un elevat nombre de nuclis estables per als **números màgics**:

Z ó $N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$

 - S_n i S_p presenten pics en els números màgics (que significa molta estabilitat nuclear).
 - Més enllà de $Z = 82$ (Pb), la repulsió de Coulomb trenca l'estabilitat i tots els nuclis són inestables almenys baix la desintegració α .

Fórmula semiempírica de la massa (Bethe-Weizsäcker)

Basada en un model de gota líquida:

$$B(Z, A) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z(Z-1) A^{-1/3} - a_{sim} \frac{(A-2Z)^2}{A} + \delta$$

Terme d'emparellament.
Simetria entre el número de p i n .
Energia electrostàtica repulsiva dels protons.

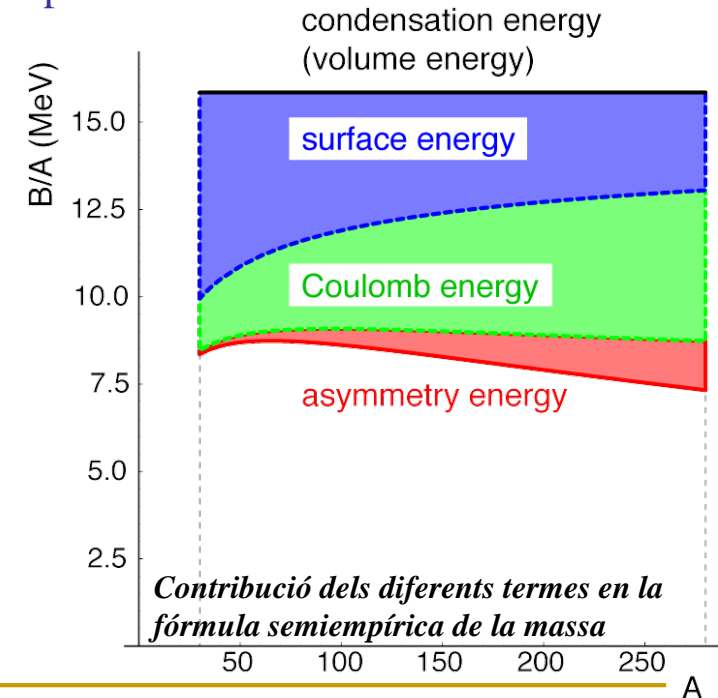
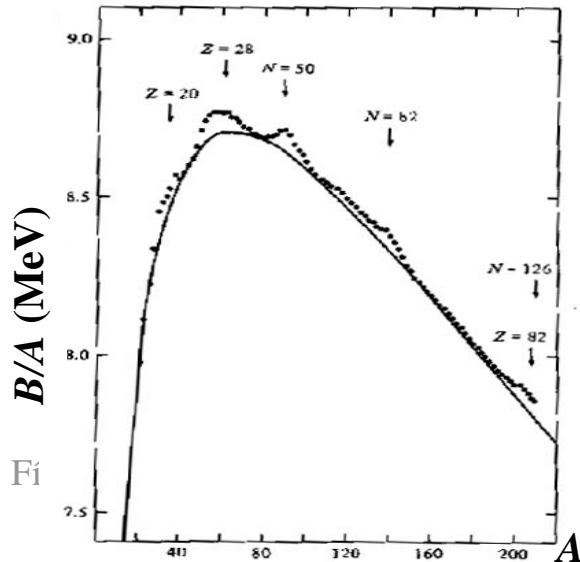
Terme superficial: els nucleons de la superfície estan menys lligats.

Terme de volum: saturació de la força nuclear, atractiu i proporcional al volum.

Ajust dels paràmetres amb les dades experimentals de B/A :

a_v	a_s	a_c	a_{sim}	a_p
15.5 MeV	16.8 MeV	0.72 MeV	23.0 MeV	34.0 MeV

(K.S. Krane)



Explicació de la fórmula semiempírica

- El terme **d'energia d'enllaç volúmica positiva** es justifica per la saturació de les forces nuclears i el fet que la densitat nuclear siga pràcticament constant: a mesura que els nuclis van augmentant en A , els parells d'enllaços per interacció forta, en ser de curt abast, augmenten també com A . Este és el terme responsable de l'estabilitat nuclear.
- El **terme d'energia superficial**, és semblant al de la tensió superficial dels líquids, ara però té el seu origen en les forces nuclears: els nucleons al bord del nucli són atrets pels de l'interior sense simetria en la part exterior el que origina esta força superficial. Com resultat, la major part dels nuclis seran esfèrics, com ocorre a les gotes d'aigua, donat que és la configuració més estable: **mínima superfície** \rightarrow energia mínima \rightarrow **major energia d'enllaç**.
- El terme **d'energia coulombiana** repulsiva representa l'energia d'una esfera carregada positiva de radi $A^{1/3}$. Si només existira este terme els nuclis estarien constituïts solament per neutrons. A mesura que el número atòmic augmenta, les parelles d'interacció coulombiana dels protons creixen com Z^2 , donat que és una interacció d'abast infinit. És este el terme responsable de la inestabilitat nuclear per a nuclis pesats.
- El terme **quàntic de simetria** representa que la configuració d'energia més estable és aquella en que protons i neutrons (distingibles) ocupen els nivells en energia més baixos disponibles en el nucli. Açò afavoreix que el número de protons siga igual al de neutrons. Situacions no simètriques impliquen augment d'energia en ocupar (els neutrons) nivells energètics més elevats. Este terme es contraposa a l'anterior i ens donen la **configuració més estable**.
- El **terme d'emparellament** és el que explica que els números pars estiguen afavorits en la física nuclear front als números senars de protons i/o neutrons.

Estabilitat nuclear. Paràbola de masses

$$M(Z, A) = ZM(^1H) + Nm_n - B(Z, A)$$

$$= ZM(^1H) + (A - Z)m_n - a_v A + a_s A^{2/3} + a_c Z(Z - 1)A^{-1/3} + a_{sim} \frac{(A - 2Z)^2}{A} - \delta$$

- Per a $A = \text{constant}$ la massa $M(Z, A)$ és una funció quadràtica de $Z \Rightarrow$ **paràboles de massa**.
- El mínim és (dóna la línia o vall d'estabilitat):

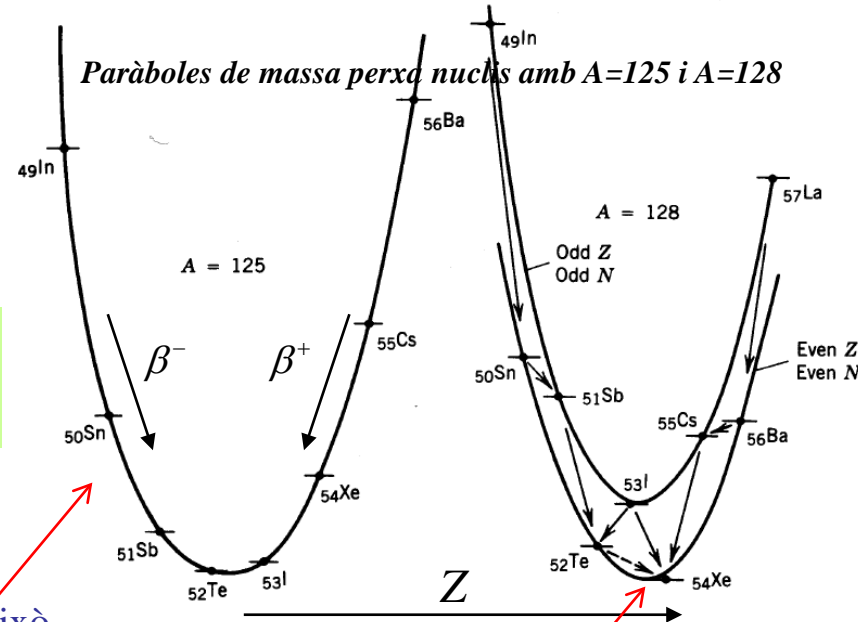
$$Z_{\min} = \frac{\left[m_n - M(^1H) + a_c A^{-1/3} + 4a_{sim} \right]}{2a_c A^{-1/3} + 8a_{sim} A^{-1}} \approx \frac{A}{2} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4} A^{2/3} \frac{a_c}{a_{sim}} \right)}$$

- En primera aproximació:

$$Z_{\min} \approx \frac{A}{2 + 0,0156 A^{2/3}} \rightarrow \begin{cases} A \downarrow \Rightarrow Z_{estable} \rightarrow A/2 \\ A \uparrow \Rightarrow Z_{estable} < A/2 \end{cases}$$

que és el que experimentalment s'observa, tant per a nuclis lleugers com pels pesats.

- Per a **A senar** només hi ha una paràbola de masses i això justifica que solga existir un nucli parell-senar estable per a cada A senar (parell-senar, senar-parell).
- El terme d'emparellament provoca que hi-hagen **dos paràboles per als nuclis amb A parell** i justifica que solguen existir dos nuclis parell-parell estables per a cada A parell, i molt pocs senar-senar.
- Els nuclis senar-senar, mínims de les paràboles per a A parell, són els únics que es poden desintegrar simultàniament β^+ i β^- (com s'observa a la figura: és el cas del ^{53}I).



- Per a A parell pot donar-se el fenomen de la desintegració doble beta:
 - Exemple: ${}_{52}^{128}\text{Te} \rightarrow {}_{54}^{128}\text{Xe} + 2e^{-} (+2\bar{\nu}_e)$
 - La importància d'estos processos radica en determinar si el procés té lloc amb l'emissió o absència de neutrinos, la qual cosa determinaria la naturalesa de Dirac o de Majorana del neutrino.
- La fórmula semi-empírica de la massa pot utilitzar-se també per a estudiar l'estabilitat dels nuclis enfront de tot tipus de processos de desintegració:

□ Desintegració α : ${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z-2}^{A-4}X + {}_2^4\text{He}$

□ Desintegració β :

$${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z+1}^AX + e^{-} + \bar{\nu}_e$$

$${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z-1}^AX + e^{+} + \nu_e$$

Exercicis

□ Desintegració γ : ${}_Z^AX^{*} \rightarrow {}_Z^AX + \gamma$

□ Fissió induïda : $n + {}_{37}^{235}\text{U} \rightarrow {}_{37}^{93}\text{Rb} + {}_{55}^{141}\text{Cs} + 2n$

□ Emissió de nucleons :

$${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z-1}^{A-1}X + p$$

$${}_Z^AX \rightarrow {}_Z^{A-1}X + n$$

4. Altres propietats globals nuclears

L'espín nuclear

- El moment angular total (o “*espí*” J) d'un nucli és la suma dels moments angulars dels seus nucleons:

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^A \vec{j}_i = \sum_{i=1}^A (\vec{l}_i + \vec{s}_i)$$

Espí intrínsec

- L'existència d'un moment angular orbital l implica l'existència d'un potencial central en les forces nuclears.

- Valors esperats:

$$\langle \vec{J}^2 \rangle = \hbar^2 J(J+1)$$

$$\langle J_z \rangle = M\hbar, \quad M = -J, -J+1, \dots, J-1, J$$

- J, M són **bons números quàntics** que hauran de caracteritzar els estats dels nuclis.
- Diferents estats excitats poden tindre “*espins*” diferents (= moments angulars totals).

- **Restricció de l'espín nuclear:**

- Cada nucleó té un moment angular total semi-enter: $\vec{j}_i = \vec{l}_i + \frac{\vec{1}}{2}$
- L'acoblament dels espins dels nucleons s'efectua de manera que:
 - Nuclis amb A imparell $\Rightarrow J$ semi-enter (tots els seus estats).
 - Nuclis amb A parell $\Rightarrow J$ enter (tots els seus estats).

- La mesura dels espins nuclears subministra informació sobre l'estructura nuclear.

- Les forces d'emparellament \Rightarrow que els estats fonamentals del nuclis par-par tenen $J(\begin{smallmatrix} \text{parell} \\ \text{parell} \end{smallmatrix} X) = 0$

Paritat nuclear

- La paritat P és un operador que inverteix les coordenades espacials de la funció d'ones ($\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$)

$$P\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A) = \psi(-\vec{r}_1, -\vec{r}_2, \dots, -\vec{r}_A)$$

- Si un estat és propi baix paritat (P és un bon número quàntic), els seus possibles valors propis són **$P = \pm 1$**

$$P^2\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A) = \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A) \Rightarrow P_a = \pm 1$$

- La part angular de la funció d'ones espacial ve caracteritzada pels harmònics esfèrics:

$$P\psi(r, \theta, \phi) = \psi(r, \pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^L \psi(r, \theta, \phi)$$

La paritat de la part espacial de la funció d'ones ve donada sempre per l'harmònic esfèric L

- La paritat es conserva en les **interaccions fortes i electromagnètiques** \Rightarrow la paritat és un bon número quàntic dels estats nuclears (Interacció dèbil?).

□ Els estats nuclears estaran per tant identificats pel seu espín-paritat: J^P

□ Diferents estats excitats del mateix nucli poden tindre paritats distintes (p. ex: si canvia l)

- Per conveni, la paritat intrínseca dels nucleons és **$P_a(\text{nucleons}) = +1$**

\Rightarrow La paritat nuclear és conseqüència dels moments angulars orbitals dels nucleons.

\Rightarrow La paritats dels estats nuclears és molt difícil de determinar a partir dels constituents.

\Rightarrow La seua determinació requereix de reaccions nuclears en què intervé el nucli (per conservació en la interacció forta).

- No hi ha cap relació entre J i P , però les forces d'aparellament condueixen al resultat molt important:

$$J^P(\text{par X}) = 0^+$$

Tots els nuclis parell-parell (en N i Z)
tenen el seu estat **fonamental** $J = 0$ i $P = +1$

Isospín nuclear

- Els estudis amb nuclis espill revelen una **simetria de càrrega** de la força nuclear forta
 ⇒ protó i nucleó són una mateixa partícula, **indistingibles**, per part de la interacció forta (IF).
- ❖ Simetria d'isospín ⇒ nou número quàntic (isospín o espín isotòpic, conservat en IF):

$$(I, I_z)$$

$$I = 1/2 \Rightarrow \begin{cases} I_z(p) = +1/2 \\ I_z(n) = -1/2 \end{cases}$$

El nucleó

$$N \equiv \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$$

$$\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$$

Matrius de Pauli

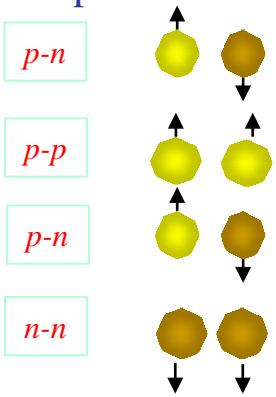
- El sistema nucleó-nucleó (N-N) podrà acoblar-se en estat singlet (antisimètric) o triplet:

singlet : $|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle)$

Estats possibles
de l'isospín per a
dos nucleons

El deuteró, triplet d'espín ($J=1$)
i singlet d'isospín. Moment $L=0,2$

triplet :
$$\begin{cases} |1,1\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \equiv |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle \\ |1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle) \\ |1,-1\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \equiv |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle \end{cases}$$



- Per a un nucli apliquem l'àlgebra dels “moments angulars”:

$$\vec{I} = \sum_{i=1}^A \vec{I}_i, \quad I_z = \sum_{i=1}^A I_{z,i}$$

$$I \geq \frac{|Z-N|}{2}, \quad I_z = \frac{1}{2}(Z-N)$$

$$Q = I_z + \frac{A}{2}$$

Relació de Gell-Mann-Nishijima nuclear

- La simetria d'isospín implica que la interacció nuclear dependrà només de I , i no de I_z
- I_z es conserva en les interaccions electromagnètiques.
- Exemples de multiplets d'isospín nuclears: $^{10}_4\text{Be}, ^{10}_5\text{B}, ^{10}_6\text{C}$ $^7_3\text{Li}, ^7_4\text{Be}$
 (veure nuclis espill i estats IAS).

La interacció forta nuclear conserva l'isospín I , no depèn de I_z però estats de diferent isospín I tenen energies diferents.

Estructura quàntica de nivells energètics nuclears

- Un nucli és una estructura d'una complexitat formidable, constituïda per A nucleons, tots ells interaccionant \Rightarrow problema genuí de molts cossos:

$$H = \sum_{i=1}^A \left(-\frac{\hbar^2}{2m_i} \right) \nabla_i^2 + \sum_{i < j=1}^A V(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \quad H\psi_k = E_k \psi_k$$

- La resolució de l'equació del sistema (Schrödinger) és inabordable de forma analítica exacta
 - No obstant això, ens prediu que existiran nivells d'energia ben definits.
 - Cada estat tindrà una funció d'ones, que ha de ser totalment antisimètrica (nucleons idèntics, doncs introduïm l'isospín en la funció d'ona):

$$\psi(q_1, q_2, \dots, q_A) = \phi_{\text{espacial}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A) \chi_{\text{espin}}(1, 2, \dots, A) \zeta_{\text{isospin}}(1, 2, \dots, A)$$

- Els estats excitats es desintegren emetent radiació electromagnètica.

- Models nuclears per a explicar l'estructura nuclear:

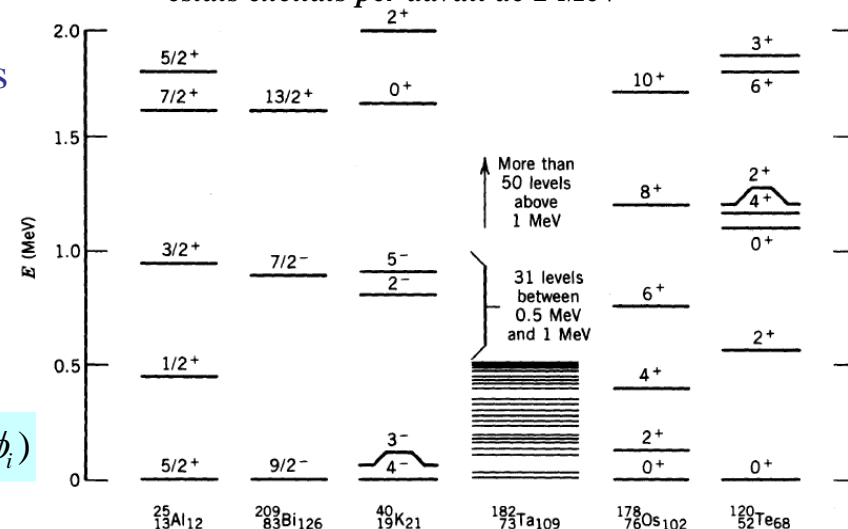
- Models de partícula independent.
- Models col·lectius: espectres vibracionals i rotacionals:

$$E_{\text{Rot}} = \frac{J(J+1)}{2I} \hbar^2 + E_K$$

- En models de partícula individual (amb un potencial central) cada nucleó tindrà al seu torn la seua pròpia funció d'ones i números quàntics (nlm)

$$\phi(\vec{r}_i) = R_{n_i}(r_i) Y_{l_i, m_i}(\theta_i, \phi_i)$$

Exemples de diagrames de nivells mostrant els estats excitats per davall de 2 MeV



Moments electro-magnètics nuclears

- Subministren informació sobre la distribució de càrrega i propietats magnètiques (degudes al moviment de càrregues dels constituents nuclears i dels seus espins) estacionàries dels nuclis
 - Determinen el comportament del nucli en presència de camps elèctrics i magnètics externs.
- Desenrotllament multipolar del **potencial escalar i vector** fora de la distribució de càrrega i dels corrents:

J.D.Jackson

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{r} + \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} K_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + \dots \right\}$$

$$\vec{d} = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3 \vec{r}'$$

Moment dipolar elèctric

$$K_{ij} = \int (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{r}') d^3 \vec{r}'$$

Tensor moment quadrupolar

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{r^3} + \dots \right\}$$

Potencial vector

[règim estacionari $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$]

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') d^3 \vec{r}'$$

Moment dipolar magnètic

- L'energia elèctrica i magnètica V d'interacció d'una distribució de càrregues i corrents ubicada en un camp electro-magnètic (\vec{E}', \vec{B}') extern és:

$$V = \int \rho(\vec{r}) \phi'(\vec{r}) d^3 \vec{r} = q\phi' - \vec{d} \cdot \vec{E}' - \frac{1}{6} \sum_{i,j} K_{ij} \frac{\partial E'_j}{\partial x_i} + \dots$$

$$V = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}' + \dots$$

- Quànticament s'ha de calcular valors esperats, i per conveni es defineixen per als estats de màxima tercera component

Espira plana de forma arbitrària

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \oint \vec{r} \times \vec{J} d\vec{r} = I \int d\vec{S} \Rightarrow \vec{\mu} = I \vec{S}$$

$$\vec{S}: \text{secció transversal del fil} \quad \int \vec{J} d\vec{S} = I$$

Càrrega q amb velocitat v en una òrbita circular

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \frac{qv\pi r^2}{2\pi r} = q \frac{\omega}{2\pi} \pi r^2 = \frac{1}{2} q \omega r^2 \\ \vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow L = mvr = m\omega r^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mu = \frac{q}{2m} L$$

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m} \vec{L}$$

Relació clàssica

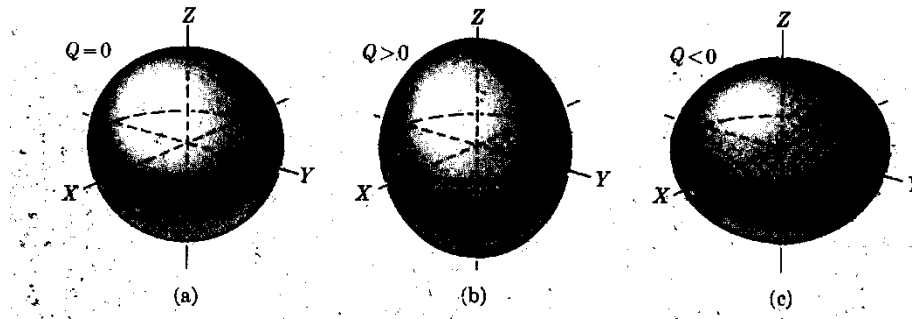
Moment quadrupolar elèctric nuclear

- El moment quadrupolar intrínsec es defineix com el valor esperat de l'operador $3z^2 - r^2$ sobre la màxima projecció del moment angular (*o espín nuclear*) $M=J$:

$$Q_0 \equiv K_{33} = Z \langle J, M=J | 3z^2 - r^2 | J, M=J \rangle = Z \left\langle J, M=J \left| \sqrt{\frac{16\pi}{5}} r^2 Y_{2,0}(\theta, \phi) \right| J, M=J \right\rangle = Z [3 \langle z^2 \rangle - \langle r^2 \rangle]$$

- Suposant **simetria axial**: $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle \Rightarrow Q_0 = 2Z [\langle z^2 \rangle - \langle x^2 \rangle]$

$$\begin{aligned} \langle z^2 \rangle &= \langle x^2 \rangle \rightarrow Q_0 = 0 && \text{nucli esfèric} \\ \langle z^2 \rangle &> \langle x^2 \rangle \rightarrow Q_0 > 0 && \text{nucli "prolato"} \\ \langle z^2 \rangle &< \langle x^2 \rangle \rightarrow Q_0 < 0 && \text{nucli "oblato"} \end{aligned}$$



Núclid	Q (b)
${}^2_1\text{H}_1$	+0.00288
${}^{17}_8\text{O}_9$	-0.02578
${}^{59}_{27}\text{Co}_{32}$	+0.40
${}^{63}_{29}\text{Cu}_{34}$	-0.209
${}^{133}_{55}\text{Cs}_{78}$	-0.003
${}^{161}_{66}\text{Dy}_{95}$	+2.4
${}^{176}_{71}\text{Lu}_{105}$	+8.0
${}^{209}_{83}\text{Bi}_{126}$	-0.37

- Es mesura en barn ($1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$, superfície), i els valors experimentals varien entre -1 i 8 b .
- $Q_0 = 0$ per a nuclis amb $J = 0$ (resultat teòric i experimental).

Moment dipolar magnètic nuclear

- Determinen la interacció d'un nucli amb un camp magnètic extern.

- Té dos contribucions: orbital i intrínseca:

- Una deguda al moment angular orbital:

$$\vec{\mu}_l = \frac{e\hbar}{2m_p} \frac{\vec{l}}{\hbar} = \mu_N \frac{\vec{l}}{\hbar}$$

- Una altra a l'espín intrínsec dels nucleons:

$$\vec{\mu}_s = g^{(s)} \frac{e\hbar}{2m_p} \frac{\vec{s}}{\hbar} = g^{(s)} \mu_N \frac{\vec{s}}{\hbar} \quad \left\{ \begin{array}{l} g_p^{(s)} = 5.5856912(22) \\ g_n^{(s)} = -3.8260837(18) \end{array} \right.$$

Relació clàssica

Factors giro-magnètics g

El valor de $g^{(s)}$ per a partícules puntuals (com l'electró) és de 2 obtingut de l'equació de Dirac, i 2,002319...de la TQC

- Per tant, l'operador moment dipolar magnètic és:

$$\vec{\mu} = \sum_{i=1}^A \left(g_i^{(l)} \vec{l}_i + g_i^{(s)} \vec{s}_i \right) \frac{\mu_N}{\hbar} \quad \left\{ \begin{array}{l} g_p^{(l)} = 1 \\ g_n^{(l)} = 0 \end{array} \right.$$

- En la pràctica no és possible construir l'operador a partir dels constituents, per tant es defineix un factor giromagnètic nuclear g_J :

$$\vec{\mu} = g_J \frac{\mu_N}{\hbar} \vec{J}$$

- El moment magnètic d'un sistema és $\mu = \langle J, M = J | \mu_z | J, M = J \rangle$

- Magnetó de Bohr:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5.788381804(39) \times 10^{-11} \text{ MeV T}^{-1}$$

- Magnetó Nuclear:

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} = 3.152451259(21) \times 10^{-14} \text{ MeV T}^{-1}$$

- Per als nuclis, es troba experimentalment: $-2\mu_N < \mu < +6\mu_N$
- La raó es troba en les forces d'emparellament: només contribueixen al moment dipolar magnètic els nucleons desaparellats.

Núclid	$\mu(\mu_N)$
n	-1.9130428
p	+2.79284739
${}^2_1\text{H}_1$	+0.8574376
${}^{16}_8\text{O}$	0
${}^{17}_8\text{O}_9$	-1.89379
${}^{57}_{27}\text{Co}_{30}$	+4.733
${}^{93}_{41}\text{Nb}_{52}$	+6.1705

Aplicació. Ressonància magnètic nuclear (RMN)

- Quan un dipol magnètic se situa en un camp magnètic, apareix una energia potencial que tendeix a alinear-ho amb el camp extern:

$$V = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0 = -g_J \frac{\mu_N}{\hbar} \vec{J} \cdot \vec{B}_0$$

- Si el camp magnètic s'aplica en la direcció z :

$$\vec{B}_0 = B_0 \vec{k}$$

$$V = -g_J \frac{\mu_N}{\hbar} J_z B_0$$

$$E_m \equiv \langle V \rangle = -g_J \mu_N M B_0$$

- El camp magnètic extern desplega el nivell J en $2J+1$ nivells equidistants, amb una distància de separació proporcional a la intensitat del camp.
- La separació entre nivells consecutius serà; ja que $M = -J, -J+1, \dots, J-1, J$
- La separació entre els nivells extrems del multiplet és: $\Delta E_{\max} = 2Jg_J \mu_N B_0$
- Per a una mostra en equilibri tèrmic, les poblacions dels diferents estats venen determinades pel factor de Boltzman:

$$\left[e^{-\frac{E_m}{kT}} \right] \approx 1 - \frac{E_m}{kT}$$

(Els nivells de menor energia estaran lleugerament més poblats)

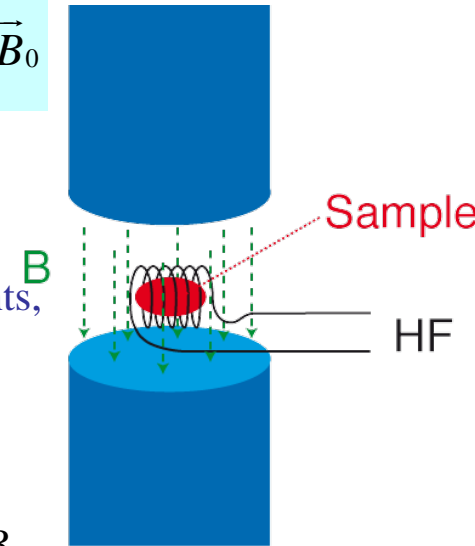
- A temperatures ordinàries $\Delta E \ll kT \Rightarrow$ el grau de polarització és molt xicotet

- Exemple: protó, $B_0 = 1 \text{ T}$, $J = 1/2$

$$\Delta E = E_+ - E_- = g_p^{(s)} \mu_N B_0 = 1.76 \times 10^{-7} \text{ eV}$$

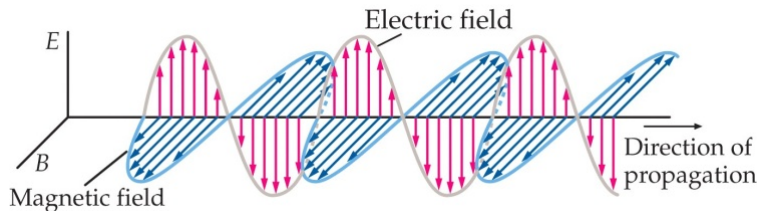
$$kT = 8.617343 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1} \times (300 \text{ K}) = 0.025 \text{ eV}$$

$$\frac{N_+}{N_-} = \frac{e^{-E_+/kT}}{e^{-E_-/kT}} = e^{-(E_+ - E_-)/kT} = e^{-\Delta E/kT} \approx 1 - \frac{\Delta E}{kT} = 1 - 7.0 \times 10^{-6}$$



- Si s'aplica un senyal electro-magnètic de RF el camp magnètic del qual és perpendicular al camp estàtic B_0 d'alineament, l'energia del senyal serà absorbida pels nivells més baixos per a passar als més alts quan la **Freqüència de Ressonància** ω_L

$$\hbar\omega_L = ng_J\mu_N B_0 \quad , \quad n=1,2,3,\dots,2J$$



- La freqüència de ressonància per a $n = 1$ (nivells contigus) és la freqüència de precessió (rotació) d'espín, coneguda com **Freqüència de Larmor**
- Efectivament, des del punt de vista quàntic, els fotons de RF són absorbits per a canviar els espins nuclears de paral·lels (menor energia) a antiparal·lels (major energia) al camp magnètic (**spin flipping**):
 - Camp magnètic total: $\vec{B} = (B \cos \omega t, B \sin \omega t, -B_0)$

Partícula	Espín J	$\omega_L / B_z \text{ s}^{-1}\text{T}^{-1}$	$\nu_L = \omega_L / 2\pi$
Electró	$1/2$	1.7608×10^{11}	28.0 GHz/T
Protó	$1/2$	2.6753×10^8	42.6 MHz/T
Deuteró	1	0.4107×10^8	6.5 MHz/T
Neutró	$1/2$	1.8326×10^8	29.2 MHz/T
^{23}Na	$3/2$	0.7076×10^8	11.3 MHz/T
^{31}P	$1/2$	1.0829×10^8	17.2 MHz/T
^{14}N	1	0.1935×10^8	3.1 MHz/T
^{13}C	$1/2$	0.6729×10^8	10.7 MHz/T
^{19}F	$1/2$	2.518×10^8	40.1 MHz/T

- Equació de Schrödinger d'evolució temporal, cas $J = 1/2$

$$H_{\text{int}} \psi(t) = i\hbar \frac{\partial \psi(t)}{\partial t}$$

$$H_{\text{int}} = -g_J \frac{\mu_N}{\hbar} \vec{J} \cdot \vec{B}$$

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}$$

- La solució de l'equació diferencial és:

$$\left. \begin{aligned} \alpha(t) &= -e^{-i\omega_L t/2} \left(A_+ e^{i\lambda_+ t} + A_- e^{i\lambda_- t} \right) \\ \beta(t) &= -\frac{e^{-i(\omega_L/2 - \omega)t}}{\omega_{rf}/2} \left(\lambda_+ A_+ e^{i\lambda_+ t} + \lambda_- A_- e^{i\lambda_- t} \right) \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} \omega_{rf} &= g_J \mu_N B \\ \omega_L &= g_J \mu_N B_0 \end{aligned} \quad \lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\omega_L - \omega \pm \sqrt{(\omega_L - \omega)^2 + \omega_{rf}^2} \right)$$

- Si en $t = 0$ l'espín del nucli és $+1/2 \Rightarrow \alpha(0) = 1$ i $\beta(0) = 0$, i $\begin{cases} A_+ = -\lambda_- / (\lambda_- - \lambda_+) \\ A_- = \lambda_+ / (\lambda_- - \lambda_+) \end{cases}$

- Si $\omega = \omega_L$ (ressonància):

$$\begin{aligned} |\alpha(t)|^2 &= \frac{1}{2} (1 + \cos \omega_{rf} t) \\ |\beta(t)|^2 &= \frac{1}{2} (1 - \cos \omega_{rf} t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle J_z \rangle &= \langle \psi(t) | J_z | \psi(t) \rangle = +\frac{\hbar}{2} \cos \omega_{rf} t \\ \langle J_x \rangle &= \langle \psi(t) | J_x | \psi(t) \rangle = -\frac{\hbar}{2} \sin \omega_{rf} t \sin \omega_L t \\ \langle J_y \rangle &= \langle \psi(t) | J_y | \psi(t) \rangle = +\frac{\hbar}{2} \sin \omega_{rf} t \cos \omega_L t \end{aligned}$$

Spin flipping
Precessió

Exercici

És a dir, treballant a la freqüència de ressonància (dada per Larmor), el camp de RF indueix un moviment de precessió de l'espín entorn a l'eix z (moviment giroscòpic) de freqüència ω_L , amb la superposició d'una oscil·lació de J_z entre $+1/2$ i $-1/2$ (*spin flipping*) originada per ω_{rf}

5. Models nuclears. Models de capes

- L'estudi de les propietats i l'estructura nuclears és impossible d'abordar de manera fonamental:
 - A baixa energia (fins a uns 2 MeV) el nucli pot considerar-se un sistema quàntic resultat de la interacció dels seus nucleons \Rightarrow problema acoblat de N cossos, impossible de resoldre \Rightarrow **potencials fenomenològics**.

- A alta energia (reaccions de ions pesats) solen utilitzar-se mètodes basats en la mecànica estadística (equació d'estat).

- En ambdós casos els efectes quàntics són importants.

- Dos estratègies o tipus de models per a tractar el problema:

- **Microscòpics:**

- El Hamiltonià depèn dels graus de llibertat dels nucleons constituents:

$$H = \sum_{i=1}^A \left(-\frac{\hbar^2}{2m_i} \right) \nabla_i^2 + \sum_{i < j=1}^A V(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$$

- $V(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$ és fenomenològic (no ve determinat per primers principis).
- La resolució de l'equació de *Schrödinger* és molt complexa per a $A \geq 4$.

- **Macroscòpics:**

- El hamiltonià depèn de graus de llibertat col·lectius del nucli (variables generalitzades):
 - Radi mitjà, massa total, centre de masses, moment quadrupolar,...
- Poden en principi relacionar-se amb les coordenades microscòpiques.

$$\left\{ \begin{array}{l} B \approx 8 \text{ MeV}, p_F \approx 250 \text{ MeV}, T_F = \frac{1}{2} p_F^2 c^2 / mc^2 \approx 40 \text{ MeV} \\ v = c \sqrt{\frac{2T_F}{mc^2}} \approx 0,3c \rightarrow \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{2\pi\hbar c}{mc^2 \beta} \approx 4 \text{ fm} \end{array} \right.$$

Imatge dinàmica dels nuclis

Models col·lectius

- Els models macroscòpics o col·lectius descriuen el nucli com un fluid de matèria nuclear.
- Dos tipus:
 - **Model de gota líquida** \Rightarrow fluid incompressible. Origina la ja vista:
 - Formula semi-empírica de la massa.
 - **Model del gas de Fermi** \Rightarrow gas de Fermi degenerat.
 - Justifica el terme de simetria que s'inclou en la formula semi-empírica de la massa.
- Sorgeixen per la necessitat d'interpretar les propietats dels **nuclis parell-parell**:
 - Espín-paritat $J^P = 0^+$ (nucleons idèntics s'acoblen a espín 0, estat més lligat).
 - Conseqüència de les forces d'aparellament de nucleons (terme δ f.s.m.).
 - Tots tenen dos estats excitats amb $J^P = 2^+, 4^+$ de comportament molt regular.
 - Els moments dipolars magnètics de l'estat 2^+ són \approx constants: $\mu(2^+) \approx (0,7 - 1) \mu_N$
 - Els moments quadrupolars $Q(2^+)$ són xicotets per a $A < 150$ i grans per a $150 < A < 190$.
 - Els moments quadrupolars Q dels estats fonamentals dels lantànids són també molt grans.
- El resultat d'estes observacions requereix l'estudi de dos tipus de moviments col·lectius:
 - Vibracions entorn d'una forma en equilibri esfèrica:
 - \Rightarrow Nuclis lleugers, $A < 150 \Rightarrow$ **Model col·lectiu vibracional**.
 - Rotacions de sistemes no esfèrics (deformats):
 - \Rightarrow Nuclis pesats, $150 < A < 190$ i $A > 220 \Rightarrow$ **Model col·lectiu rotacional**.

Models de partícula independent. Models de capes

- Els models col·lectius no tenen poder predictiu per a nuclis amb **A imparell**.
- Estos nuclis es descriuen amb prou precisió pels **models de partícula independent**.
 - Tots els nucleons aparellats s'acoblen a $J^P = 0^+$, de manera que les propietats del nucli vénen determinades pels números quàntics del nucleó desaparellat.
 - Com el nucleó ocupa un estat de moment angular j ben definit:

$$J = j \quad P = (-1)^l \quad l = j \pm \frac{1}{2}$$

⇒ la paritat fixa i determina el valor concret del moment angular l orbital.

- Un dels aspectes experimentals ben establerts que el model pretén explicar és l'existència de nuclis amb **números màgics**, que són: → $Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82$
i les principals propietats dels quals són: $N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$
 - Energies de lligadura molt elevades.
 - Energies de separació S_p i S_n majors que en els nuclis veïns.
 - Moments quadrupolars elèctrics $Q \approx 0$, amb **nuclis esfèrics** en l'estat fonamental.
 - Els doblement màgics ${}^4\text{He}$, ${}^{16}\text{O}$, ${}^{40}\text{Ca}$, ${}^{90}\text{Zr}$, ${}^{208}\text{Pb}$ són molt estables i abundants.
 - Discontinuitats en les energies de les partícules α (que són nuclis de ${}^4\text{He}$) emeses.
- Aproximació: la interacció de cada nucleó es descriu basant-se en un potencial efectiu creat per la totalitat del nucli.
 - No hi ha interacció mútua entre nucleons ⇒ problema d'un cos ⇒ resoluble una vegada fixat el potencial central efectiu (tipus Hartree-Fock).

Potencial de pou esfèric infinit

Per a tractar de trobar la forma del potencial efectiu que actua sobre un nucli podem partir del pou infinit de potencial, que ve descrit com:

Recordatori: pou infinit unidimensional, pou infinit radial \rightarrow funcions de Bessel, concepte de massa reduïda

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & 0 \leq r \leq R \\ \infty & r > R \end{cases}$$

- Atés que és un **potencial central**:

$$\psi_{nlm_l}(\vec{r}) = R_{nl}(r)Y_{l,m_l}(\theta, \phi)$$

$$R_{nl}(r) = u_{nl}(r)/r \quad n=1, 2, \dots$$

- Equació radial per a $r < R$ (per a $r > R$ la funció d'ones radial és nul·la)

Funció radial reduïda

μ massa reduïda

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r) - E \right] u(r) = 0$$

$$u_{nl}(r) = A \frac{j_l(kr)}{kr}$$

$$k = \sqrt{2\mu E} / \hbar$$

Potencial centrífug, important en desintegracions α

- Com la funció s'anul·la en $r = R$, les energies de lligadura vindran donades pels zeros de les funcions esfèriques de Bessel:

$$j_l(X_{nl}) = 0, \text{ i } kR \equiv X_{nl} \longrightarrow$$

$$E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2\mu R^2} X_{nl}^2$$

Nivells d'energia del pou esfèric infinit

- Per a $l = 0$: $\sin kR = 0 \Rightarrow X_{n0} = n\pi \rightarrow kR = n\pi$ dona els nivells d'energia per a $l = 0$
- Els estats estan degenerats en energia amb **degeneració 2 (2l+1)** (2 estats d'espín per 2l+1 valors de m_l).
- Números d'ocupació: 2, 8, 18, 32, 50, ... \Rightarrow **no reproduceix els números màgics.**

Potencial oscil·lador harmònic simple

$$V(r) = \frac{1}{2} \mu \omega^2 r^2$$

- En ser també un **potencial central** el problema es redueix a resoldre **l'equació radial**:

$$R_{nl}(r) = A_{nl} r^l e^{-\alpha^2 r^2 / 2} M(-n+1, l+3/2, \alpha^2 r^2)$$

$$\alpha = \sqrt{\mu \omega / \hbar}$$

$$n = 1, 2, \dots$$

- on $M(a, b, z)$ són les funcions hipergeomètriques confluents:

$$M(-n', k'+1, z) = \frac{n'!}{(k'+1)_{n'}} L_{n'}^{k'}(z) \quad \text{Polinomis generalitzats de Laguerre}$$

- En el nostre cas:

$$n' = n - 1$$

$$k' = l + 1/2$$

$$z = \alpha^2 r^2$$

$$M(-n+1, l+3/2, \alpha^2 r^2) = \frac{(n-1)!}{(l+3/2)_{n-1}} L_{n-1}^{l+1/2}(\alpha^2 r^2)$$

- L'energia dels estats lligats ve donada per **la condició d'integrabilitat de la funció d'ona**, que exigeix:

$$\Gamma((l+3/2)/2 - k/4\alpha^2) = \infty \Rightarrow (l+3/2)/2 - k/4\alpha^2 = -n+1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- Per tant:

N: Número quàntic de l'oscil·lador

$$N = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$E_{nl} = \hbar \omega [N + 3/2]$$

$$N = 2n - 1 + l$$

$$l = N, N-2, \dots, 1 \text{ ó } 0$$

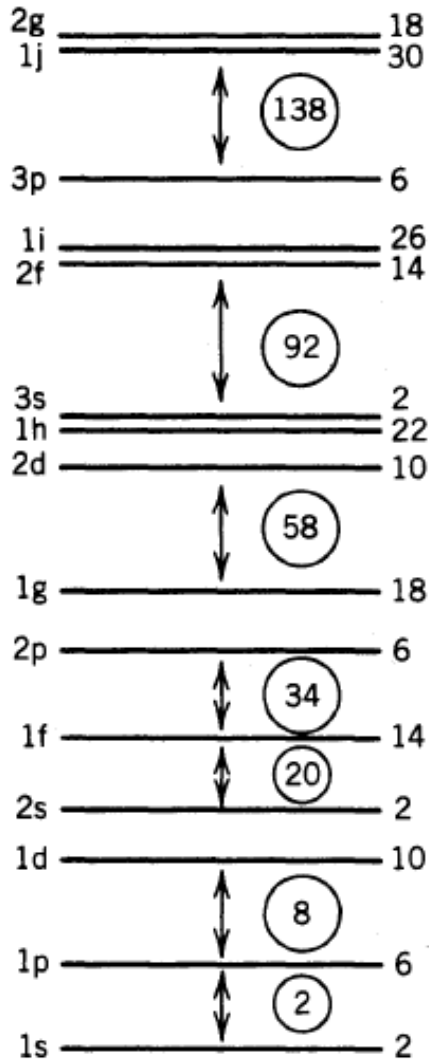
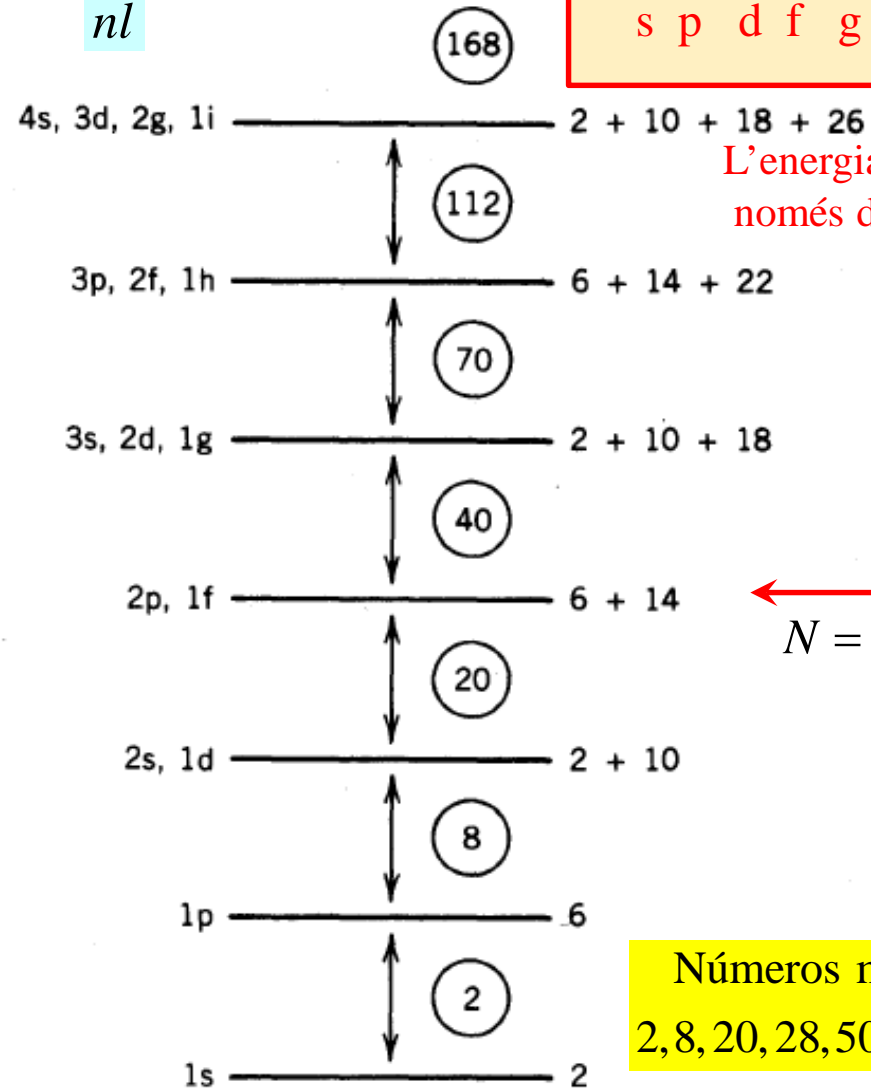
- L'espaiat mitjà dels nivells observat experimentalment permet estimar la freqüència de l'oscil·lador:

$$N \rightarrow 1s; 1p; 2s, 1d; 2p, 1f; 3s, 2d, 1g; \dots (nl)$$

$$\hbar \omega \approx 40 A^{-1/3} \text{ MeV}$$

- La degeneració dels estats és: $D_N = 2 \times \sum (2l+1) = 2 \times \frac{1}{2} N(N+1)$

- Números d'ocupació ΣD_N : 2, 8, 20, 40, 70, 112, 168 \Rightarrow només reproduïx els primers “màgics”.

nl Pou de potencial
infinitOscil·lador
harmònic nl 
 $l=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7..$
 s p d f g h i j

L'energia dels nivells
només depèn de N

← Mateix N
 $N = 2n - 1 + l$

Números màgics
 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126

Estructura de capes obtinguda mitjançant el pou infinit i l'oscil·lador harmònic

Potencial de Saxon-Woods

- Un potencial més **realista** és el de Fermi o Saxon-Woods, ja que ens permet reproduir la densitat de matèria i càrrega nuclear:

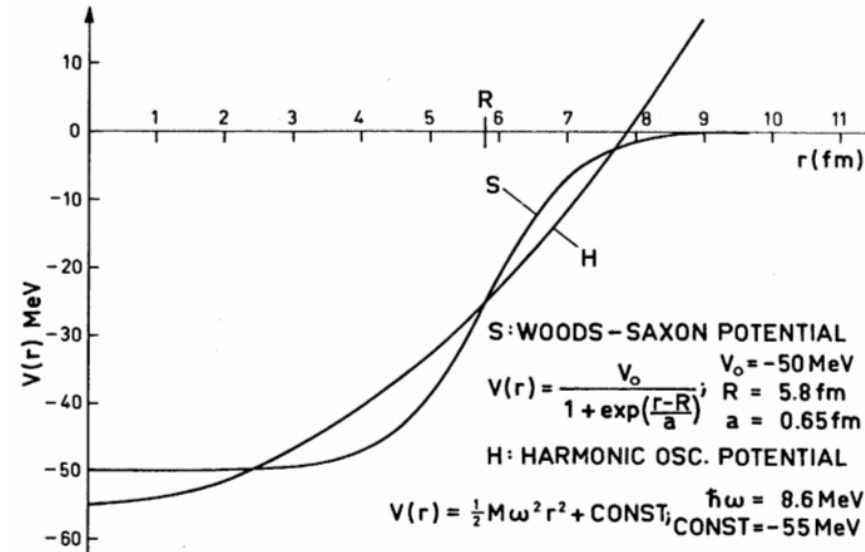
$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + \exp\left[\frac{r - R}{a}\right]}$$

amb valors: $V_0 \sim 50 \text{ MeV}$

$$R \approx r_0 A^{1/3}, \quad r_0 \approx 1.2 \text{ fm}$$

$$a \approx 0.55 \pm 0.07 \text{ fm}$$

- $t = 4a \ln 3 \approx 2.3 \text{ fm}$ representa l'amplària de la superfície (amplària entre el 90% i el 10% de la densitat màxima).
- L'esquema de nivells d'energia és intermedi entre els dos anteriors (oscil·lador i pou esfèric):
 - Més atractiu a alt radi (relatiu a la seua màxima profunditat) que l'oscil·lador de radi quadràtic mig semblant \Rightarrow baixa els nivells d'alt moment angular per a un número quàntic d'oscil·lador donat.
- La profunditat del pou es determina empíricament ($\sim 50 \text{ MeV}$).
 - Correcció per a la diferència entre el nombre de protons i neutrons de distints nuclis.
- Els estats estan degenerats en energia amb **degeneració 2 (2l+1)**. És a dir, **es trenca la degeneració en l**. Este potencial s'ajusta millor a la realitat però encara no reproduïx els números màgics.



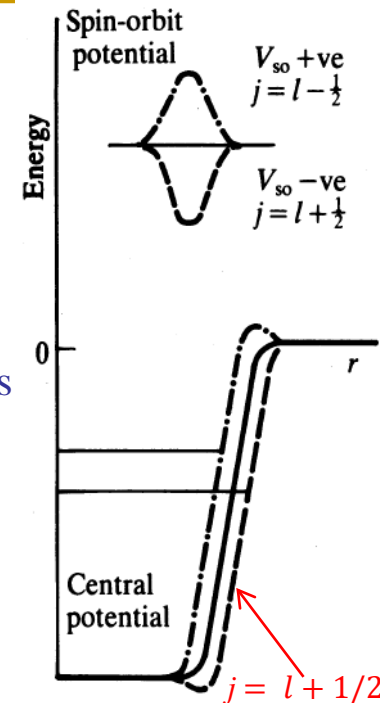
Potencial espín-òrbita

- Sabem que el potencial $N-N$ depèn de l'espín \Rightarrow és necessari introduir un terme d'acoblament espín-òrbita en el Hamiltonià (Mayer, Jensen, Haxel, Suess, 1949).

$$V_{so} = a \vec{l} \cdot \vec{s}$$

$$h(r_i) = h_c(r_i) + a \vec{l} \cdot \vec{s}$$

- El terme espín-òrbita, junt al pot. cen. permet reproduir els números màgics
- L'acoblament espín-òrbita desdobra tots els nivells amb moments angular orbital ($l > 0$), i augmenta la diferència entre eixos nivells en augmentar l .



$$\langle \vec{l} \cdot \vec{s} \rangle = \frac{1}{2} \langle \vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2 \rangle = \frac{1}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \hbar^2$$

$$j = \begin{cases} l + \frac{1}{2} \\ l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

L'oscil·lador per simplicitat matemàtica

$$E_{Nlj} = \hbar \omega \left(N + \frac{3}{2} \right) + \begin{cases} +\frac{a}{2} l \hbar^2 = +\frac{a}{2} (j - \frac{1}{2}) \hbar^2 & j = l + \frac{1}{2} \\ -\frac{a}{2} (l+1) \hbar^2 = -\frac{a}{2} (j + \frac{3}{2}) \hbar^2 & j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Delta E_{Nlj} = a \langle \vec{l} \cdot \vec{s} \rangle_{j=l+1/2} - a \langle \vec{l} \cdot \vec{s} \rangle_{j=l-1/2} = a(l + \frac{1}{2}) \hbar^2$$

- Experimentalment s'observa (Bohr i Mottelson, 1969) :

$$\text{Si } a \equiv a(\vec{r}) \Rightarrow a \rightarrow \int a(\vec{r}) |\psi(\vec{r})|^2 d^3 r$$

$$\Delta E_{Nlj} \approx -20(l + 1/2) A^{-2/3} \text{ MeV}$$

Per tant, $a \approx -20 A^{-2/3} \text{ MeV}$. Que $a < 0$ implica que l'estat de major j està més lligat, per a una l determinada \Rightarrow espín s i l (moment orbital) paral·lels són una configuració més estable.

- Els nivells amb acoblament espín-òrbita queden etiquetats pels números **quàntics n, l, j, m**
Però hi ha degeneració energètica amb $m \Rightarrow$ **degeneració $(2j+1)$!!!**
- Les capes d'ompliment s'identifiquen:

$$(nl_j)^x$$

$$m = -j, \dots, j$$

- On x representa **l'estat d'ocupació del nivell**: nombre de nucleons (p ó n) al nivell.
 - La multiplicitat de cada **capa és $2j+1$** , doncs s'ha eliminat la degeneració de l'espín.
 - La posició seqüencial de cada sub-capa pot alterar-se en variar els valors utilitzats per a la profunditat i l'abast del potencial (quan convé en regions de la carta dels nuclis).
 - Valors típics utilitzats: $V_0 \approx 42 \text{ MeV}$, $R \approx 10 \text{ fm}$
- Reprodueix els números màgics: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, 184
 - Es prediu una illa d'estabilitat entre $A = 298$ i $A = 310$, encara no trobada però hi ha alguns indicis.
- Hi ha nuclis doblement màgics (màgics per a protons i neutrons)

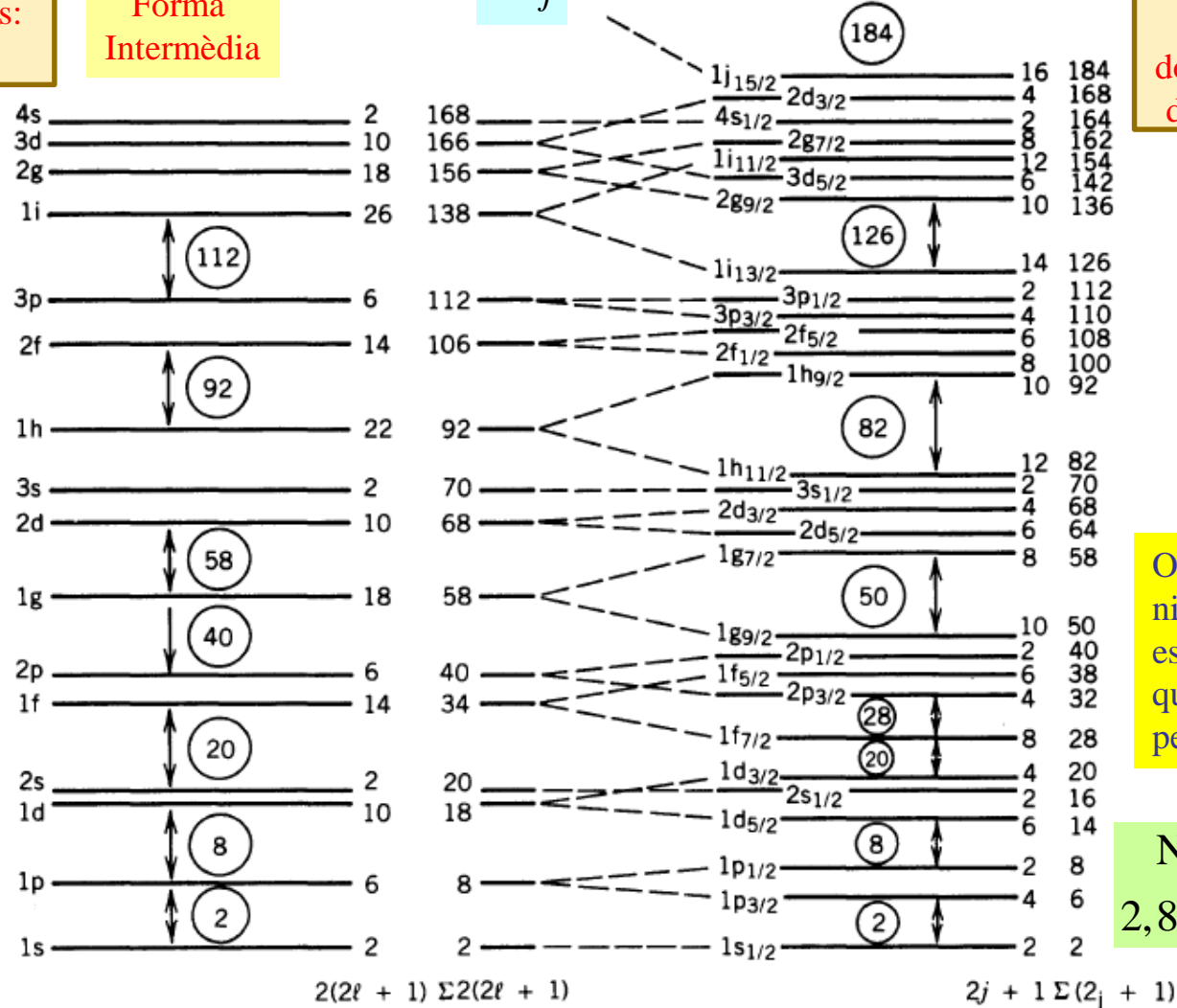
Multiplicitat de
cada subcapa és:
 $2(2l+1)$

Forma
Intermèdia

nl_j

Forma intermèdia
amb espín-òrbita

Multiplicitat de
cada subcapa és:
 $2j+1$
doncs s'elimina la
degeneració en s



Observeu que els
nivells de major j
estan més lligats
que els de menor j ,
per al mateix n i l

Números màgics
2, 8, 20, 28, 50, 82, 126

Model extrem de partícula independent

- La seqüència de nivells del model de capes es va omplint per ordre creixent d'energia, seguint el principi d'exclusió de Pauli \Rightarrow **Només un nucleó per estat quàntic!**
 - Les propietats del nucli vénen determinades únicament per les del nucleó desaparellat. Per exemple l'espín-paritat de l'estat ocupat pel nucleó desaparellat determina l'espín-paritat del nucli:

En el model de partícula independent extrem les propietats del nucli vénen determinades únicament per les del nucleó desaparellat

- El model funciona molt bé **prop de capa tancada** (dos situacions possibles):
 - Un nucleó sobre capa tancada.
 - Falta un nucleó per a capa tancada \Rightarrow **buit**.
 - Les forces residuals no incloses en el potencial efectiu produeixen forces d'emparellament molt intenses que modifiquen els nivells energètics i acoblen a $J^P = 0^+$
 - Estes forces són especialment intenses prop de capes tancades.
- **Lluny de capa tancada** no són tan intenses a causa dels nucleons de valència, la qual cosa origina discrepàncies entre el model i la realitat (per a nuclis senars lluny de capa completa).
- Els estats excitats corresponen a l'excitació del nucleó desaparellat, també a excitació de nucleons del *core* a la capa de valència (quan és favorable per energia) i poden aparèixer a més mescla de configuracions:
 - Exemple del ^{17}O : la seqüència de nivells excitats pel neutró seria $1/2^+$, $3/2^+$, $7/2^-$,... però hi ha un estat intermedi $1/2^-$ del *core* per l'excitació d'un neutró de la capa completa $1p_{1/2}$ al $1d_{5/2}$

Espín-paritat dels nivells

■ Exemple (nucleó desaparellat)

$${}^{15}_8O_7 \rightarrow 1p_{1/2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} l=1 \Rightarrow P = (-1)^l = -1 \\ j = 1/2 \end{array} \right\} \rightarrow J^P = \frac{1}{2}^-$$

$${}^{17}_8O_9 \rightarrow 1d_{5/2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} l=2 \Rightarrow P = (-1)^l = +1 \\ j = 5/2 \end{array} \right\} \rightarrow J^P = \frac{5}{2}^+$$

Seqüència de nivells en el model de capes:
 $1s_{1/2}, 1p_{3/2}, 1p_{1/2}, 1d_{5/2}, 2s_{1/2}, 1d_{3/2}, 1f_{7/2}, \dots$

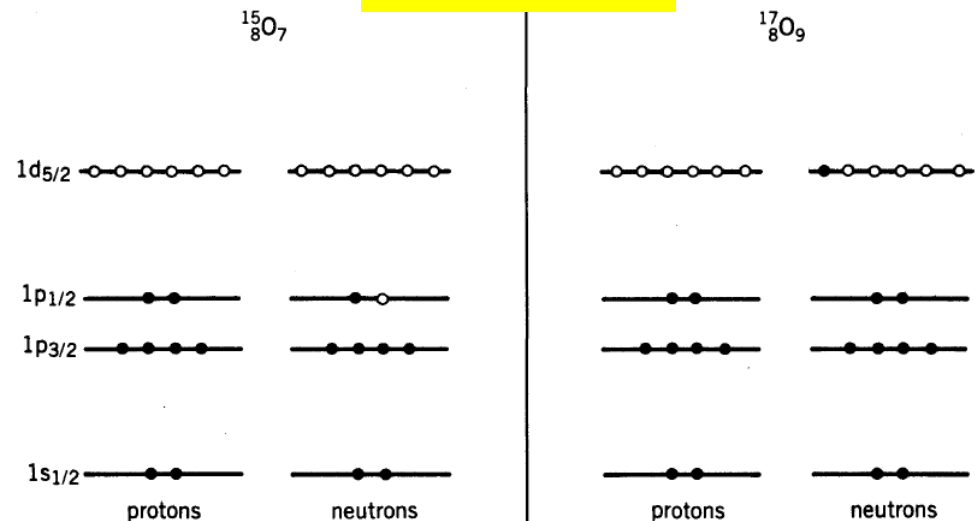
Recordeu que la multiplicitat d'ocupació de cada nivell és $2j+1$ doncs es trenca la degeneració de l'espín intrínsec en ser dependent d'ell les forces nuclears

Experimentalment:

$$J^P({}^{15}_8O_7) = \frac{1}{2}^-$$

$$J^P({}^{17}_8O_9) = \frac{5}{2}^+$$

- Estats ocupats
- Estats buits



Ompliment de capes

Les propietats queden determinades pel nucleó desaparellat com pel buit en la capa

Tema 6 EXTRA: Propietats i models nuclears

Massa i abundància de nuclis

Mètode dels doblets de masses

La paràbola de Thomson

Separació d'isòtops

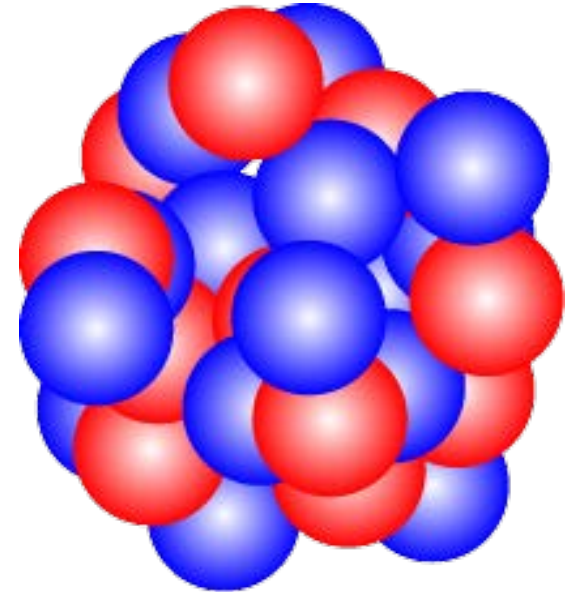
Moment quadrupolar elèctric nuclear en eix de quantificació

RMN: processos de relaxació i desplaçament químic

RMN: tècniques i aplicacions

Moments dipolars magnètics en model de partícula independent

Moments quadrupolars elèctrics en model del partícula independent



Mètode dels doblats de masses

- Es basa en la mesura de la diferència de massa entre un nucli de massa coneguda i la del nucli problema. Generalment s'usa amb l'espectròmetre de masses.
- En la pràctica s'utilitzen elements compostos (ionitzats) amb el mateix nombre de nucleons
- Exemple: Seleccionem l'espectròmetre per a una massa de **128** (per a optimitzar la resolució) i mesurem la diferència entre les masses moleculars del C_9H_{20} (nonà) i $C_{10}H_8$ (naftalè):

$$\delta = 0.09390032 \pm 0.00000012 \text{ u}$$

$$C_9H_{20} \Rightarrow 9 \times 12 + 20 = 128$$

$$C_{10}H_8 \Rightarrow 10 \times 12 + 8 = 128$$

Idèntic A=128

- La diferència mesurada **δ** entre les masses dels dos compostos és (negligint les energies d'enllaç molecular i atòmiques):

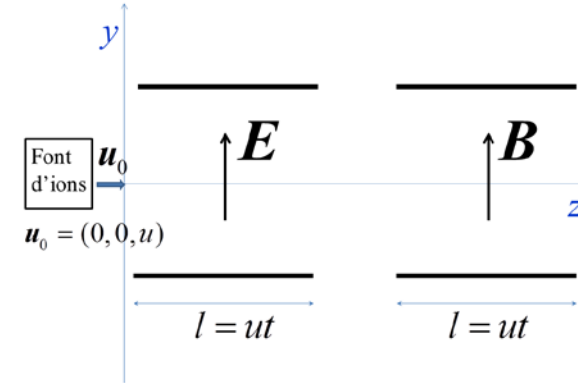
$$\delta = M(C_9H_{20}) - M(C_{10}H_8) = 12M(^1H) - M(^{12}C)$$

amb la qual cosa:

$$M(^1H) = \frac{1}{12} [M(^{12}C) + \delta] = 1.00782503 \pm 0.00000001 \text{ u}$$

La paràbola de Thomson

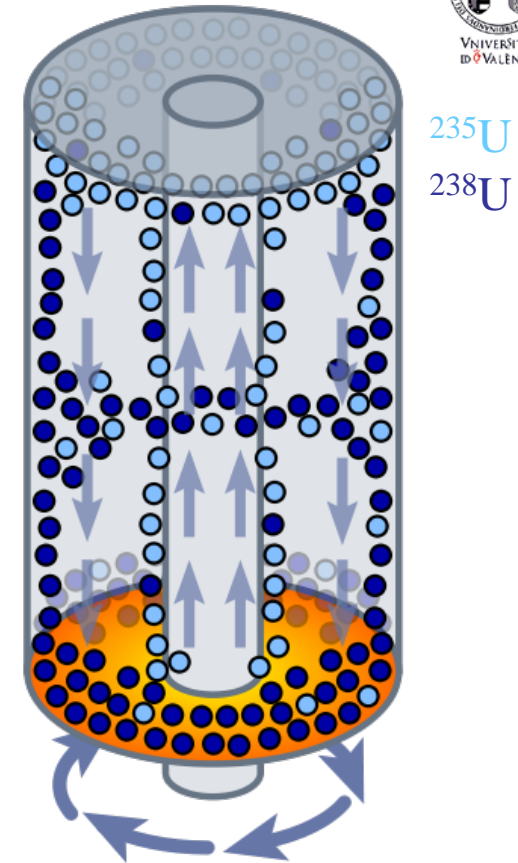
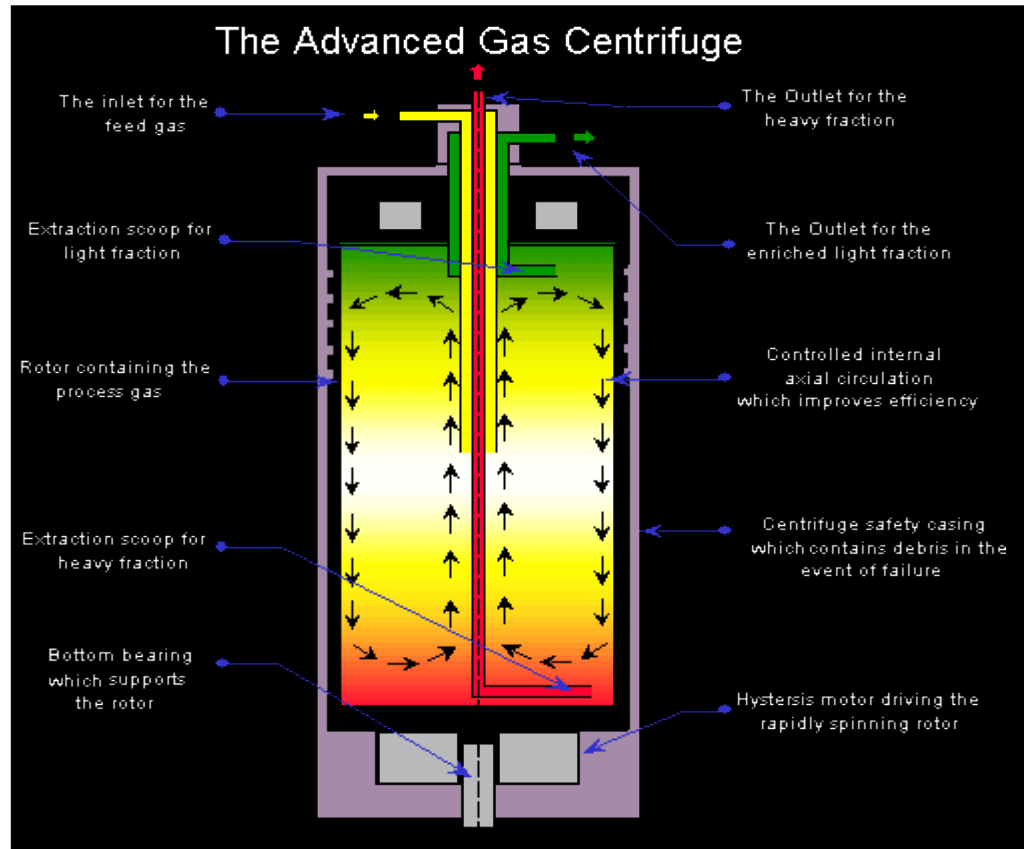
- Mètode basat en l'empleat per J.J. Thomson per a determinar la relació e/m de l'electró.
- Molt utilitzat a principis del s. XX, i va permetre determinar per primera vegada (Aston, 1920) els isòtops d'un mateix nucli i la seua abundància relativa.
- Els electrons/ions són lleugerament accelerats mitjançant una diferència de potencial (camp elèctric) longitudinal (eix z) \Rightarrow aconseguixen un velocitat u (no uniforme i desconeguda).
- Ara el feix creua un camp elèctric vertical (eix y), generat per un condensador de longitud l :



$$\vec{F} = F_y \vec{j} = q\vec{E} \Rightarrow F_y = qE \Rightarrow \frac{dp_y}{dt} = qE \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{q}{m}E \Rightarrow y = \frac{qE}{2m}t^2 = \frac{qE}{2m} \frac{l^2}{u^2}$$

- Posteriorment el feix creua una regió de longitud l (igual que la del condensador) amb un camp magnètic també vertical que actua sobre la velocitat u (sobre l'eix z).
 - La força de Lorentz produeix una acceleració centrípeta, dirigida segons la direcció horitzontal desplaçant les partícules sobre l'eix x : $\vec{F}_L = q\vec{u} \times \vec{B} = m \frac{u^2}{r} \vec{i} = ma_c \vec{i} \Rightarrow quB = ma_c$
 - La deflexió horitzontal deguda al camp magnètic serà: $x = \frac{1}{2}a_c t^2 = \frac{quB}{2m}t^2 = \frac{qBl^2}{2mu}$
- **"L'òrbita"** descrita en el pla transvers serà: $y = \frac{2E}{l^2 B^2} \frac{m}{q} x^2$ que és independent de la velocitat.
 - La paràbola permet obtindre el quocient massa/càrrega de l'electró/ió.
 - Distintes paràboles per als diferents isòtops que hi han en la mostra.
 - Les intensitats relatives de les distintes paràboles subministra la informació sobre l'abundància relativa dels diferents isòtops de la mostra (veure figures).

Separació d'isòtops



Hexafluorur d'urani (gas)

Per a ultra-centrifugar l'urani s'utilitza un recipient al buit que disposa d'un rotor al seu interior que gira molt ràpidament. El gas s'injecta al rotor, on és accelerat fins que abasta quasi la mateixa freqüència de rotació que el propi rotor. Així les molècules del gas pateixen les forces centrífugues de manera que les més pesades senten forces majors que les més lleugeres, i migraran cap a la paret del rotor. Ara s'extrau el gas de la centrifugadora per un conjunt de vàlvules d'extracció: la vàlvula d'extracció del gas pesat està ubicada a prop de la paret del rotor mentre que la vàlvula per al gas lleuger se situa en el centre del rotor.

Moment quadrupolar elèctric nuclear en eix de quantificació

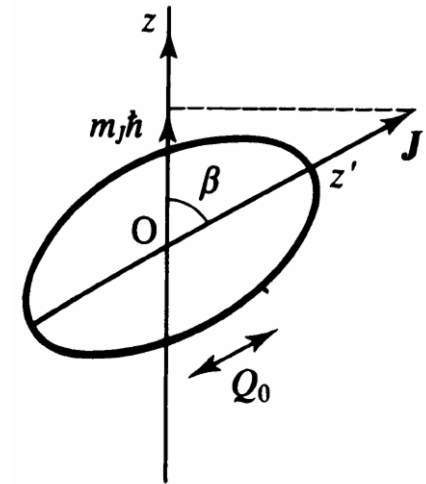
- L'eix de l'espín nuclear z' , que coincideix amb l'eix de simetria del nucli i que permet definir Q_0 no coincideix amb l'eix fix z en què es calcula el moment quadrupolar Q :

$$Q_0 = \frac{1}{e} \int (3z'^2 - r^2) \rho(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

$$Q = \frac{1}{e} \int (3z^2 - r^2) \rho(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

- β és l'angle entre els eixos z' i z
 \Rightarrow gir d'angle β entorn a l'eix y

$$\begin{cases} x = x' \cos \beta + z' \sin \beta \\ y = y' \\ z = -x' \sin \beta + z' \cos \beta \end{cases}$$



- Substituint (x, y, z) en l'expressió de Q i tenint en compte la simetria axial (entorn a l'eix z') s'obté:

$$\int (3z^2 - r^2) \rho dV = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \beta - 1) \int (3z'^2 - r^2) \rho dV \Rightarrow \boxed{Q = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \beta - 1) Q_0} \quad [Q \leq Q_0]$$

- Com z' és l'eix de l'espín, i z és una projecció, en la seua màxima component $M = J$ es tindrà $\cos \beta = J / \sqrt{J(J+1)}$

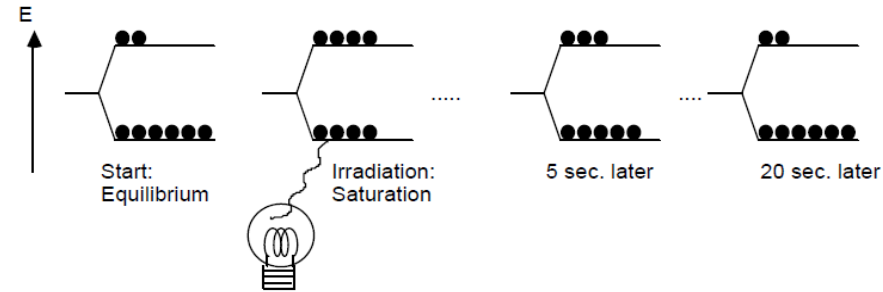
Exercici

Per consegüent: $Q = \frac{2J-1}{2(J+1)} Q_0$

$Q \neq 0$ tan sols si $J \geq 1$

RMN: processos de relaxació i desplaçament químic

- En apagar el camp de RF els nuclis que estan ocupant estats de major energia (espín i camp estàtic antiparal·lels) tendeixen a tornar als de menor energia (paral·lels).
- En tornar a l'equilibri tèrmic l'energia acumulada es transfereix a la xarxa molecular.
 - Els fotons emesos, de freqüència ω_L , indueixen un xicotet senyal de RF en una antena (la mateixa que la utilitzada per a generar el camp de RF).
 - El senyal RMN es deu a la precessió de l'espín entorn de l'eix z
 - Lleuger calfament de la mostra (com en el micro-ones...)
- La intensitat del senyal és proporcional a la **densitat d'isòtops blanc** i decreix exponencialment amb les següents constants temporals:
 - **Temps de relaxació longitudinal o d'espín-xarxa T_1** , que varia entre mili-segons i segons, a causa de la 'relaxació' dels estats de major a menor energia.
 - **Temps de relaxació transversal o d'espín-espín T_2** , que varia entre un i diversos mili-segons, i depén del grau de coherència de precessió de nuclis idèntics veïns (inhomogeneïtats de B_z o apantallament resulten en valors de ω_L lleugerament distints).
- Desplaçament químic o apantallament nuclear (\approx ppm).
 - El camp magnètic efectiu 'vist' pel nucli és menor que l'aplicat, a causa de l'apantallament produït pel camp magnètic induït pels orbitals electrònics.
 - La freqüència de Larmor depén del camp magnètic, el nucli (espín i factor giro-magnètic) i el seu entorn químic \Rightarrow permet de realitzar anàlisi estructural, químic, biològic, de substàncies.



$$\langle J_z \rangle$$

$$\langle J_x \rangle, \langle J_y \rangle$$

RMN: tècniques i aplicacions

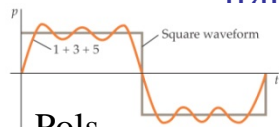
■ Ona contínua (CW-NMR)

- Agranat seqüencial de freqüències, generalment fixant la RF i variant B_0 .
- Tècnica original (Bloch i Purcell, 1946).
- Sols es poden activar xicotetes mostres.

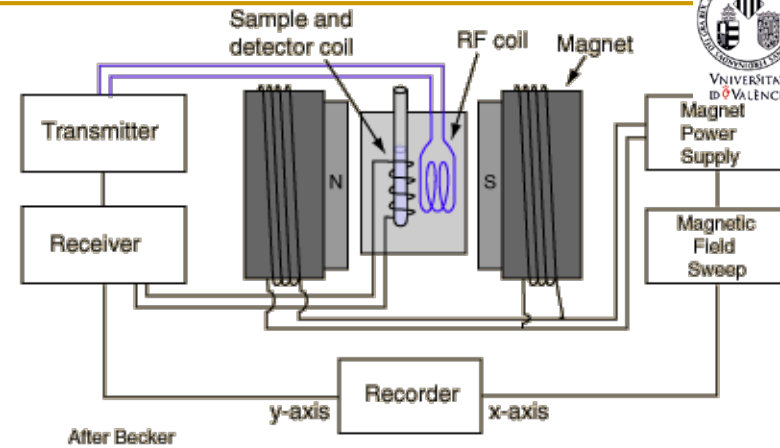
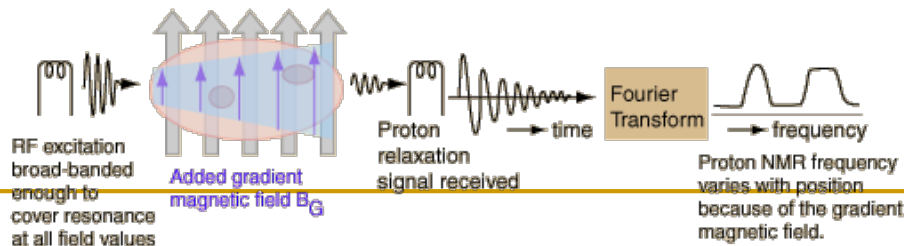
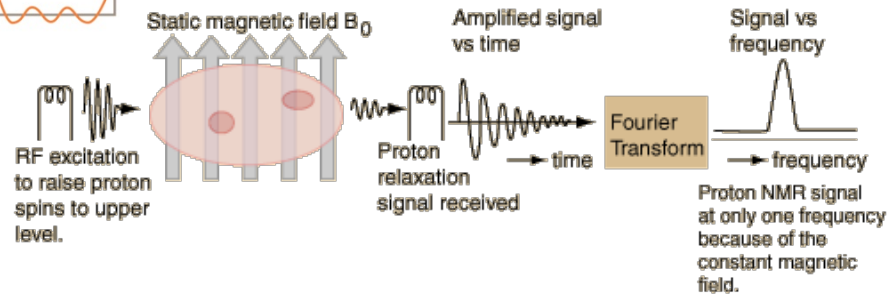
■ Transformada de Fourier (FT-NMR)

- Es generen polsos quadrats de RF, i la intensitat dels senyals induïts es mesura en funció del temps (*free induction decay, FID*).
- Els senyals es converteixen de l'espai temporal al de freqüències per mitjà d'una transformada de Fourier:

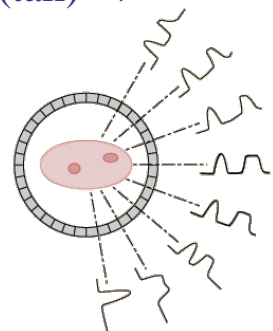
$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$



Pols
10 ~ μ s

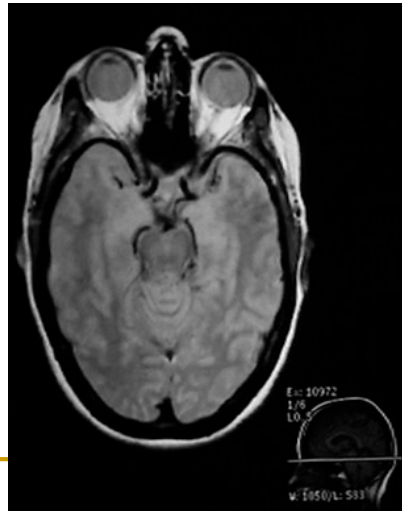
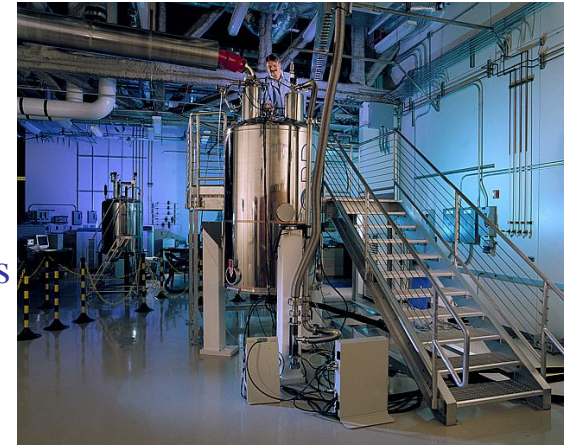


- Posicionament lineal del nucli emissor \Rightarrow gradient de camp: $\vec{B}_0 = B_0 z \vec{k}$
- Posicionament en el pla (tall) \Rightarrow gradient de camp rotatori:



- Imatge 3D a partir de projeccions (tècniques de CT \rightarrow tomografia computaritzada).

- El gradient de camp magnètic es genera amb un imant superconductor mantingut amb heli o nitrogen líquid a 4 K.
- Mesures de precisió de factors giro-magnètics.
- Computació quàntica.
- Espectroscòpia:
 - Una de les principals tècniques per a l'obtenció d'informació física, química, electrònica i estructural de molècules complexes
 - Única tècnica per a obtenir informació estructural 3D de molècules biològiques en solució.
 - En l'estat sòlid.
- Imatgeria o tomografia mèdica (MRI)
 - Principalment basada en NMR de protons (^1H ~80% del cos humà, més abundant en la greix que en líquids i teixits biològics). També s'usa ^{13}C (1.11% del C natural), ^{14}N (99.6% del N natural), ^{17}O (0.038% del O natural), ^{31}P (100% natural. Les mostres orgàniques són sovint enriquides en ^{13}C y ^{17}O (doncs els isòtop dominants ^{12}C y ^{16}O , tenen espín 0).
 - Gran variabilitat dels temps de relaxació per a distints tipus de teixits.



Moments dipolars magnètics en model de partícula independent

- El model de partícula independent prediu que el moment dipolar magnètic d'un nucli amb A imparell es deu exclusivament al del nucleó desaparellat, doncs els demés s'acoblen a $J=0^+$.
- Moment magnètic d'un nucleó amb contribució de l'espín i orbital és:

$$\vec{\mu} = (g^{(l)}\vec{l} + g^{(s)}\vec{s})\frac{\mu_N}{\hbar}$$

$$\vec{\mu}_j = g_j \frac{\mu_N}{\hbar} \vec{j}$$

g_j : factor giro-magnètic nuclear

Per definició sobre la màxima projecció

Prenent com a eix z el de la direcció del camp magnètic:

$$\mu_{sp} = \langle j, m = j | \mu_z | j, m = j \rangle = \langle j, m = j | g^{(l)}l_z + g^{(s)}s_z | j, m = j \rangle \frac{\mu_N}{\hbar}$$

Com m_l , m_s **no són bons números quàntics** a causa de l'acoblament del moment angular orbital i de l'espín, fem ús del **teorema de Landé**:

Exercici

$$\langle j, m | V_z | j, m \rangle = \frac{1}{j(j+1)\hbar^2} \langle j, m | (\vec{V} \cdot \vec{j}) j_z | j, m \rangle$$

Per teorema de Landé

En el nostre cas:

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s} \Rightarrow \begin{cases} \vec{j} \cdot \vec{s} = \frac{1}{2}(\vec{j}^2 + \vec{s}^2 - \vec{l}^2) \\ \vec{j} \cdot \vec{l} = \frac{1}{2}(\vec{j}^2 + \vec{l}^2 - \vec{s}^2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \langle j, m; l, s | g^{(l)}l_z + g^{(s)}s_z | j, m; l, s \rangle &= \\ &= \frac{m\hbar}{j(j+1)\hbar^2} \langle j, m; l, s | g^{(l)}\vec{l} \cdot \vec{j} + g^{(s)}\vec{s} \cdot \vec{j} | j, m; l, s \rangle = \\ &= \frac{m\hbar}{2} \left[g^{(l)} + g^{(s)} + (g^{(l)} - g^{(s)}) \frac{l(l+1) - s(s+1)}{j(j+1)} \right] \end{aligned}$$

- El factor giromagnètic nuclear predit pel model serà per tant:

$$g_j = \frac{1}{2} \left[g^{(l)} + g^{(s)} + (g^{(l)} - g^{(s)}) \frac{l(l+1) - s(s+1)}{j(j+1)} \right]$$

$$g_p^{(s)} = 5.59 \quad g_p^{(l)} = 1$$

$$g_n^{(s)} = -3.83 \quad g_n^{(l)} = 0$$

i el moment magnètic dipolar del nucleó desaparellat i per tant d'estos nuclis, serà:

$$\mu_{\text{sp}} = j g_j \mu_N = \frac{1}{2} \left[(g^{(l)} + g^{(s)}) j + (g^{(l)} - g^{(s)}) \frac{l(l+1) - s(s+1)}{j+1} \right] \mu_N$$

- Per a $j = l + \frac{1}{2}$

$$\mu_{\text{sp}} = \left[g^{(l)} \left(j - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} g^{(s)} \right] \mu_N$$

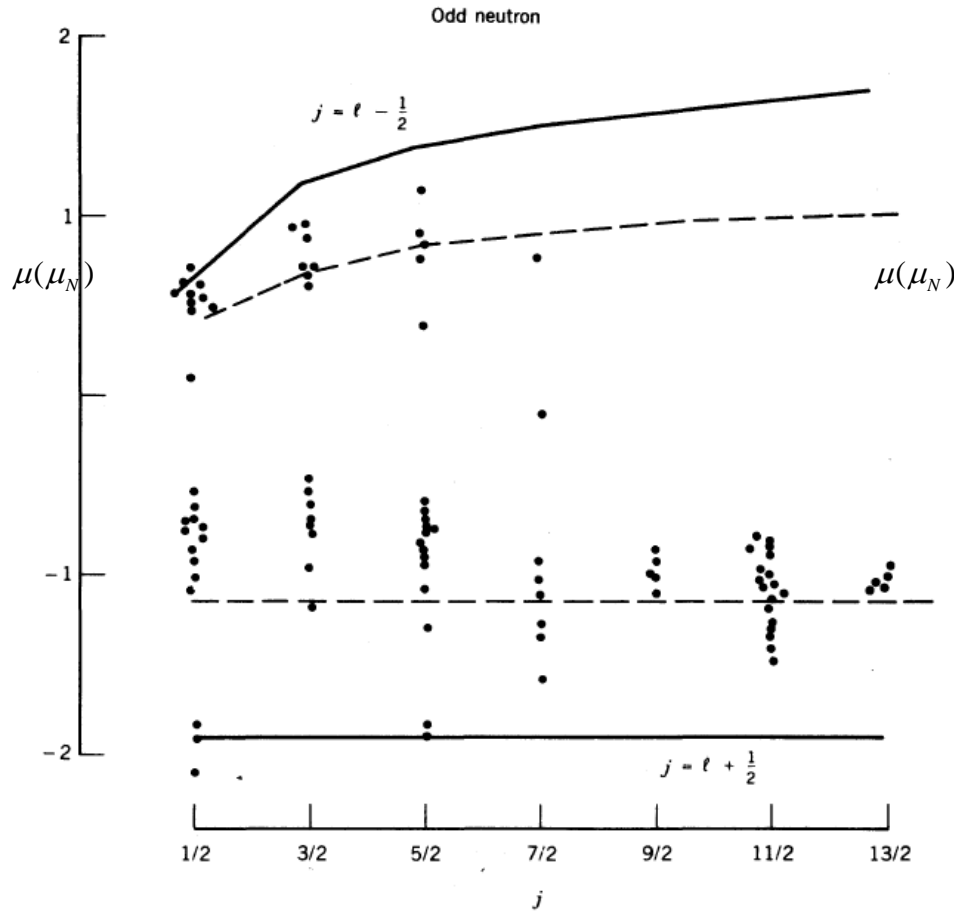
- Per a $j = l - \frac{1}{2}$

$$\mu_{\text{sp}} = \left[g^{(l)} \frac{j(j + \frac{3}{2})}{j+1} - g^{(s)} \frac{j}{2(j+1)} \right] \mu_N$$

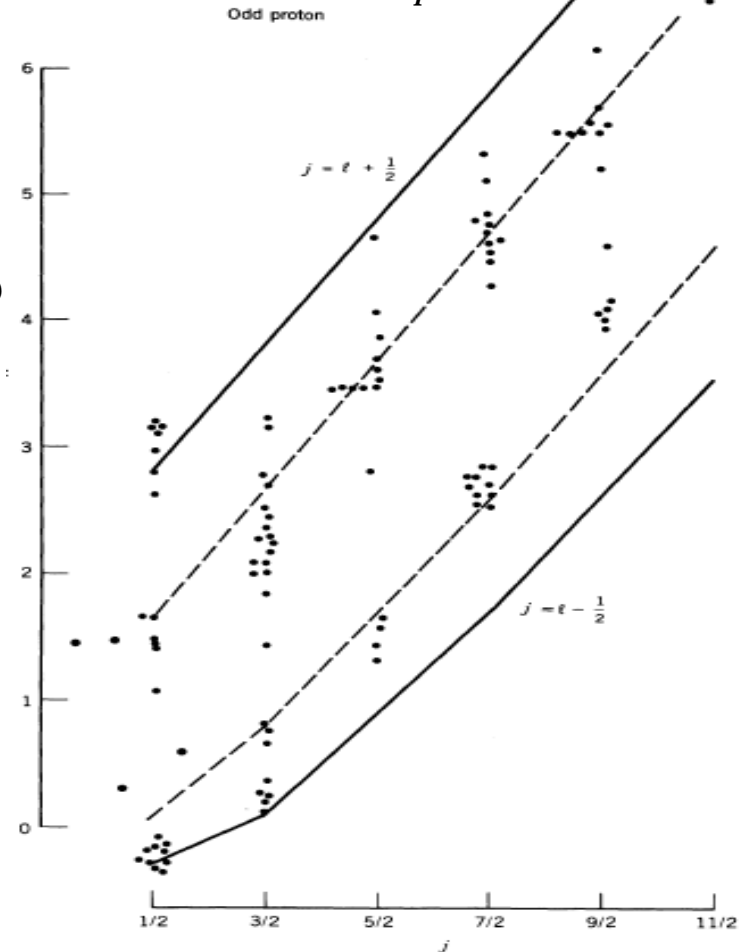
Línies de Schmidt
(veure figura següent)

- Substituint els valor dels factors giromagnètics del protó i el neutró trobem les línies de les figures següents:

Moments magnètics i línies de Schmidt per a nuclis amb N imparell



Moments magnètics i línies de Schmidt per a nuclis amb Z imparell



- Valors experimentals pròxims a les línies de Schmidt, però les diferències són sistemàtiques
 - La tendència sistemàtica és consistent amb el canvi general $g^{(s)} \rightarrow 0.6g^{(s)}$
 - Apantallament pel núvol de pions de Yukawa, aproximació de partícula independent.
- Per a nuclis lleugers l'acord entre model i experiment és prou satisfactori.

Moments quadrupolars elèctrics en model del partícula indep.

- El moment quadrupolar Q en el model de partícula independent ve determinat pel valor esperat de l'operador Y_{20} per a un estat $|j, m; l, s\rangle$ la funció d'ona del qual és la superposició:

$$|jm; ls\rangle = \sum_{\substack{m_l + m_s = m \\ m_s = \pm 1/2}} C(ls j | m_l, m_s, m) |l; m_l\rangle |s; m_s\rangle \Rightarrow$$

$$\psi_{nljm}(\vec{r}) = R_{nl}(r) \left[C(l \frac{1}{2} j | m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, m) Y_{l, m - \frac{1}{2}}(\theta, \phi) \chi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + C(l \frac{1}{2} j | m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, m) Y_{l, m + \frac{1}{2}}(\theta, \phi) \chi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \right]$$

El valor esperat que cal calcular és: $\langle jm; ls | \sqrt{\frac{16\pi}{5}} r^2 Y_{20} | jm; ls \rangle = \frac{j(j+1) - 3m^2}{2j(j+1)} \langle r^2 \rangle$

Per tant:

$$Q = Z \langle j, m = j; l, s | \sqrt{\frac{16\pi}{5}} r^2 Y_{20} | j, m = j; l, s \rangle = -\frac{2j-1}{2(j+1)} Z \langle r^2 \rangle \quad \text{Exercici}$$

- Per a un **protó desaparellat**: $Q_{sp} = -\frac{2j-1}{2(j+1)} \langle r^2 \rangle$ Q_{sp} i Q_{sn} representen els moments quadrupolars dels nuclis amb un protó (s_p) o neutró (s_n) desaparellat

Com $\langle r^2 \rangle \propto \frac{3}{5} R^2 \Rightarrow Q_{sp} \propto A^{-2/3}$ i es prediuen valors entre 0.015 b ($A = 10$) i 0.5 b ($A = 220$)

El signe del moment quadrupolar és correcte, però els valors són 2 o 3 vegades inferiors

- Per a un **neutró desaparellat** caldria esperar $Q = 0$, ja que el neutró no té càrrega ($Z = 0$)

Experimentalment no són nuls, però molt més xicotets que per a $sp \Rightarrow$ el moment quadrupolar és a causa del moviment dels Z protons, trobant-se

$$Q_{sn} \approx \frac{Z}{A^2} Q_{sp}$$

Es té $Q_{sn} \propto A^{-1/3}$ i es prediuen valors entre 10^{-2} i 10^{-4} barns. **Veure la següent taula**

Estat	Q calculat (b) (p desaparellat)	Q mesurat (b) (p desaparellat)	Q mesurat (b) (n desaparellat)
$1p_{3/2}$	-0.013	-0.0366 ${}^7_3\text{Li}_4$	
$1d_{5/2}$	-0.036	-0.12 ${}^{19}_9\text{F}_{10}$	-0.026 ${}^{17}_8\text{O}_9$
$1d_{3/2}$	-0.037	-0.0825 ${}^{35}_{17}\text{Cl}_{18}$	-0.064 ${}^{33}_{16}\text{S}_{17}$
$1f_{7/2}$	-0.071	-0.26 ${}^{43}_{21}\text{Sc}_{22}$	-0.080 ${}^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$
$2p_{3/2}$	-0.055	-0.209 ${}^{63}_{29}\text{Cu}_{34}$	-0.0285 ${}^{53}_{24}\text{Cr}_{29}$
$1f_{5/2}$	-0.086		-0.20 ${}^{61}_{28}\text{Ni}^*_{33}$
$1g_{9/2}$	-0.13	-0.32 ${}^{93}_{41}\text{Nb}_{52}$	-0.17 ${}^{73}_{32}\text{Ge}_{41}$
$1g_{7/2}$	-0.14	-0.49 ${}^{123}_{51}\text{Sb}_{72}$	
$2d_{5/2}$	-0.12	-0.36 ${}^{121}_{51}\text{Sb}_{70}$	-0.236 ${}^{91}_{40}\text{Zr}_{51}$

Les unitats
són barns

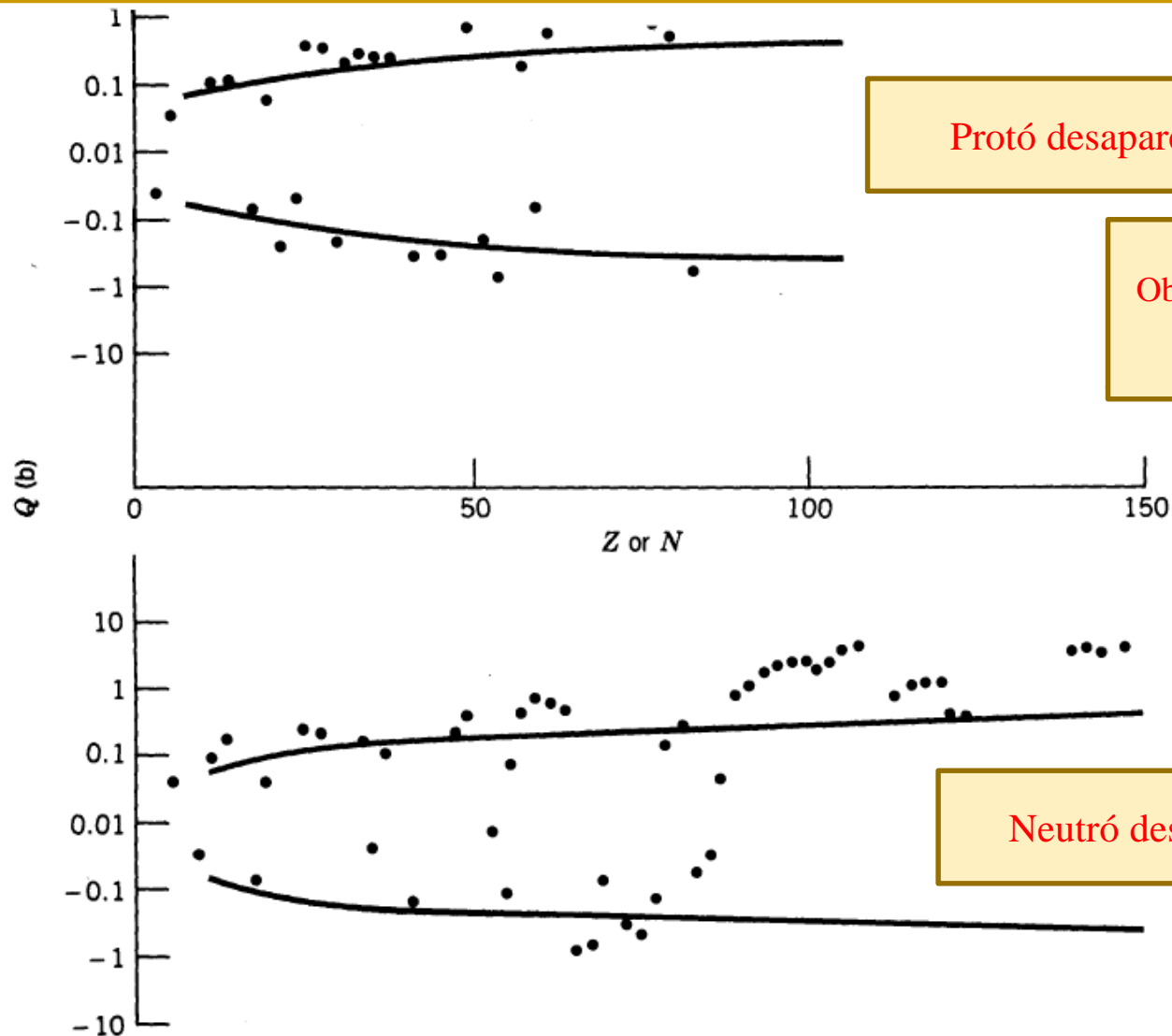
Moments quadrupolars per a s_p i s_n en el mateix estat d'ona del model extrem

- En capes no tancades amb més d'un nucleó ($n = 1, \dots, 2j$) es poden sumar les contribucions de cada nucleó

$$Q = Q_{sp} \left(1 - 2 \frac{n-1}{2j-1} \right)$$

- Si $n = 1 \Rightarrow Q = Q_{sp}$
- Si $n = 2j$ (\rightarrow hi ha un buit en la capa) : $Q = -Q_{sp}$

- El model és parcialment satisfactori.



Moments quadrupolars experimentals per a nuclis amb Z o N imparells. Les línies contínues indiquen els límits $Q \sim \langle r^2 \rangle$ que s'esperen en el model de capes. Per a les regions $60 < Z < 80$, $Z > 90$, $90 < N < 120$, $N > 140$ els valors experimentals són més d'un ordre de magnitud majors que els predits pel model de capes.

Tema 7:

Desintegració nuclear

1. Desintegració α . Regla de Geiger-Nuttal

- 1.1 Teoria de la desintegració α . Probabilitat de transmissió
- 1.2 Emissió d'altres partícules pesades o nuclis
- 1.3 Regles de selecció: moment angular i paritat
- 1.4 Emissió d'altres partícules pesades o nuclis

2. Desintegració β

- 2.1 La hipòtesi del neutrí
- 2.2 Teoria de Fermi
- 2.3 Densitat d'estats finals
- 2.4 Forma estadística de l'espectre β
- 2.5 Diagrama o *plot* de Curie
- 2.6 Massa del neutrí
- 2.7 Semivides comparatives
- 2.8 Processos de CE (captura electrònica)
- 2.9 Sistemàtica dels valor de *ft*
- 2.10 Regles de selecció: moment angular i paritat: transicions permeses, transicions prohibides
- 2.11 L'experiment de Reines i Cowan



3. Desintegració γ

- 3.1 Estimadors de Weiskopf
- 3.2 Regles de selecció
- 3.3 Desintegració per CI (conversió interna)

1. Desintegració α

- **Masses i energia d'enllaç:** $M(^4\text{He}) = 3728.433 \text{ MeV}/c^2$ $m_\alpha = 3727.378 \text{ MeV}/c^2$ $B_\alpha = 28.3 \text{ MeV}$
- La fórmula semi-empírica de la massa prediu raonablement bé la relació entre Q_α i A

$$Q_\alpha = M\left({}^A_Z X\right) - M\left({}^{A-4}_{Z-2} Y\right) - M\left({}^4_2 \text{He}\right) = T_\alpha \left[1 + m_\alpha / M_n(Y)\right] \leftarrow$$

$$= B_\alpha + B\left({}^{A-4}_{Z-2} Y\right) - B\left({}^A_Z X\right)$$

Energia del nucli de retrocés

$$= 28.3 - 4a_v + \frac{8}{3}a_s A^{-1/3} + 4a_c Z A^{-1/3} \left(1 - \frac{Z}{3A}\right) - 4a_{\text{sim}} \left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^2 + 3a_p A^{-3/4}$$

Isòtop	Q_{teo} (MeV)	Q_{exp} (MeV)
^{220}Th	7.77	8.95
^{226}Th	6.75	6.45
^{232}Th	5.71	4.08

Exercici. Per a $A \gg 4$, obtindre el nucli més estable (Z_{max}). A continuació, demostreu que la desintegració α és energèticament possible per a $A > 152$.

- L'enorme energia de lligadura de la partícula α en la zona dels nuclis lleugers fa que siga sovint l'única desintegració energèticament possible:
 - Exemple 1: desintegració $^{232}\text{U} \rightarrow X' + y$

Partícula	n	^1H	^2H	^3He	^4He	^5He	^6He	^6Li	^7Li	^8Be	^{12}C
Q	-7.26	-6.12	-10.70	-9.92	+5.41	-2.59	-6.19	-3.79	-1.94	10.8	24.0

- Exemple 2: desintegració del ^{228}Th : $Q(^{228}\text{Th} \rightarrow ^{224}\text{Ra} + \alpha) = +5.5$

$$Q(^{228}\text{Th} \rightarrow ^{227}\text{Ac} + p) = -6.4$$

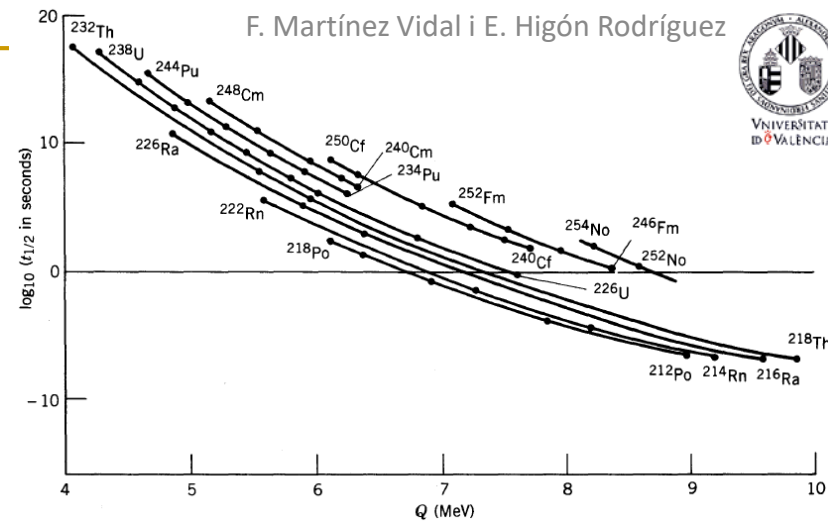
- És també possible l'emissió de “clusters” de partícules α , és a dir, nuclis de ^8Be , ^{12}C ,...
 - Són processos amb vides mitges molt grans, a pesar del guany en energia.

Regla de Geiger-Nuttall

- Geiger i Nuttall van observar en 1911 (estudiant l'abast de partícules α en sèries naturals) que els emissors α amb Q_α (i per tant T_α) elevats presenten vides mitges molt curtes i viceversa:

^{232}Th	$Q_\alpha = 4.08 \text{ MeV}$	$T_{1/2} = 1.4 \times 10^{10} \text{ años}$
^{218}Th	$Q_\alpha = 9.85 \text{ MeV}$	$T_{1/2} = 1.0 \times 10^{-7} \text{ s}$
	Factor ~ 2	

$\text{Factor} \approx 10^{-24}$



Relació entre el log de la semivida i l'energia de la desintegració α , per a nuclis par-par. Les línies connecten isòtops amb el mateix Z

- Un factor 2 en Q origina un factor 10^{24} en la semivida...
- Per al cas de nuclis parell-parell hi ha una relació ben definida:

Llei empírica de Geiger i Nuttall

$$\log_{10} T_{1/2} = C + \frac{D}{\sqrt{T_\alpha}}$$

- Hi ha una important dispersió en este comportament si es consideren tots els nuclis
- Esta dispersió s'elimina si es connecten isòtops amb el mateix Z (per a A parell) \rightarrow figura $\Rightarrow C, D$ depenen de la sèrie isotòpica, per a A parell.
- Per a nuclis parell-imparell, imparell-parell i imparell-imparell la tendència és semblant però els seus períodes són 2-1000 vegades majors.
- A més, l'energia alliberada Q presenta una forma sistemàtica **amb A per a diferents isòtops** d'un mateix element (a més s'observa l'estructura de capes en les energies de desintegració de les α).
- L'explicació de la regla de Geiger-Nuttall en 1928 va ser un dels primers grans triomfs de la MQ.

Teoria de la desintegració α . Probabilitat de transmissió

- Desenrotllada en 1928 per Gamow i per Condon i Gurney independentment.
- És un problema mecano-quàntic de penetració de barrera de potencial (per efecte túnel).
- Hipòtesi del model:
 - La partícula α té una probabilitat p_α de pre-formar-se dins del nucli pare (~ 0.1).
 - Una vegada formada, es mou en un **pou nuclear esfèric** de radi $a \approx r_0 A^{1/3}$, $r_0 \approx 1.2$ fm
 - L'emissió α té lloc per mitjà de la penetració de la barrera de potencial originada per la interacció coulombiana:

$\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$ és la constant d'estructura fina

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZ'e^2}{r} = \frac{zZ'\alpha\hbar c}{r} \approx \frac{2.88 Z'}{r[\text{fm}]} [\text{MeV}] \quad \left\{ \begin{array}{l} z: \text{càrrega de la partícula } \alpha \\ Z' = Z - z: \text{càrrega del nucli fill} \end{array} \right.$$

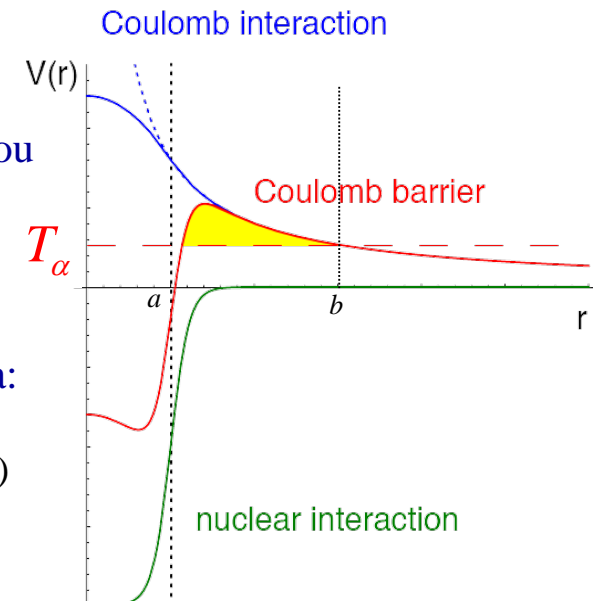
- Altura màxima de la barrera: $B = V(a)$
- Exemple de nucli típic: $B(^{238}\text{Pu}) \approx 35.6$ MeV
- Com $B_\alpha = 28.3$ MeV \Rightarrow la partícula α ocupa $T_\alpha > 0$ en el pou
- L'energia d'eixida de la partícula α és: $T_\alpha = V(b) < B$
- La constant de desintegració d'un emissor α vindrà dada per:

$$\lambda = p_\alpha f P$$

- f : freqüència amb què la partícula α s'enfronta a la barrera:

$$f \approx \frac{v_\alpha}{2a} \approx \frac{\sqrt{2T_\alpha / m_\alpha c^2}}{2a} c \approx 10^{21} \text{ s}^{-1} \text{ per al } ^{238}\text{Pu} \text{ (amb } T_\alpha \approx 5.5 \text{ MeV)}$$

- P : probabilitat de transmissió de la α a través de la barrera.



- El coeficient de transmissió d'una partícula d'energia T_α a través d'una barrera quadrada de potencial d'altura $B > T_\alpha$ i amplària d és:

$$[\hbar k = p = \sqrt{2\mu T}]$$

$$P = \left[1 + \frac{B^2}{4T(B-T)} \sinh^2 k_2 d \right]^{-1}$$

$$k_2 = \sqrt{2\mu(B-T)} / \hbar$$

$$\mu = \frac{m_\alpha M_n(Y)}{m_\alpha + M_n(Y)} \approx m_\alpha$$

- Exemple numèric: ^{238}Pu

$$B \approx 35.6 \text{ MeV } B > T$$

$$T_\alpha \approx 5.5 \text{ MeV}$$

$$a \approx r_0 A^{1/3} \approx 7.5 \text{ fm}$$

$$b \approx 2.88Z'/T_\alpha \approx 48.2 \text{ fm}$$

$$\left. \begin{aligned} k_2 &\approx \sqrt{2m_\alpha c^2 (B - T_\alpha)} / \hbar c \approx 2.4 \text{ fm}^{-1} \\ d &= (b - a) / 2 \approx 20 \text{ fm} \end{aligned} \right\} \Rightarrow k_2 d \gg 1 \Rightarrow \sinh^2(k_2 d) \approx e^{2k_2 d} / 4$$

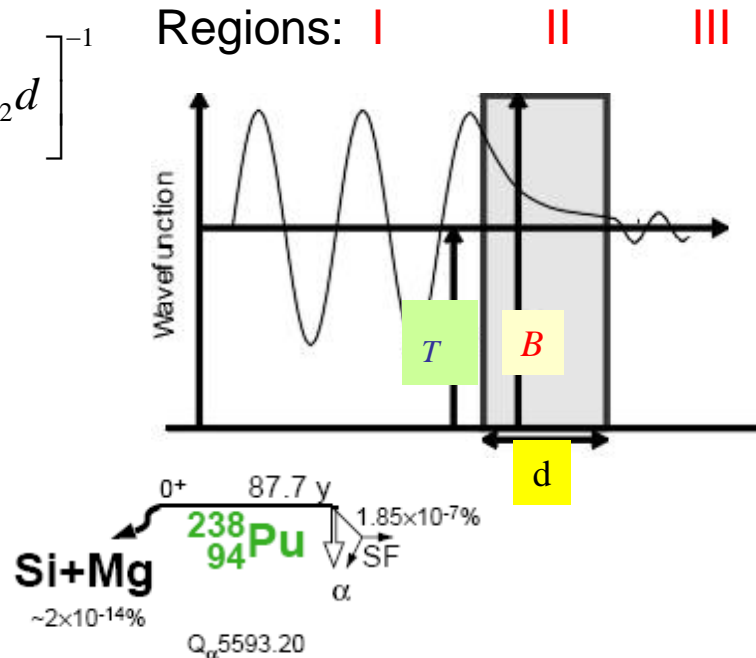
Com el coeficient que multiplica el sinus és d'orde unitat, podem escriure: $P \approx e^{-2k_2 d}$

- Amb esta aproximació tan basta, que reproduïx la tendència, s'obtenen resultats acceptables:

$$\begin{aligned} T_\alpha \approx 6 \text{ MeV} &\rightarrow P \approx 2 \times 10^{-25} \rightarrow \lambda \approx 10^{-3} \text{ s} \rightarrow T_{1/2} \approx 700 \text{ s} \\ T_\alpha \approx 5 \text{ MeV} &\rightarrow P \approx 6 \times 10^{-30} \rightarrow \lambda \approx 10^{-8} \text{ s} \rightarrow T_{1/2} \approx 10^8 \text{ s} \end{aligned}$$

Exercici. Amb $Z=90$, $a=7,5 \text{ fm}$ i $B=34 \text{ MeV}$ reproduir els valors de les semivides.

- S'aconsegueix explicar la gran variació de $T_{1/2}$ en variar T_α (ó Q_α) tan sols en 1 MeV.



- El càlcul per a una barrera realista (potencial coulombià) requereix avaluar la integral:

$$P = e^{-2G} \quad G = \frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar} \int_a^b dr \sqrt{V(r) - T_\alpha} \quad \text{Factor de Gamow} \quad V(r) = \frac{zZ'\alpha\hbar c}{r}$$

- Dos possibles procediments per a realitzar la integració:

- Mètode WKB.
- Mètode de diferències finites.

- La probabilitat de transmissió a través d'una barrera infinitesimal d'amplària dr i altura $V(r)$ serà:

$$dP = \exp \left\{ -2dr \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2} [V(r) - T_\alpha]} \right\}$$

- La probabilitat de penetrar la barrera generada pel potencial de Coulomb s'obté integrant:

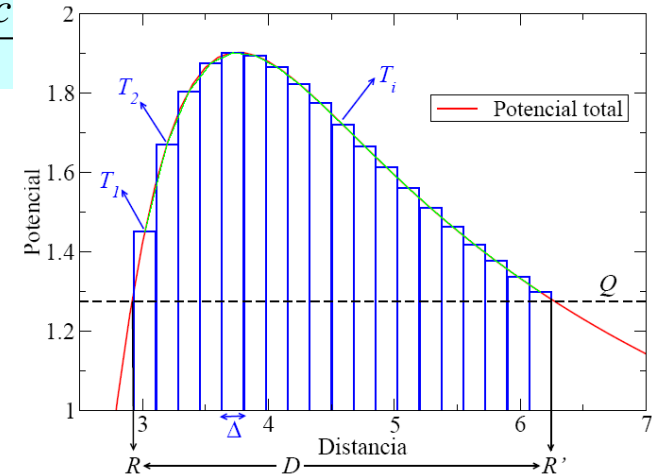
- Límits d'integració: $V(a) = B \Rightarrow a = \frac{zZ'\alpha\hbar c}{B}$ $V(b) = T_\alpha \Rightarrow b = \frac{zZ'\alpha\hbar c}{T_\alpha}$
- Canvi de variable: $x = \frac{r}{b} = \frac{T_\alpha}{zZ'\alpha\hbar c} r$ $\rightarrow V(r) = \frac{\alpha\hbar c z Z'}{b x} = \frac{T_\alpha}{x}$

- Resulta: $G = \sqrt{\frac{2\mu T_\alpha}{\hbar^2}} \frac{zZ'\alpha\hbar c}{T_\alpha} \int_{a/b}^1 dx \sqrt{\frac{1}{x} - 1} = zZ'\alpha \sqrt{\frac{2\mu c^2}{T_\alpha}} \left[\sqrt{x(1-x)} - \arccos \sqrt{x} \right]_{a/b}^1$

$$G = zZ'\alpha \sqrt{\frac{2\mu c^2}{T_\alpha}} \left[\arccos \sqrt{y} - \sqrt{y(1-y)} \right]$$

$$y = \frac{a}{b} \equiv \frac{T_\alpha}{B}$$

- Com $y \ll 1$: $\arccos(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\pi}{2} - \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!} \dots \Rightarrow G \approx zZ'\alpha \sqrt{\frac{2\mu c^2}{T_\alpha}} \left[\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{T_\alpha}{B}} \right]$



- Com $\lambda = p_\alpha f P$ i utilitzant per a la freqüència de xoc contra la barrera s'obté per a la semivida:

$$f \approx \frac{v_\alpha}{2a} \approx \frac{\sqrt{2T_\alpha / m_\alpha} c}{2a}$$

$$T_{1/2} = \ln 2 / \lambda \Rightarrow T_{1/2} = (\ln 2) \frac{1}{c} \frac{a}{p_\alpha} \sqrt{\frac{2\mu c^2}{T_\alpha}} \exp \left\{ 2 z Z' \alpha \sqrt{\frac{2\mu c^2}{T_\alpha}} \left[\frac{\pi}{2} - 2 \sqrt{\frac{T_\alpha}{B}} \right] \right\}$$

- El seu logaritme és:

$$\ln T_{1/2} = C_1 + \frac{D_1}{\sqrt{T_\alpha}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \ln \left(\frac{1}{c} \ln 2 \frac{a}{p_\alpha} \sqrt{2\mu c^2} \right) - \ln \sqrt{T_\alpha} - 4 z Z' \alpha \sqrt{2\mu c^2 / B}, B \approx \frac{z Z' \alpha \hbar c}{r_0 A^{1/3}} \\ D_1 = \pi z Z' \alpha \sqrt{2\mu c^2} \end{array} \right.$$

$$\log_{10} T_{1/2} = C + \frac{D}{\sqrt{T_\alpha}}$$

on s'ha fet : $C = C_1 \log_{10} e$; $D = D_1 \log_{10} e$

que és la llei de Geiger-Nuttall

- Les prediccions reproduïen la tendència general de les vides mitjanes però difereixen en 1-2 ordres de magnitud en valors que varien en més de 20 ordres de magnitud.

²³² Th		$T_{1/2}$ (s)	
A	Q (MeV)	Mesurat	Calculat
220	8.95	10 ⁻⁵	3.3×10 ⁻⁷
222	8.13	2.8×10 ⁻³	6.3×10 ⁻⁵
224	7.31	1.04	3.3×10 ⁻²
226	6.45	1.85×10 ³	6.0×10 ¹
228	5.52	6.0×10 ⁷	2.4×10 ⁶
230	4.77	2.5×10 ¹²	1.0×10 ¹¹
232	4.08	4.4×10 ¹⁷	2.6×10 ¹⁶

- Les discrepàncies són importants però no sorprenents donades les aproximacions realitzades en efectuar el càlcul, en què només hem considerat el potencial coulombià:
 - No s'han tingut en compte les funcions d'onda nuclears, ψ_i i ψ_f
 - No s'ha considerat el moment angular de la partícula α , que dóna lloc en el potencial a una barrera centrífuga (Eq. de Schrödinger: partícula α en pou de potencial esfèric):

$$V(r) = \frac{zZ'\alpha\hbar c}{r} + \frac{L(L+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \quad \leftarrow$$

La barrera de potencial centrífug dificulta la penetració de la partícula α quan esta és emesa amb moment angular L

- El càlcul del factor de Gamow es realitza de manera idèntic al cas $L = 0 \Rightarrow$ la integral ha de ser avaluada numèricament.
- La barrera centrífuga disminueix la probabilitat de penetració de la barrera.
- Exemple: per a $L = 1$ pot augmentar $T_{1/2}$ en un 50%, però per a $L = 6$ ho pot augmentar en un factor 10^3
- S'ha suposat que el nucli és esfèric ($R \approx 1.2 A^{1/3}$). Però sabem que els nuclis amb $A \geq 230$ (on més abunden els processos α) estan fortament deformats:
 - Un xicotet canvi en R ($R = 1.2 A^{1/3}$, 4%) provoca una variació de $T_{1/2}$ d'un factor 5.
 \Rightarrow A partir de $T_{1/2}$ es poden calcular radis nuclears.
- Encara que esta teoria simplificada no és estrictament correcta, proporciona una bona estimació de la sistemàtica de les vides mitges de la desintegració α .
- Un càlcul complet requereix l'ús de la regla daurada de Fermi, així com la utilització de tots els ingredients indicats anteriorment i aproximats bastament en el model de Gamow.

Regles de selecció: moment angular i paritat

- “L’espín nuclear” o moment angular total sempre es conserven, i com la desintegració α és un procés fort i electromagnètic, la paritat també es conserva:
- L’espín de la partícula α és $J^P = 0^+ \Rightarrow$
Per tant en el procés de desintegració α es compleix:

$$\vec{J}_i = \vec{J}_f + \vec{L}_\alpha \Rightarrow |J_i - J_f| \leq L_\alpha \leq J_i + J_f$$

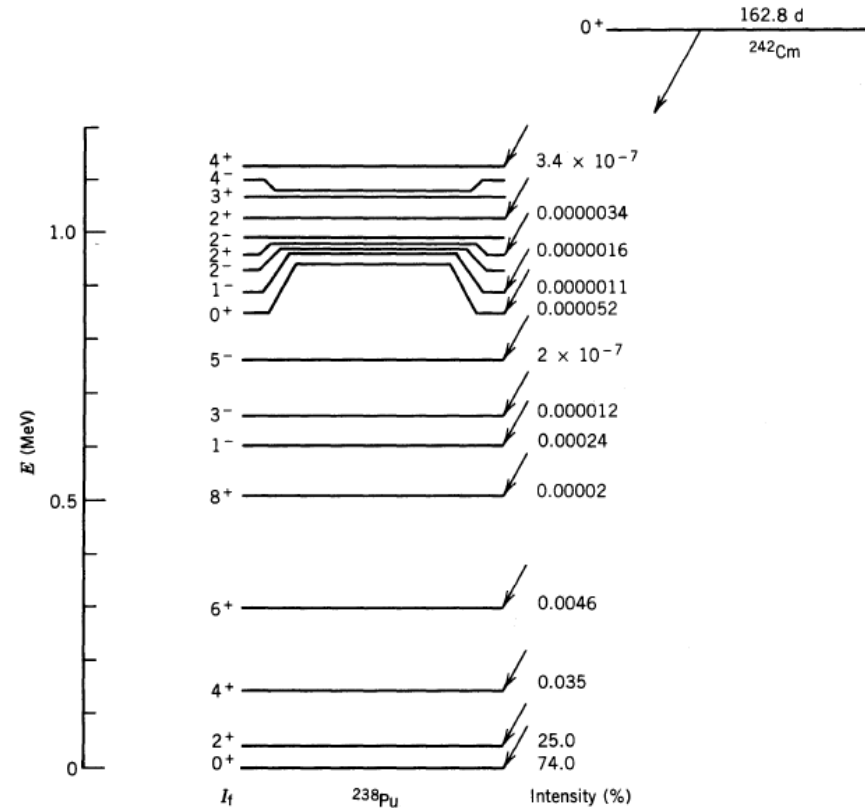
$$P_f = P_i \times (-1)^{L_\alpha}$$

- Si el nucli inicial té espín $J^P = 0^+$ (nuclis parell-parell) només s’observaran les transicions:

$$0^+ \rightarrow 0^+, 1^-, 2^+, 3^-, 4^+, \dots$$

Possibles estats del nucli fill

- Les intensitats de les transicions als diferents estats excitats disminueixen:
 - en anar augmentant l’altura de la barrera centrífuga (en augmentar L_α).
 - en anar disminuint l’energia de la partícula α en incrementar-se l’energia d’excitació del nucli residual.



Observeu les transicions prohibides als estats 2^- i 3^+ i justifiqueu-ho

Emissió d'altres partícules pesades o nuclis

- La teoria de la desintegració α permet interpretar la possibilitat d'altres tipus de desintegracions a nuclis més pesats

- Experimentalment s'ha observat en alguns casos:

$$\left. \begin{array}{ll} {}^{223}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{219}_{86}\text{Rn} + \alpha & Q = 5.98 \text{ MeV} \quad T_{1/2}^{\text{exp}} = 9.8 \times 10^5 \text{ s} \\ {}^{223}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{209}_{82}\text{Pb} + {}^{14}_6\text{C} & Q = 31.8 \text{ MeV} \quad T_{1/2}^{\text{exp}} = 8.5 \times 10^{14} \text{ s} \end{array} \right\} \Rightarrow 10^9 \text{ vegades major}$$

- No obstant això $\left(\lambda_{{}^{14}\text{C}} / \lambda_{\alpha} \right)_{\text{Gamow}} \approx 10^{-3}$

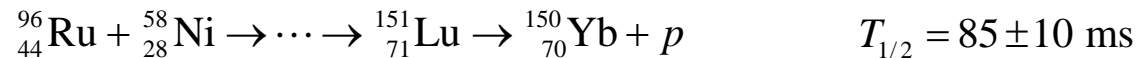
- Esta diferència pot interpretar-se basant-se en la diferència de probabilitats de preformació dels *clusters*: per al ${}^{14}\text{C}$ és 10^{-6} vegades menor que per a partícules α .

- Emissió de protons:

- No se sol observar ja que els valors Q són generalment negatius.

- Es requereixen nuclis molt rics en protons (es poden obtindre en reaccions nuclears).

- Estos processos s'han observat en nuclis excitats després del bombardeig de nuclis pesats:



- La teoria de Gamow proporciona estimacions de $T_{1/2}$ molt menors que els valors experimentals.

- Desacord degut a les funcions d'ona nuclears i al moment angular d'emissió dels p .

2. Desintegració β

La hipòtesi del neutrí

The Desperate Remedy

4 December 1930
Gloriastr.
Zürich

Physical Institute of the
Federal Institute of Technology (ETH)
Zürich

Dear radioactive ladies and gentlemen,

As the bearer of these lines, to whom I ask you to listen graciously, will explain more exactly, considering the 'false' statistics of N-14 and Li-6 nuclei, as well as the continuous β -spectrum, I have hit upon a desperate remedy to save the "exchange theorem"* of statistics and the energy theorem. Namely [there is] the possibility that there could exist in the nuclei electrically neutral particles that I wish to call neutrons,** which have spin 1/2 and obey the exclusion principle, and additionally differ from light quanta in that they do not travel with the velocity of light: The mass of the neutron must be of the same order of magnitude as the electron mass and, in any case, not larger than 0.01 proton mass. The continuous β -spectrum would then become understandable by the assumption that in β decay a neutron is emitted together with the electron, in such a way that the sum of the energies of neutron and electron is constant.

Now, the next question is what forces act upon the neutrons. The most likely model for the neutron seems to me to be, on wave mechanical grounds (more details are known by the bearer of these lines), that the neutron at rest is a magnetic dipole of a certain moment μ . Experiment probably required that the ionizing effect of such a neutron should not be larger than that of a γ ray, and thus μ should probably not be larger than $e \cdot 10^{-13}$ cm.

But I don't feel secure enough to publish anything about this idea, so I first turn confidently to you, dear radioactives, with a question as to the situation concerning experimental proof of such a neutron, if it has something like about 10 times the penetrating capacity of a γ ray.



I admit that my remedy may appear to have a small a priori probability because neutrons, if they exist, would probably have long ago been seen. However, only those who wager can win, and the seriousness of the situation of the continuous β -spectrum can be made clear by the saying of my honored predecessor in office, Mr. Debye, who told me a short while ago in Brussels, "One does best not to think about that at all, like the new taxes." Thus one should earnestly discuss every way of salvation.—So, dear radioactives, put it to test and set it right.—Unfortunately, I cannot personally appear in Tübingen, since I am indispensable here on account of a ball taking place in Zürich in the night from 6 to 7 of December.—With many greetings to you, also to Mr. Back, your devoted servant,

W. Pauli

*In the 1957 lecture, Pauli explains, "This reads: exclusion principle (Fermi statistics) and half-integer spin for an odd number of particles; Bose statistics and integer spin for an even number of particles."

This letter, with the footnote above, was printed in the September 1978 issue of *Physics Today*.

**Pauli originally called the new particle the neutron (or the "neutral one"). Later, Fermi renamed it the neutrino (or the "little neutral one").

Teoria de Fermi de la desintegració β

- Si H_0 és el Hamiltonià responsable dels estats estacionaris nuclears, i V una xicoteta pertorbació (interacció) dependent del temps, $H = H_0 + V$, la probabilitat de transició per unitat de temps d'un estat estacionari inicial i a un altre f pot determinar-se per mitjà de la teoria de pertorbacions:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \rho(E_f) \quad \text{Regla daurada de Fermi (Tema 5)}$$



$$V_{fi} = \langle f | V_{\text{int}} | i \rangle \quad \text{Element de matriu de la interacció}$$

$$\rho(E_f) = \frac{dn}{dE_f} \quad \text{Densitat d'estats finals}$$

- L'estat estacionari inicial nuclear té moment angular (espín) ben definit: $|i\rangle = |J_i, M_i; \zeta_i\rangle$
 - ζ_i representa la resta de tots els bons números quàntics que defineixen l'estat.
- L'estat final està constituït pel nucli de retrocés i els leptons (electró i neutrí).
- Els leptons poden aproximar-se asimptòticament per partícules lliures \Rightarrow usem ones planes per a la descripció (normalització en caixa de volum V):

$$|f\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} |J_f, M_f; \zeta_f\rangle = \frac{1}{V} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} |J_f, M_f; \zeta_f\rangle$$

\vec{p} i \vec{q} són els moments dels e^\pm , ν

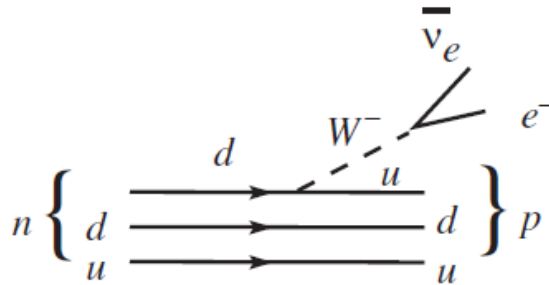
$$\vec{k} = (\vec{p} + \vec{q}) / \hbar$$

- Podem escriure (G_F és la constant d'acoblament):

$$V_{fi} = \langle f | V_{\text{int}} | i \rangle = \frac{G_F}{V} \langle J_f, M_f; \zeta_f | e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} O_X | J_i, M_i; \zeta_i \rangle = \frac{G_F}{V} U_{fi}$$

- La constant d'acoblament dèbil g (Tema 5) està relacionada amb la constant de Fermi G_F , definida en el context d'una interacció (de contacte) de corrent dèbil carregada:

Interacció amb propagador



$$M_{fi} \approx \left[g \bar{u}_p \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) u_n \right] \frac{1}{M_W^2 - q^2} \left[g \bar{u}_e \gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) u_{\bar{\nu}_e} \right] \approx \frac{g^2}{M_W^2} J_{n \rightarrow p}^\mu J_{\bar{\nu}_e \rightarrow e, \mu}$$

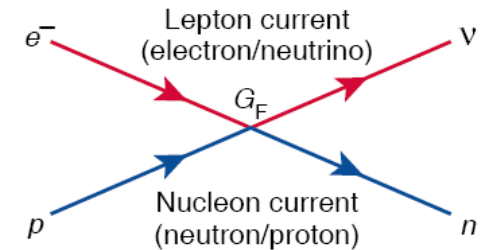
- Per definició:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2}$$

- Com les energies en joc ($Q \sim \text{MeV}$) són xicotetes $\Rightarrow (p+q)/\hbar = (p+q)c/(\hbar c) \sim 0.01 \text{ fm}^{-1}$
 $\Rightarrow kr$ és molt xicotet en el domini del volum nuclear $\Rightarrow kR = (p+q)R/\hbar = R/\lambda \approx 10^{-2} \ll 1$

Interacció de contacte

Basic Current-Current Interaction



$$M_{fi} \approx G_F J_{n \rightarrow p}^\mu J_{\bar{\nu}_e \rightarrow e, \mu}$$

- Per tant, podem desenrotllament asimptòticament l'exponencial (aproximació de longitud d'ona llarga):

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \simeq 1 + i\vec{k}\cdot\vec{r} + \frac{1}{2}(\vec{k}\cdot\vec{r})^2 + \dots$$

- Amb açò l'estat final pot escriure's:

$$|f\rangle = \frac{1}{V} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} |J_f, M_f; \zeta_f\rangle = \frac{1}{V} \left\{ 1 + i\vec{k}\cdot\vec{r} + \frac{1}{2}(\vec{k}\cdot\vec{r})^2 + \dots \right\} |J_f, M_f; \zeta_f\rangle$$

- L'element de matriu s'escriurà:

$$V_{fi} = \langle f | V_{\text{int}} | i \rangle = \frac{G_F}{V} \langle J_f, M_f; \zeta_f | \left(1 + i\vec{k}\cdot\vec{r} + \frac{1}{2}(\vec{k}\cdot\vec{r})^2 + \dots \right) O_X | J_i, M_i; \zeta_i \rangle = \frac{G_F}{V} U_{fi}$$

Transicions permeses ($l = 0$)

Transicions 1^a prohibides ($l = 1$)

Transicions 2^a prohibides ($l = 2$)

- ❑ G_F és la constant d'acoblament que dona la intensitat de la interacció (**constant de Fermi**)
 - ❑ O_X és l'operador que representa la interacció nuclear.
 - ❑ V_{fi} representa l'element de matriu nuclear.
- El problema essencial en la teoria és el de conèixer la forma de l'operador O_X
- Procediment:
 - ❑ Es tria una forma específica de l'operador, i amb ell es calcula la probabilitat de transició.
 - ❑ Es compara la forma de l'espectre β , així com la distribució angular de l'electró amb les mesures.

- L'operador ha de realitzar la transformació $n \leftrightarrow p$ (operador de pujada i baixada d'isospín τ_{\pm}), i la transferència de l'espín entre els nuclis pare i fill per a compensar l'espín que es porta el sistema electró-neutrí: $\vec{S} = \vec{s}_e + \vec{s}_\nu = \vec{0}, \vec{1}$

$$O_X = \tau_{\mp} + g_A \vec{\sigma} \tau_{\mp}$$

Limit NR de l'operador

Quiralitat "Left", $2P_L = \gamma^\mu (1 - \gamma^5)$

- Terme $\vec{S} = \vec{0} \Rightarrow$ **Transicions Fermi (F)**:

- Es transforma com un vector sota rotacions SU(2) (**terme vectorial, V**).

Únic terme proposat per Fermi en 1932, coherent amb les dades de l'època.

- Terme $\vec{S} = \vec{1} \Rightarrow$ **Transicions Gamow-Teller (GT)**:

- Es transforma com un vector sota rotacions SU(2), però canvia el signe baix una transformació de paritat (**terme axial, A**).

Terme provat en 1957 (25 anys després de la proposta de Pauli/Fermi): experiment de violació de paritat (Wu et al., Tema 4).

- Per tant:

$$|V_{fi}|^2 = \frac{G_F^2}{V^2} |U_{fi}|^2 \quad |U_{fi}|^2 = \langle F \rangle^2 + g_A^2 \langle GT \rangle^2$$

$$\langle F \rangle^2 = \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{M_f, M_i} \left| \langle J_f, M_f; \zeta_f | \left(1 + i\vec{k} \cdot \vec{r} + \frac{1}{2} (i\vec{k} \cdot \vec{r})^2 + \dots \right) \tau_{\mp} | J_i, M_i; \zeta_i \rangle \right|^2$$



Fermi

$$\langle GT \rangle^2 = \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{M_f, M_i} \left| \langle J_f, M_f; \zeta_f | \underbrace{\left(1 + i\vec{k} \cdot \vec{r} + \frac{1}{2} (i\vec{k} \cdot \vec{r})^2 + \dots \right)}_{\text{Grau de prohibició}} \vec{\sigma} \tau_{\mp} | J_i, M_i; \zeta_i \rangle \right|^2$$



Gamow-Teller

Grau de prohibició

Suma i mitjana sobre els estats de polarització del nucli final (M_f) i inicial (M_i), respectivament

Densitat d'estats finals

- La densitat d'estats finals es defineix:

$$\rho(E_f) = \frac{dn}{dE_f}$$

- D'acord amb el principi d'incertesa de Heisenberg, l'estat d'una partícula en el continu d'energies no es pot definir amb una precisió major que:

$$\Delta x \Delta p_x \approx h, \Delta y \Delta p_y \approx h, \Delta z \Delta p_z \approx h \Rightarrow \Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z \approx h^3 \Rightarrow d^3 \vec{r} d^3 \vec{p} \approx h^3$$

- Per tant, el nombre d'estats finals possibles de l'electró (neutrí) lliures en un interval de moments $[p, p+dp]$ ($[q, q+dq]$) i en un volum V és:

$$dn_e = \frac{d^3 p V}{h^3} = \frac{4\pi p^2 dp V}{h^3} = \frac{p^2 dp V}{2\pi^2 \hbar^3}$$

$$dn_\nu = \frac{d^3 q V}{h^3} = \frac{4\pi q^2 dq V}{h^3} = \frac{q^2 dq V}{2\pi^2 \hbar^3}$$

- Nombre d'estats finals possibles amb electró i neutrí amb moments p i q :

$$dn \equiv d^2 n = dn_e dn_\nu = \frac{V^2 p^2 dp q^2 dq}{4\pi^4 \hbar^6}$$

- En funció de l'energia cinètica i moment dels electrons (magnituds que experimentalment es mesuren):

$$[Q = M_{\text{inicial}} - M_{\text{final}} = T_{\text{final}} - T_{\text{inicial}}]$$

$$Q = T_e + E_\nu + T_R \approx T_e + T_\nu + m_\nu c^2 \Rightarrow T_\nu + m_\nu c^2 = Q - T_e$$

$$E_\nu^2 = (qc)^2 + (m_\nu c^2)^2 = (T_\nu + m_\nu c^2)^2 \Rightarrow (qc)^2 = (Q - T_e)^2 - (m_\nu c^2)^2$$

Diferenciant:

$$qc^2 dq = (Q - T_e) dT_e \Rightarrow q^2 dq = \frac{q}{c^2} (Q - T_e) dT_e = \frac{(Q - T_e)}{c^3} \sqrt{(Q - T_e)^2 - (m_\nu c^2)^2} dT_e$$

Per tant,

Eq. (1)

$$dn = \frac{V^2}{4\pi^4 \hbar^6 c^3} p^2 dp (Q - T_e) \sqrt{(Q - T_e)^2 - (m_\nu c^2)^2}$$

Si $m_\nu = 0 \Rightarrow$

Eq. (2)

$$dn = \frac{V^2}{4\pi^4 \hbar^6 c^3} p^2 dp (Q - T_e)^2$$

- Finalment el $p^2 dp$ pot també escriure's en funció de T_e :

$$E_e^2 = (pc)^2 + (m_e c^2)^2 = (T_e + m_e c^2)^2 \Rightarrow (pc)^2 = (T_e + m_e c^2)^2 - (m_e c^2)^2 = T_e^2 + 2T_e m_e c^2$$

Diferenciant:

Eq. (3)

$$pc^2 dp = (T_e + m_e c^2) dT_e \Rightarrow p^2 dp = \frac{p}{c^2} (T_e + m_e c^2) dT_e = \frac{(T_e + m_e c^2)}{c^3} \sqrt{T_e^2 + 2T_e m_e c^2} dT_e$$

Forma estadística de l'espectre β d'energies

- La forma (estadística) de l'espectre β vindrà donada per (regla daurada de Fermi):

$$d\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 dn = \frac{G_F^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} |U_{fi}|^2 p^2 dp (Q - T_e) \sqrt{(Q - T_e)^2 - (m_\nu c^2)^2} \quad \text{De l'Eq. (1)}$$

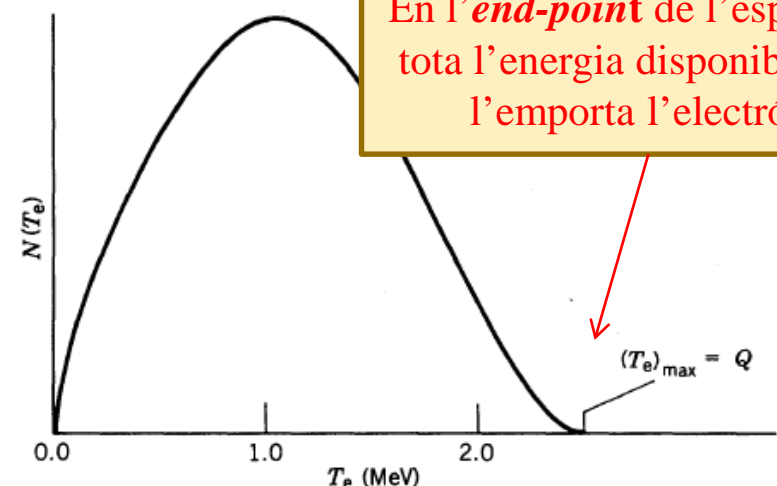
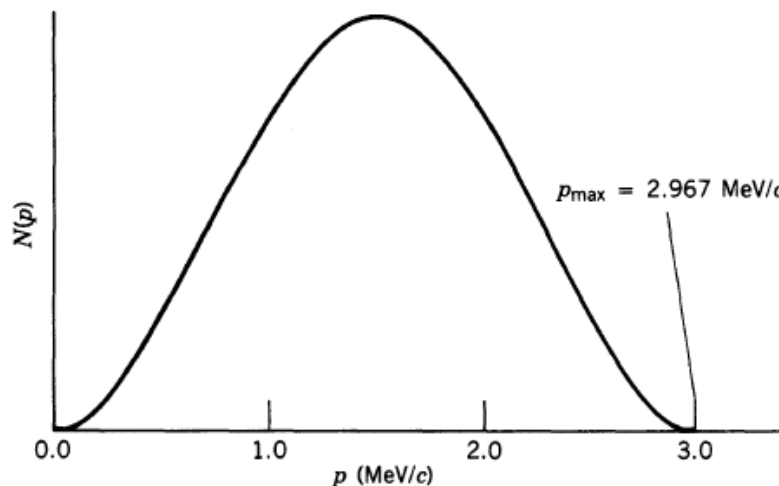
- En funció del moment de l'electró (\rightarrow **espectre de moments**):

$$\frac{dN}{dp} \propto \frac{d\lambda}{dp} = \frac{G_F^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} |U_{fi}|^2 p^2 (Q - T_e) \sqrt{(Q - T_e)^2 - (m_\nu c^2)^2}$$

- En funció de l'energia cinètica de l'electró (fem un canvi de variable) \rightarrow **espectre d'energies**:

$$\frac{dN}{dT_e} \propto \frac{d\lambda}{dT_e} = \frac{G_F^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^6} |U_{fi}|^2 (T_e + m_e c^2) \sqrt{T_e^2 + 2T_e m_e c^2} (Q - T_e) \sqrt{(Q - T_e)^2 - (m_\nu c^2)^2} \quad \text{De les Eqs. (1)+(3)}$$

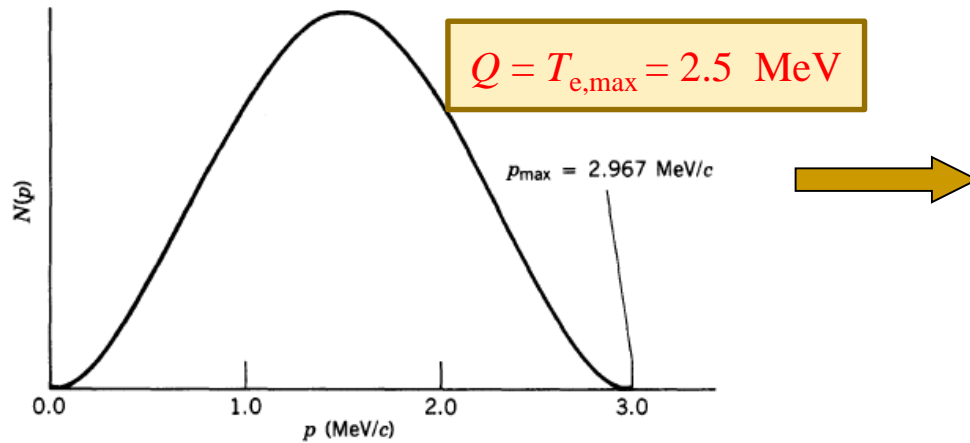
- El nombre d'electrons serà nul per a $p = 0$, $T_e = 0$ i $T_e = Q$ \leftarrow



En l'**end-point** de l'espectre tota l'energia disponible se l'emporta l'electró

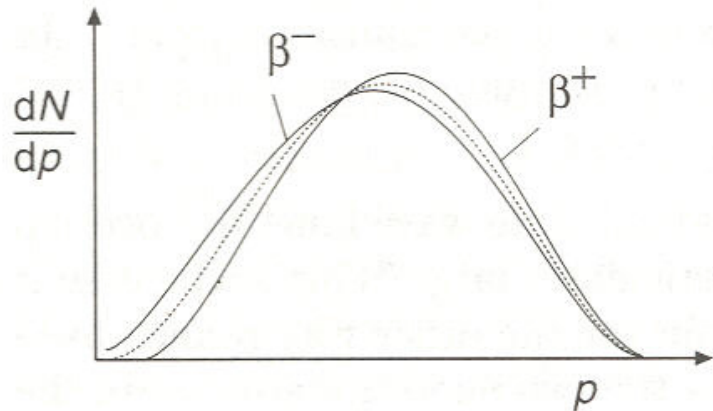
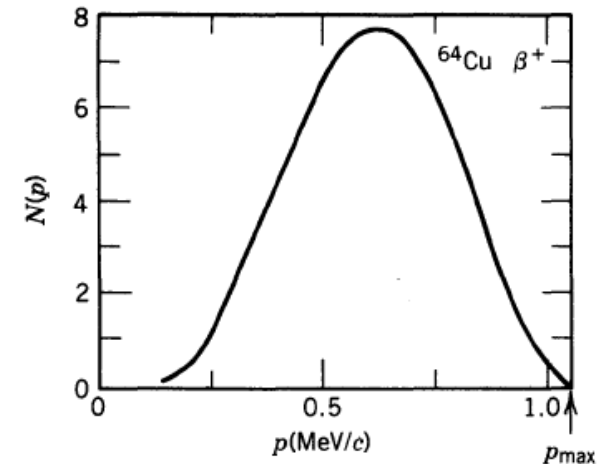
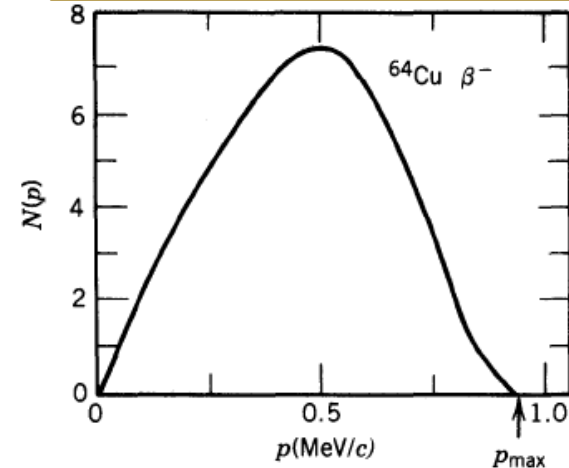
Distribucions de moment i energia calculats per a electrons amb $Q = 2.5$ MeV

- No obstant això, hi ha discrepàncies entre les distribucions experimentals i les prediccions teòriques (originades pel pas de la barrera de Coulomb):



Distribució teòrica de moments per a electrons amb $Q = 2.5$ MeV

$$Q(\beta^+) \sim Q(\beta^-) = 0.578 \text{ MeV}$$



Diferència en l'espectre de moments d'electrons i positrons per a un mateix isòtop

Espectre de moments d'electrons i positrons emesos pel ^{64}Cu (normalitzats al moment màxim teòric alliberat en cada cas)

- Estes discrepàncies provenen de:
 - La influència de la **interacció coulombiana** entre la càrrega Z' del nucli residual i la càrrega de l'electró-positró que s'emet (frenant els electrons i empentant els positrons).
 - Este efecte queda inclòs per mitjà de la funció de Fermi:

$$F(Z', p) \text{ ó } F(Z', T_e) \quad \textbf{Funció de Fermi}$$

- Per a electrons no relativistes, el càlcul mecano-quàntic permet obtenir:

$$F(Z', T_e) = \frac{x}{1 - e^{-x}}, \quad x = \frac{\mp 2\pi\alpha Z'}{\beta} (e^\pm) \quad \text{Funció de Fermi no relativista}$$

- A més, per a transicions prohibides l'element de matriu nuclear no és constant, doncs cal incloure els termes **ikr** , per la qual cosa és necessari introduir **un factor de forma**, funció dels moments dels leptons:

$$S(p, q) \quad \textbf{Factor de forma nuclear}$$

- Per a transicions primera prohibides:

$$S(p, q) = p^2 + q^2 \quad \textbf{Factor de forma} \text{ per a transicions prohibides de primer orde}$$

- L'espectre complet vindria donat per:

$$N(p) \propto S(p, q) F(Z', p) p^2 (Q - T_e) \sqrt{(Q - T_e)^2 - (m_\nu c^2)^2}$$

- Si la massa del neutrí fora nul·la:

$$N(p) \propto S(p, q) F(Z', p) p^2 (Q - T_e)^2$$

Diagrama o “plot” de Kurie

- Si l'element de matriu nuclear és constant (transicions permeses) i la massa del neutrí negligible:

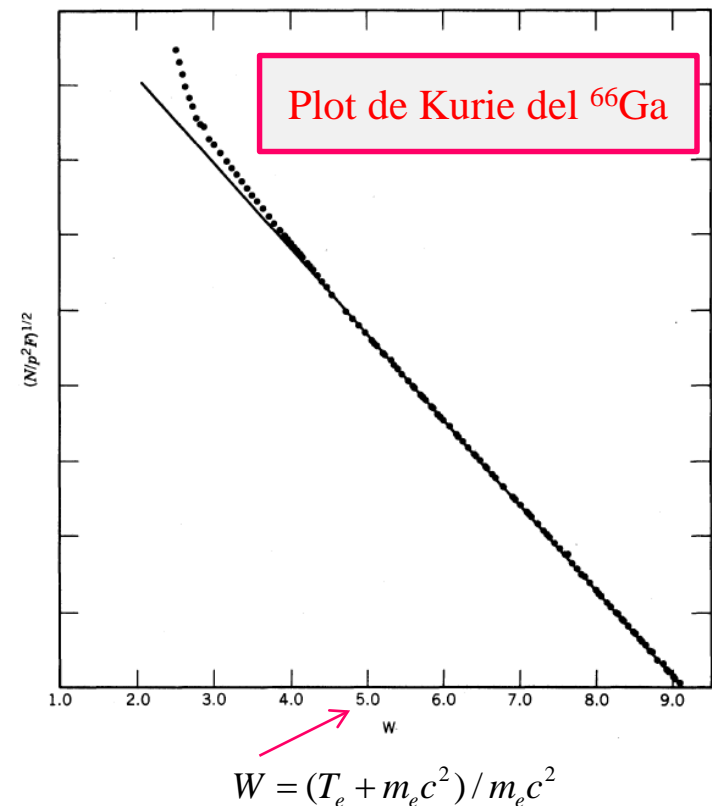
$$(Q - T_e) \propto \sqrt{\frac{N(p)}{p^2 F(Z', p)}}$$

- Si ambdós hipòtesis són correctes, la representació de l'anomenat **diagrama o plot de Kurie**:

$$\sqrt{\frac{N(p)}{p^2 F(Z', p)}} = f(T_e) \quad \text{Diagrama de Kurie}$$

serà **una recta** que inter-secciona l'eix d'abscisses en l'*end-point*, en que es verifica que: $T_{e, \max} = Q$.

- Exemple: **Desintegració permesa $0^+ \rightarrow 0^+$ del ^{66}Ga**
 - La discrepància a baixa energia és deguda a la difusió dels electrons per part de la matèria que conforma la font radioactiva.
 - La representació lineal del diagrama confirma la teoria de Fermi i proporciona un modo convenient de determinar l'energia de l'*end-point* i del valor de Q .



- Si la transició no és permesa, el diagrama no serà lineal, però es pot corregir incloent-hi el factor de forma nuclear $S(p,q)$ corresponent:

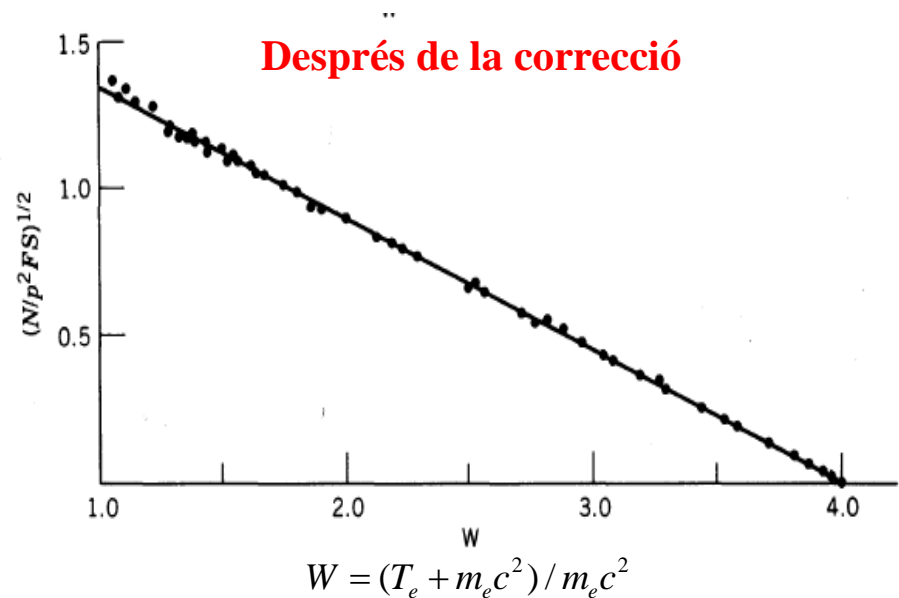
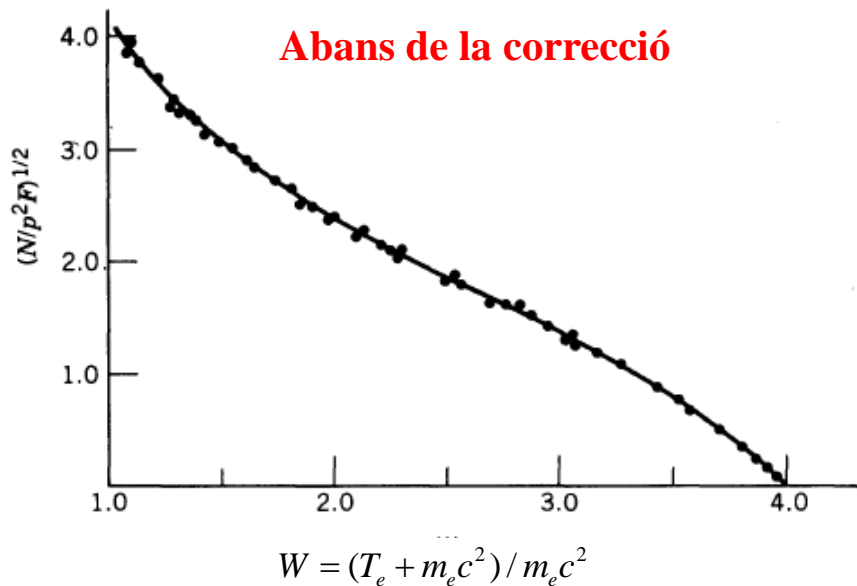
$$\sqrt{\frac{N(p)}{p^2 F(Z', p) S(p, q)}} = f(T_e)$$

Diagrama corregit pel factor de forma

- En el cas de les transicions prohibides de primer orde el factor de forma escaient és:

$$S(p, q) = p^2 + q^2$$

- Exemple: Desintegració prohibida de primer orde del ^{91}Y .



Massa del neutrí

- L'anàlisi del diagrama de Kurie permet mesurar l'energia màxima de la desintegració i al seu torn **la forma de l'espectre β** a prop del seu punt final ($T_e \approx Q - m_\nu c^2$) que resulta molt sensible a la massa del neutrí (mesurable per conservació de l'energia):

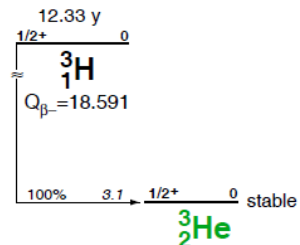
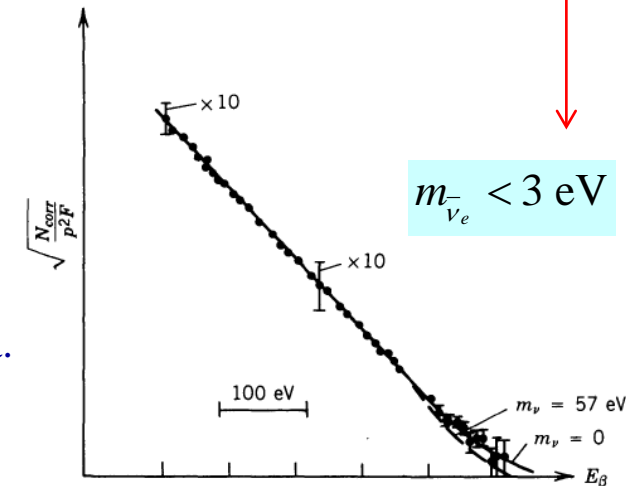
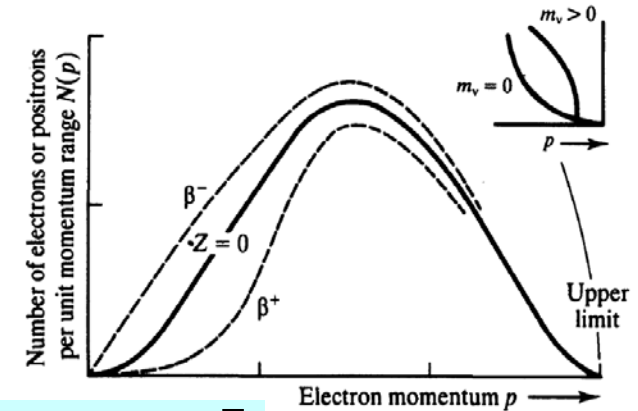
$$\text{Si } m_\nu = 0 \Rightarrow \left. \frac{dN}{dp} \right|_{T_e=Q} = 0$$

$$\text{Si } m_\nu \neq 0 \Rightarrow \left. \frac{dN}{dp} \right|_{T_e=Q-m_\nu c^2} = \infty$$

- El plot de Kurie es desviaria d'una línia recta per a valors de $T_e \approx Q - m_\nu c^2$ com es veu.

- La millor determinació actual en la desintegració del triti: ${}^3\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + e^- + \bar{\nu}_e$
 - Q petit, $Q_\beta = 18.6 \text{ keV}$, la qual cosa afavoreix la sensibilitat de l'experiment.
 - Només existeix un nivell nuclear accessible en el decay.
 - El triti és fàcil de produir.
 - La determinació experimental és en canvi complexa, ja que en l'*end-point*:

- ✓ la taxa de comptatge és molt baixa.
- ✓ la **resolució experimental** canvia la forma de la corba.
- ✓ existeix pèrdua d'energia dels electrons en la pròpia font (pels enllaços moleculars del triti i per les excitacions atòmiques).



Semivides comparatives

- La **probabilitat de desintegració** per unitat de temps vindrà representada per λ que s'obtindrà per integració de tot l'espectre energètic d'electrons. Per a $m_\nu = 0$,

Integral de Fermi

$$\lambda = \int_0^{p_{\max}} \frac{d\lambda}{dp} dp = \frac{G_F^2 |U_{fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \int_0^{p_{\max}} F(Z', p) p^2 (Q - T_e)^2 dp \Rightarrow f(Z', Q) = \frac{1}{m_e^5 c^7} \int_0^{p_{\max}} F(Z', p) p^2 (Q - T_e)^2 dp$$

$$\lambda = k_1 G_F^2 |M_{fi}|^2 f(Z', Q)$$

$$k_1 = \frac{m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7}$$

$F(Z', p)$ és la funció de Fermi, i $f(Z', Q)$ la seua integral en tot l'espectre, integral que depèn de Z' i de $T_{e,\max}$

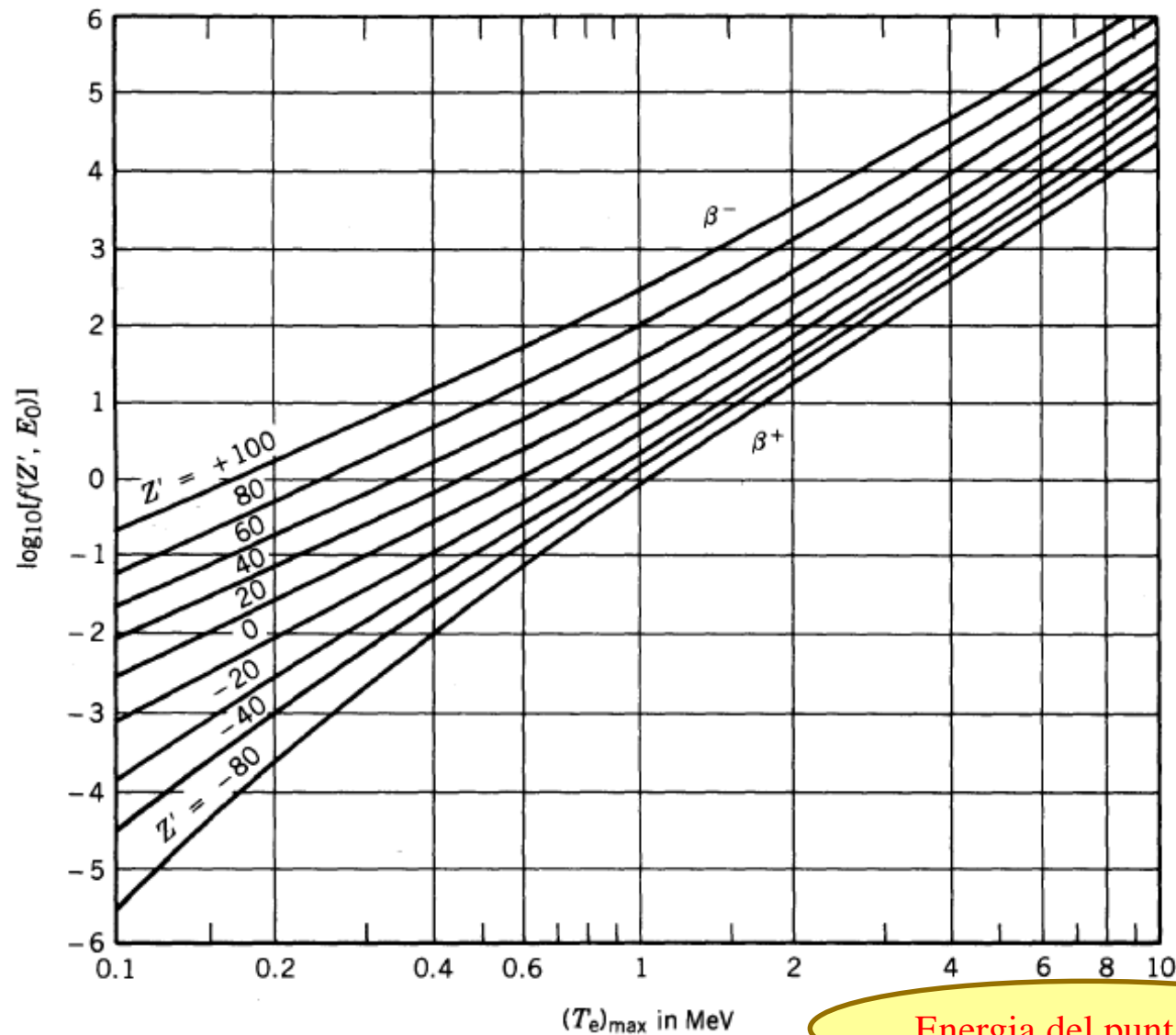
- La integral de Fermi és adimensional i està tabulada.
- La **semivida comparativa** ft es defineix com:

$$t = T_{1/2} = \ln 2 / \lambda \rightarrow$$

$$ft \equiv f(Z', Q) T_{1/2} = \frac{\ln 2}{k_1 G_F^2 |M_{fi}|^2}$$

$$\ln 2 / k_1 = 1.23 \times 10^{-120} \text{ J}^2 \text{ m}^6 \text{ s}$$

- Magnitud ft és només depèn de **l'element de matriu nuclear**
 \Rightarrow és així un paràmetre representatiu de la desintegració β de cada nucli i **del seu orde**.
- La semivida al seu torn, és molt més complexa, doncs depèn a més de la integral de Fermi, la qual porta la informació de la interacció coulombiana del nucli fill amb l'electró.
- Els valors ft varien des de 10^3 s fins a 10^{22} s \Rightarrow **logaritme decimal**. Esta gran variació, que depèn de l'orde de prohibició, s'origina per la dificultat de crear els fermions (e, ν) amb **alt moment angular** l (degut al poc espai fàsic disponible).

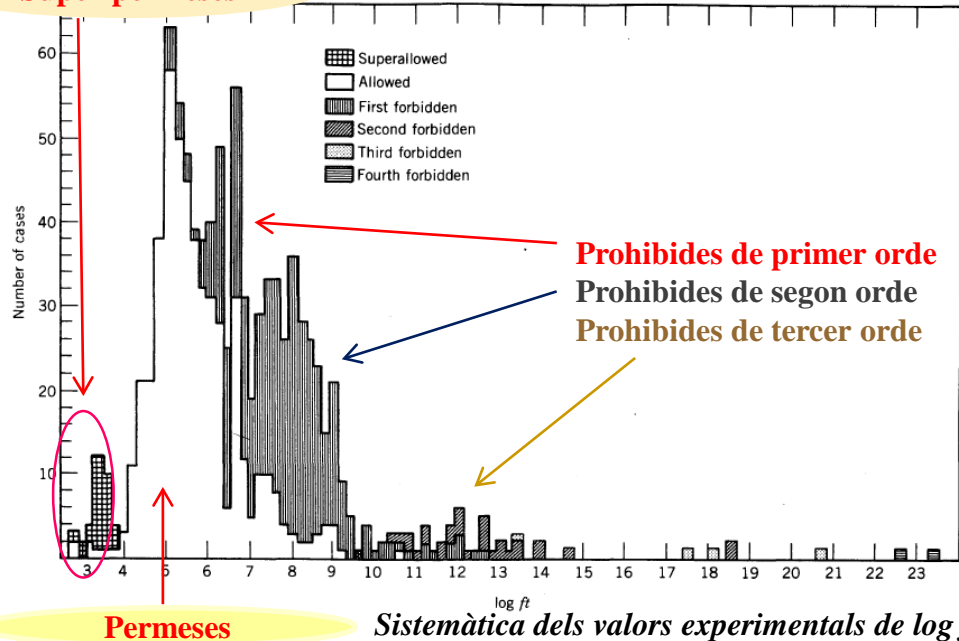


Valors de la **Integral de Fermi**, $f(Z', Q)$

Energia del punt final

- Els valors experimentals de les semivides comparatives permeten classificar les transicions β nuclears en **permeses i prohibides**.

Super-permeses



Tipus	$\log ft$
Super permeses	2.9-3.7
Permeses	4.4-6.0
1 ^a prohibides	6-10
2 ^a prohibides	10-13
3 ^a prohibides	>15

↑
Orde de prohibició

Permeses

Sistemàtica dels valors experimentals de $\log ft$

- Les transicions classificades com **super-permeses** ($\log ft \approx 3-4$) corresponen a les transicions $0^+ \rightarrow 0^+$ permeses **tipus Fermi pur**.
 - En estes transicions les funcions d'ona del nucli pare i fill són molt semblants (solapament màxim) i l'element de matriu M_{fi} té valors grans (~ 1).
 - En transicions permeses tipus Fermi no hi ha canvi d'espín (els leptons s'acoblen en estat singlet d'espín), per la qual cosa només hi ha transferència de tercera component d'isospín

$$|\Delta I_z| = 1$$

$$\langle F \rangle = \langle f | \tau_{\mp} | i \rangle = \sqrt{I_i(I_i + 1) - I_{z,i}(I_{z,i} \mp 1)} \delta_{J_f J_i} \delta_{M_f M_i} \delta_{I_f I_i} \delta_{I_{z,f} I_{z,i} \mp 1}$$

- Les transicions super-permeses $0^+ \rightarrow 0^+$ solen tindre lloc **en processos β^+** entre estats (nuclis) que pertanyen al mateix **triplet** d'isospín ($I_3 = I_f = 1$)

$$\Rightarrow \langle F \rangle \approx \sqrt{2}$$

- Per tant:
$$ft = \frac{\ln 2}{k_1 2G_F^2}$$
- Estes transicions permeten determinar la constant G_F a partir dels valors experimentals de ft : $G_F = 8.962 \times 10^{-5} \text{ MeV} \cdot \text{fm}^3$
- Les constants d'acoblament es solen escriure en forma adimensional:

$$\frac{G_F}{(\hbar c)^3} = 1.16637(1) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

Adimensional

$$\frac{G_F (m_p c^2)^2}{(\hbar c)^3} = 1.02726(1) \times 10^{-5}$$

- Comparació amb les constants de les altres interaccions (que ens donen la seua intensitat relativa):
 - Forta 1
 - Electromagnètica 10^{-2}
 - Gravitatòria 10^{-39}

Decay	ft (s)
$^{10}\text{C} \rightarrow ^{10}\text{B}$	3100 ± 31
$^{14}\text{O} \rightarrow ^{14}\text{N}$	3092 ± 4
$^{18}\text{Ne} \rightarrow ^{18}\text{F}$	3084 ± 76
$^{22}\text{Mg} \rightarrow ^{22}\text{Na}$	3014 ± 78
$^{26}\text{Al} \rightarrow ^{26}\text{Mg}$	3081 ± 4
$^{26}\text{Si} \rightarrow ^{26}\text{Al}$	3052 ± 51
$^{30}\text{S} \rightarrow ^{30}\text{P}$	3120 ± 82
$^{34}\text{Cl} \rightarrow ^{34}\text{S}$	3087 ± 9
$^{34}\text{Ar} \rightarrow ^{34}\text{Cl}$	3101 ± 20
$^{38}\text{K} \rightarrow ^{38}\text{Ar}$	3102 ± 8
$^{38}\text{Ca} \rightarrow ^{38}\text{K}$	3145 ± 138
$^{42}\text{Sc} \rightarrow ^{42}\text{Ca}$	3091 ± 7
$^{42}\text{Ti} \rightarrow ^{42}\text{Sc}$	3275 ± 1039
$^{46}\text{V} \rightarrow ^{46}\text{Ti}$	3082 ± 13
$^{46}\text{Cr} \rightarrow ^{46}\text{V}$	2834 ± 657
$^{50}\text{Mn} \rightarrow ^{50}\text{Cr}$	3086 ± 8
$^{54}\text{Co} \rightarrow ^{54}\text{Fe}$	3091 ± 5
$^{62}\text{Ga} \rightarrow ^{62}\text{Zn}$	2549 ± 1280

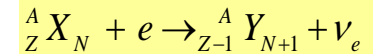
Valors de ft per a transicions super-permeses, $0^+ \rightarrow 0^+$
Són desintegracions β^+

Processos de CE (captura electrònica)

- En el cas de processos de CE (captura electrònica) és necessari a més tindre en compte que:
 - Només s'emet una partícula en l'estat final (el neutrí), per la qual cosa la densitat d'estats finals serà:

$$dn \equiv dn_\nu = \frac{q^2 dq V}{2\pi^2 \hbar^3}$$

Procés de Captura o CE:



- Com $E_f = E_\nu + T_R \xrightarrow{T_R \rightarrow 0} Q_{CE} \approx E_\nu = T_\nu + m_\nu c^2$

$$E_\nu^2 = (qc)^2 + (m_\nu c^2)^2 = (T_\nu + m_\nu c^2)^2 \Rightarrow (qc)^2 = Q_{CE}^2 - (m_\nu c^2)^2$$

- La probabilitat de transició serà:

$$\lambda_{CE} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{G_F^2}{V} |U_{fi}|^2 \frac{dn}{dE_\nu} = \frac{2\pi}{\hbar} G_F^2 |M_{fi}|^2 \frac{q^2}{2\pi^2 \hbar^3} \frac{dq}{dE_\nu} \quad \leftarrow \begin{cases} E_\nu^2 = (qc)^2 + (m_\nu c^2)^2 \Rightarrow \frac{dq}{dE_\nu} = \frac{E_\nu}{qc^2} \\ \frac{dn}{dE_\nu} = \frac{dn}{dq} \frac{dq}{dE_\nu} \quad \text{canvi de variable} \end{cases}$$

$$\lambda_{CE} = G_F^2 |U_{fi}|^2 \frac{q E_\nu}{\pi \hbar^4 c^2} |\psi_K(0)|^2 = G_F^2 |U_{fi}|^2 \frac{Q_{EC}}{\pi \hbar^4 c^3} \sqrt{Q_{EC}^2 - (m_\nu c^2)^2} |\psi_K(0)|^2$$

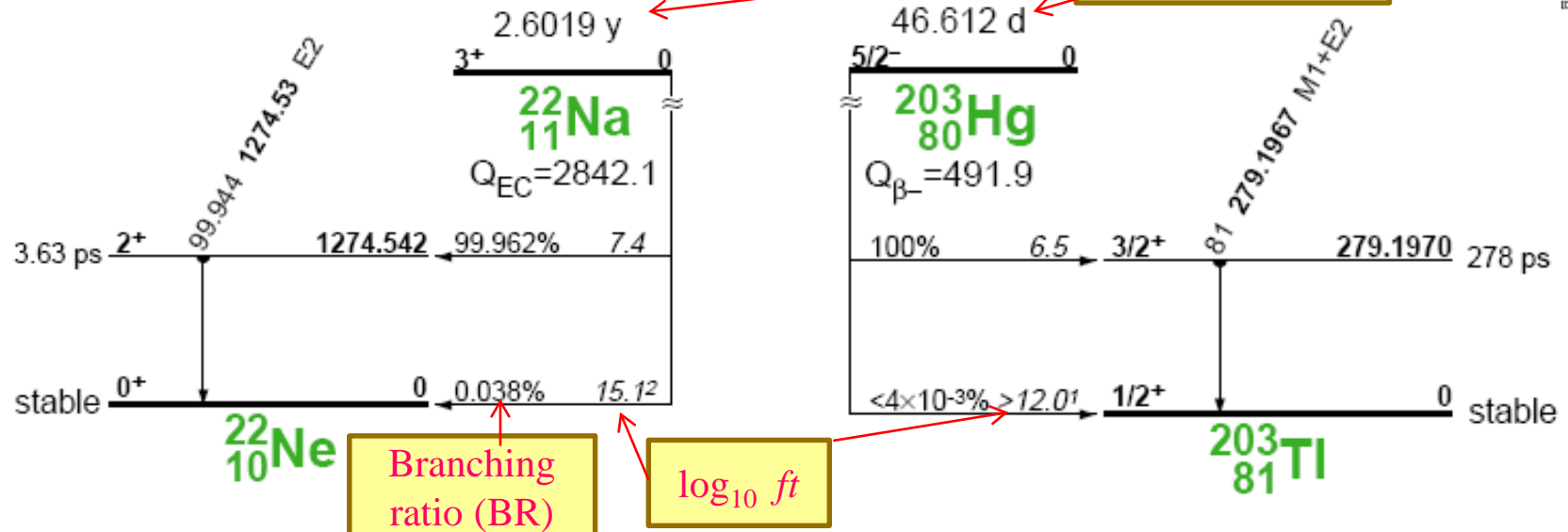
- L'element de matriu nuclear és idèntic al de la desintegració β !!
- És precís incloure la probabilitat de que un electró de la capa K (molt més probable que altres capes) es trobe en el nucli ($r \sim 0$) per a poder ser capturat \Rightarrow

$$\psi_K(r) \propto \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}$$

Funció d'ona de l'electró atòmic

- λ_{CE} dominada a alt Z (factor Z^3), però λ_β ho fa a energia elevada (factor p^2).

Sistemàtica de valors ft

Semivides $T_{1/2}$ 

$$3^+ \rightarrow 0^+ \Rightarrow \Delta J = 3, L = 2, 4, S = 1 \text{ (GT)}$$

$$T_{1/2} = 2.60 \text{ a} = 8.2 \times 10^7 \text{ s} \quad Br = 0.038\%$$

$$T_{1/2, \text{parcial}} = \frac{8.2 \times 10^7 \text{ s}}{0.00038} = 2.2 \times 10^{11} \text{ s} \Rightarrow \log_{10} T_{1/2, \text{parcial}} = 11.3$$

$$Q_{\beta^+} = Q_{CE} - 2m_e c^2 = 2.842 - 1.022 = 1.820 \text{ MeV}$$

$$\log f(Z' = 10, Q_{\beta^+} = 1.82) = 1.7$$

$$\log_{10} ft = 1.7 + 11.3 = 13.0$$

$$5/2^- \rightarrow 3/2^+ \Rightarrow \Delta J = 1, L = 1, S = 0, 1 \text{ (F i GT)}$$

$$T_{1/2} = 46.6 \text{ d} = 4.03 \times 10^6 \text{ s} \rightarrow \log T_{1/2} = 6.6$$

$$Q_{\beta^-}^* = Q_{\beta^-} - E^* = 0.491 - 0.279 = 0.212 \text{ MeV}$$

$$\log_{10} f(Z' = 81, Q_{\beta^-} = 0.212) = -0.1$$

$$\log_{10} ft = -0.1 + 6.6 = 6.5$$

Cal calcular l'energia disponible en el procés que s'estudia, així com la seua semivida:

$$\lambda_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \rightarrow \lambda_k = BR(k) \lambda_{\text{tot}} \rightarrow T_{1/2, k} = \frac{T_{1/2, \text{tot}}}{BR(k)}$$

Regles de selecció: moment angular i paritat

- S'ha vist que el valor del moment angular orbital L permet classificar les desintegracions β en:
 - Permeses: $L = 0$
 - Prohibides: $L > 0$
 - Com $kR \approx 10^{-2}$ i $ft \propto 1/|M_{fi}|^2$ cada unitat extra de L redueix la probabilitat de transició en un factor 10^{-4} - 10^{-3} originat per la falta d'espai fàsic per a L superiors.
- Per conservació de moment angular: $\vec{J}_i = \vec{J}_f + \vec{L} + \vec{S}$, $\vec{S} = \vec{s}_e + \vec{s}_\nu$
- Encara que la interacció dèbil responsable de la desintegració β no conserva paritat, açò s'aplica en la gran majoria dels casos només a l'electró i neutrí, ja que la part nuclear està completament dominada per el Hamiltonià fort (Int. Débil ≈ 1 part en 10^7) \Rightarrow **el canvi de paritat nuclear ve determinat pel moment angular orbital:**

$$P_i = (-1)^L P_f$$

$L = 0$	Permeses	L parell	$\Delta P = +$
$L = 1$	1 ^a Prohibides	L senar	$\Delta P = -$
$L = 2$	2 ^a prohibides	L parell	$\Delta P = +$
...	...		

- Per a cada L , es tenen transicions de:
 - **Fermi:** interacció vectorial, amb $\vec{S} = 0 \Rightarrow \Delta \vec{J} = \vec{L}$
 - **Gamow-Teller:** interacció vector-axial (amb violació de paritat) i: $\vec{S} = 1 \Rightarrow \Delta \vec{J} = \vec{L} + \vec{1}$
- Els dos tipus de transicions poden donar-se en un mateix procés β .

Suma vectorial

Regles de selecció: Transicions permeses

■ Fermi:

$$\vec{L} = 0, \quad \vec{S} = \vec{s}_e + \vec{s}_\nu = \vec{0} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta J = J_i - J_f = 0 \\ \Delta I = 0, \text{ pero } I_i + I_f \neq 0 \\ \Delta I_z = \pm 1 \\ \Delta P = + \end{array} \right.$$

No hi ha canvi d'isospín total, però els estats no poden ser iso-singlets. Estes transicions actuen fonamentalment sobre IAS (estats anàlegs isobàrics)

$$M_{fi} = \langle f | \tau_{\mp} | i \rangle = \sqrt{I_i(I_i + 1) - I_{z,i}(I_{z,i} \mp 1)} \delta_{J_f J_i} \delta_{M_f M_i} \delta_{I_f I_i} \delta_{I_{z,f} I_{z,i} \mp 1}$$

□ Transicions super-permeses:

$$M_{fi} = \langle F \rangle = \sqrt{2} \longrightarrow ft = \frac{\ln 2}{k_1 2G_F^2}$$

Són transicions $0^+ \rightarrow 0^+$, en que no contribueix el terme de Gamow Teller. Ocorren sobre el mateix multiplet de isospín ($I=1$ que no varia)

$$\Rightarrow \text{Obtenció de la constant de Fermi: } \frac{G_F}{(\hbar c)^3} = 1.16637(1) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

■ Gamow-Teller:

$$\vec{L} = 0, \quad \vec{S} = \vec{s}_e + \vec{s}_\nu = \vec{1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta J = 0, \pm 1 \text{ (} 0 \not\rightarrow 0 \text{)} \\ \Delta I = 0, \pm 1, \text{ pero } I_i + I_f \neq 0 \\ \Delta I_z = \pm 1 \\ \Delta P = + \end{array} \right.$$

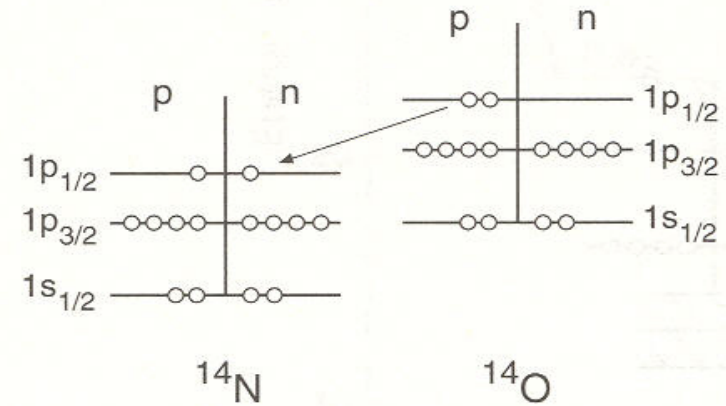
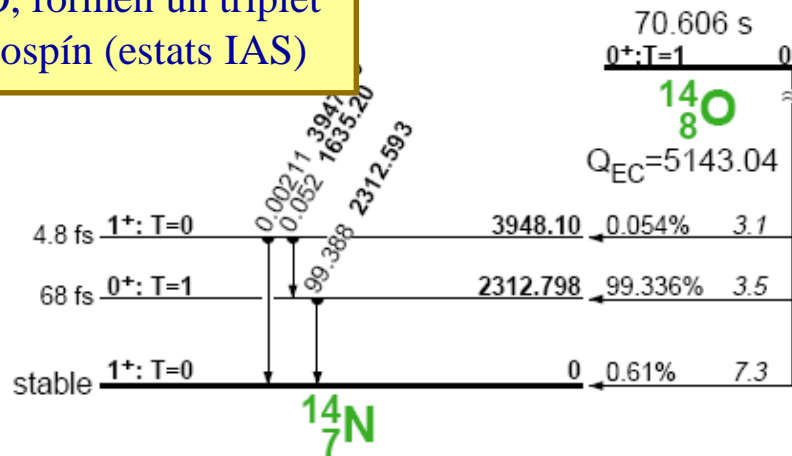
$$|J_f - 1| \leq J_i \leq J_f + 1$$

\Rightarrow Obtenció de la constant d'acoblament axial (diferent de la vectorial, veure exemples).

■ Exemples:

$^{14}\text{O} \rightarrow ^{14}\text{N}^*$	$0^+ \rightarrow 0^+ \quad (I=1 \rightarrow I=1)$	Fermi pura (super-permesa)	$ft = 3.5$
$^{14}\text{C} \rightarrow ^{14}\text{N}$	$0^+ \rightarrow 1^+ \quad (I=1 \rightarrow I=0)$	Gamow-Teller pura	$ft = 9.0$
$n \rightarrow p$	$\frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+ \quad (I=\frac{1}{2} \rightarrow I=\frac{1}{2})$	Mescla F+GT	$ft = 3.0$

Els estats 0^+ de ^{14}C , ^{14}N , y ^{14}O , formen un triplet d'isospín (estats IAS)



■ En la desintegració del neutró contribueixen F i GT:

$$ft = \frac{\ln 2}{k_1 G_F^2 \left[\langle F \rangle^2 + g_A^2 \langle GT \rangle^2 \right]}$$

$$\langle F \rangle^2 = 1$$

$$\langle GT \rangle^2 = 3$$

$$T_{1/2}(n) = 615.0 \pm 1.5 \text{ s} \Rightarrow ft = 1063 \pm 21 \text{ s} \Rightarrow |g_A| = 1.26$$

Combinant amb altres mesures s'obté: $g_A = -1.259 \pm 0.004$

Observe's les diferents ft , calculeu-les i justifiqueu els resultats. Classifiqueu les diferents transicions en F, GT i mescla

V-A

Regles de selecció: Transicions prohibides

- Prohibides de primer orde:

$$L=1, \Delta P = - \begin{cases} \text{F: } S=0, \Delta J = 0, \pm 1 \text{ (0 } \not\rightarrow 0) \\ \text{GT: } S=1, \Delta J = 0, \pm 1, \pm 2 \end{cases}$$

$$\vec{J}_i = \vec{J}_f + \vec{L} + \vec{S}, \quad \vec{S} = \vec{s}_e + \vec{s}_\nu$$

$$|J_f - 1| \leq J_i \leq J_f + 1$$

$$|J_f - 2| \leq J_i \leq J_f + 2$$

- Prohibides de segon orde:

$$L=2, \Delta P = + \begin{cases} \text{F: } S=0, \Delta J = \pm 2 \\ \text{GT: } S=1, \Delta J = \pm 2, \pm 3 \end{cases}$$

- El cas $\Delta J = \pm 1$ en GT no s'inclou ja que correspon a la transició permesa $\Delta J=1, S=1, L=0$, molt més probable.

- Prohibides de tercer orde:

$$L=3, \Delta P = - \begin{cases} \text{F: } S=0, \Delta J = \pm 3 \\ \text{GT: } S=1, \Delta J = \pm 3, \pm 4 \end{cases}$$

- El cas $\Delta J = \pm 2$ en GT no s'inclou ja que correspon a una transició prohibida de primer orde, amb $\Delta J = \pm 2, S=1, L=1$, molt més probable.

- Tan sols es coneix un cas de prohibides de quart orde:

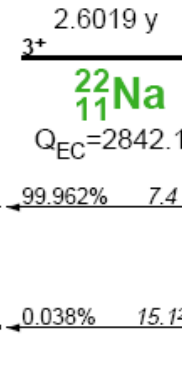
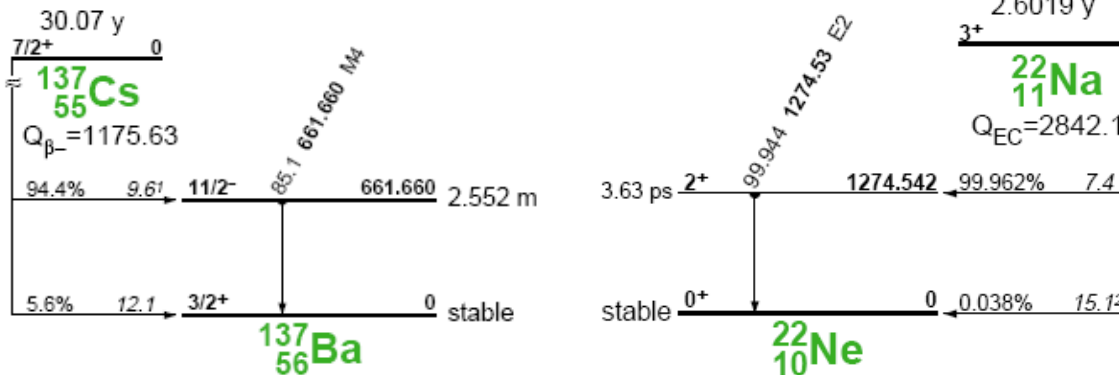
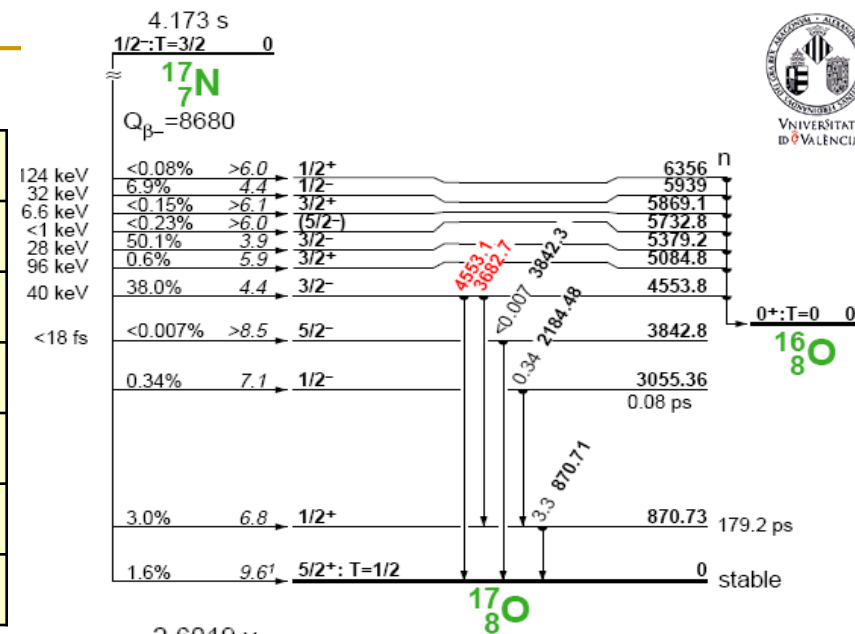
$$L=4, \Delta P = + \begin{cases} \text{F: } S=0, \Delta J = \pm 4 \\ \text{GT: } S=1, \Delta J = \pm 4, \pm 5 \end{cases}$$

$${}_{49}\text{In}(9/2^+) \rightarrow {}_{50}\text{Sn}(1/2^+) + e^- + \bar{\nu}_e$$

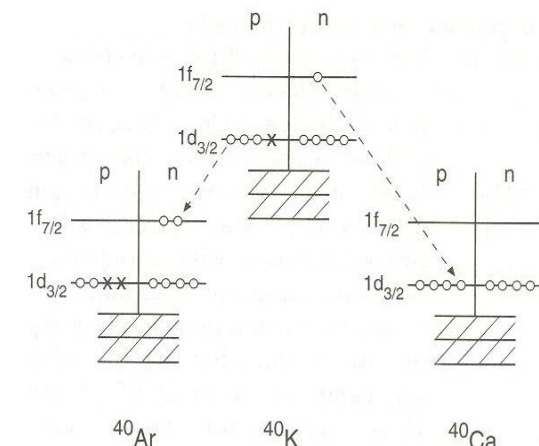
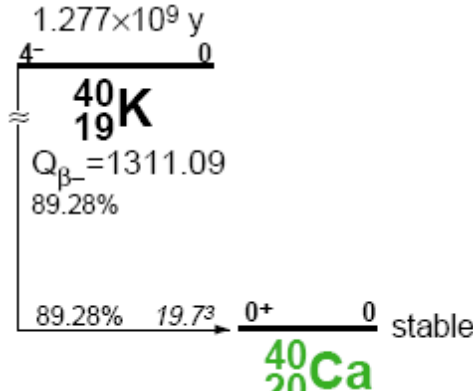
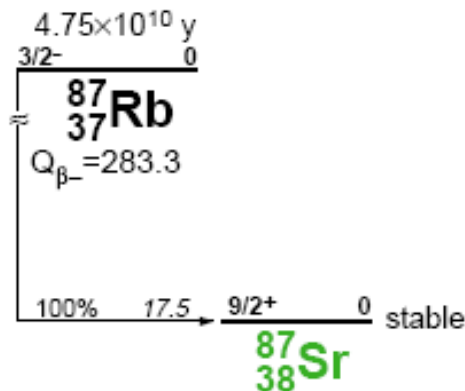
$$\log_{10} ft = 22.7, \quad T_{1/2} = 6 \times 10^{14} \text{ anys}$$

Exemples: (Definir procediment)

$L=1, S=1$	$^{17}\text{N} \rightarrow ^{17}\text{O}$	$\frac{1}{2}^- \rightarrow \frac{5}{2}^+$	GT (1 ^a prohibida)
$L=1, S=0$ $L=1, S=1$	$^{76}\text{Br} \rightarrow ^{76}\text{Se}$	$1^- \rightarrow 0^+$	F+GT (1 ^a prohibida)
	$^{122}\text{Sb} \rightarrow ^{122}\text{Sn}^*$	$2^- \rightarrow 2^+$	F+GT (1 ^a prohibida)
	$^{22}\text{Na} \rightarrow ^{22}\text{Ne}$	$3^+ \rightarrow 0^+$	GT (2 ^a prohibida)
$L=2, S=0$ $L=2, S=1$	$^{137}\text{Cs} \rightarrow ^{137}\text{Ba}$	$\frac{7}{2}^+ \rightarrow \frac{3}{2}^+$	F+GT (2 ^a prohibida)
$L=3, S=0$ $L=3, S=1$	$^{87}\text{Rb} \rightarrow ^{87}\text{Sr}$	$\frac{3}{2}^- \rightarrow \frac{9}{2}^+$	F+GT (3 ^a prohibida)
$L=3, S=1$	$^{40}\text{K} \rightarrow ^{40}\text{Ca}$	$4^- \rightarrow 0^+$	GT (3 ^a prohibida)

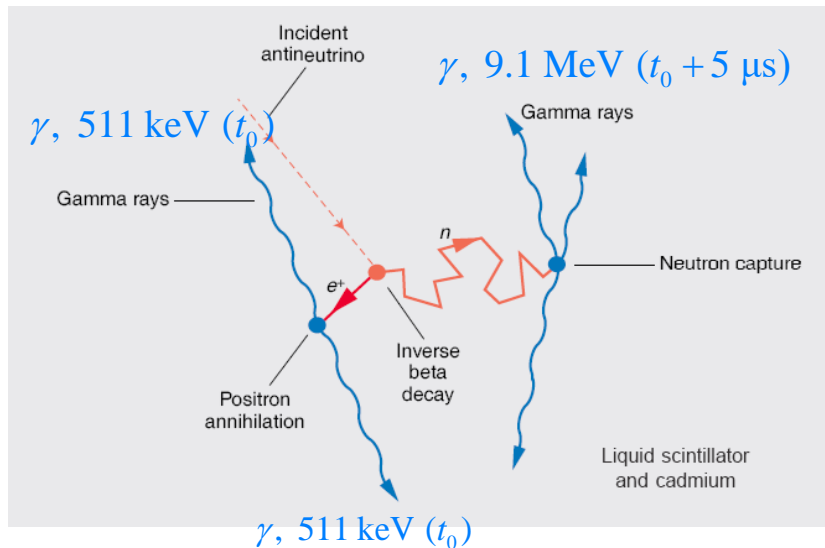
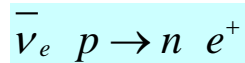


Observe's les diferents ft , calculeu-les i justifiqueu els resultats. Classifiqueu les diferents transicions en F, GT i mescla



L'experiment de Reines i Cowan

- L'observació directa del neutrí va ocórrer 23 anys (1955) després de la proposta de Pauli/Fermi en els experiments de Frederic Reines i Clyde Cowan (*Projecte **Poltergeist***).
- La font de neutrins va ser el reactor nuclear *de Savannah River* amb una potència de 1 GW.
- Els fragments de fissió són molt rics en nuclis inestables β^- \Rightarrow font d'antineutrins: ≈ 6 anti-neutrins/fissió \Rightarrow el flux d'antineutrins al reactor és molt elevat: $\phi \approx 10^{13} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$
- La detecció de l'antineutrí es du a terme per mitjà de la reacció β^- inversa



La nova idea per a detectar el neutrí era detectar ambdós productes de la reacció **beta inversa** en què un anti-neutrí (línia roja a traços) interacciona amb un protó per mitjà de la **força dèbil**. L'anti-neutrí i el protó interaccionen dèbilment produint un positró i un neutró. La reacció té lloc en un detector de centelleig líquid. La línia sòlida, curta i roja indica que un instant després de produir-se el positró, troba un electró del mig material, aniquilant-se partícula i antipartícula, amb l'emissió de dos fotons en direccions oposades (per conservació del moment i energia). Estos fotons originen instantàniament una potent llampada de llum. El neutró mentrestant emprèn un camí erràtic (línia sòlida roja) fins que és capturat per un nucli de Cadmi. El nucli excitat que es forma, es des-excita produint 9 MeV d'energia (en forma de rajos gamma) que de nou originen en el centellejador un flash de llum. Esta segon llampada ocorre com a mitjana diversos micro-segons després de la primera, el que representa la signatura de que s'ha produït la reacció beta inversa i confirma la presència dels (anti-) neutrins.



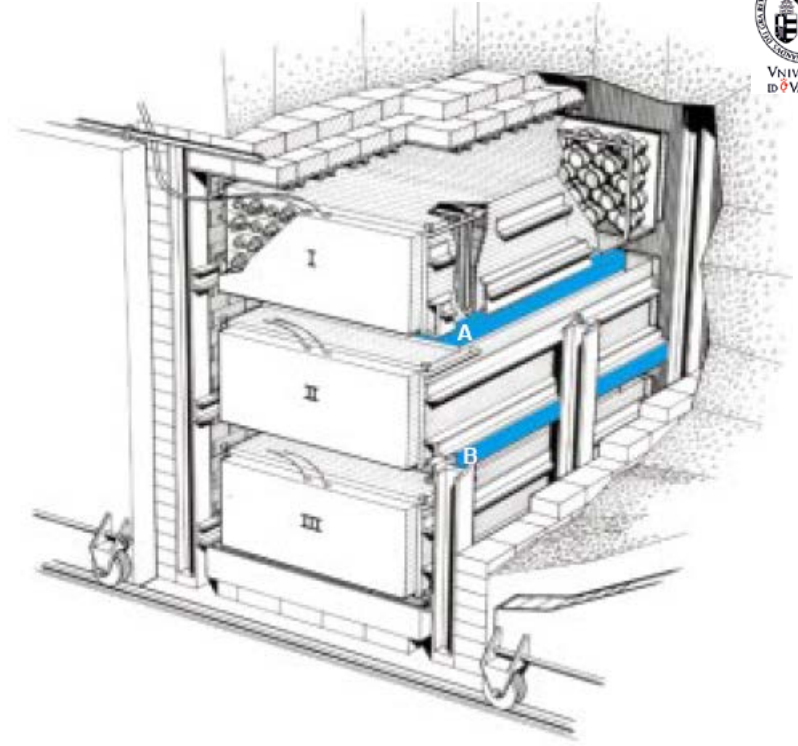
- El detector va consistir d'un 'sandwich' de 10 Tm (excloent blindatges) constituït per:
 - 2 tancs, A i B, de 200 l cada un amb una dissolució en aigua de clorur de cadmi:
 - Els protons de l'aigua representen el blanc de la reacció β inversa.
 - El cadmi, amb una secció eficaç gran per a captura de neutrons tèrmics, és el blanc de la captura radiativa del neutrons.
 - 3 detectors de centellejador líquid, I, II i III, cada un de 1400 l.
- Utilització d'una tècnica de coincidència retardada per a la detecció dels fotons d'aniquilació i de la captura del neutró.
- L'obtenció de la probabilitat del procés β invers és semblant al cas de la CE, però intercanviant els rols del neutrí i l'electró (positró):

$$dn \equiv dn_e = \frac{p^2 dp V}{2\pi^2 \hbar^3} \quad \frac{dn}{dT_e} = \frac{dn}{dp} \frac{dp}{dT_e}$$

Procés β invers: $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$

$$E_e^2 = (pc)^2 + (m_e c^2)^2 = (T_e + m_e c^2)^2 \Rightarrow (pc)^2 = T_e^2 + 2T_e m_e c^2 \Rightarrow c^2 pdp = (T_e + m_e c^2) dT_e \Rightarrow \frac{dp}{dT_e} = \frac{E_e}{pc^2}$$

□ Per tant:
$$\lambda_{\beta_{\text{inv}}} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{G_F^2}{V} |U_{fi}|^2 \frac{dn}{dT_e} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{G_F^2}{V} |M_{fi}|^2 \frac{p^2 V}{2\pi^2 \hbar^3} \frac{E_e}{pc^2} = G_F^2 |U_{fi}|^2 \frac{pc}{\pi \hbar^4 c^3} E_e$$



$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } T_p \approx T_n \approx 0, \quad E_\nu + m_p c^2 \approx m_n c^2 + T_e + m_e c^2 \\ q \approx p \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} E_e \approx E_\nu + (m_p - m_n) c^2 \approx E_\nu - 1.3 \text{ MeV} \\ E_\nu \approx pc \end{cases}$$

Valor llindar de E_ν per la reacció β inversa

- És precis ara tindre en compte incloure la captura del antineutrí del feix amb flux ϕ . Com que el antineutrí és una partícula lliure, $|\bar{\nu}_e\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} \Rightarrow |\psi_\nu|^2 = \frac{1}{V}$, i $\phi = c/V$,

$$\sigma = \frac{\lambda_{\beta\text{inv}}}{\phi} = \frac{G_F^2 |U_{fi}|^2 \frac{pc}{\pi \hbar^4 c^3} E_e |\psi_\nu|^2}{c/V} = G_F^2 |U_{fi}|^2 \frac{pc}{\pi \hbar^4 c^4} E_e \approx 5 G_F^2 \frac{E_\nu (E_\nu - 1.3 \text{ MeV})}{\pi \hbar^4 c^4}$$

ya que $|U_{fi}|^2 = \langle F \rangle^2 + g_A^2 \langle GT \rangle^2 \approx 1 + 3g_A^2 \approx 4.8$, valors ja calculats.

- Per E_ν mitjana $\sim 2 \text{ MeV}$, la secció eficaç esperada es $\sigma \approx 1.14 \times 10^{-43} \text{ cm}^2 = 1.14 \times 10^{-19} \text{ b}$
 - Extraordinàriament xicoteta! Compare's amb la secció eficaç típica nuclear.
- Si la densitat de protons és $n = 10^{24} \text{ protons/cm}^3$ (densitat de protons en l'aigua), la probabilitat neta de reacció **per a un neutrí** és: $n\sigma \approx 10^{-43} \text{ cm}^2 \times 10^{24} \text{ cm}^{-3} = 10^{-19} \text{ cm}^{-1}$
 - El neutrí hauria de recórrer com a mitjana 10^{19} cm d'aigua (10 anys/llum) per a produir un procés β invers (amb probabilitat 50%) \Rightarrow complexitat de l'experiment i els 25 anys d'espera
- Gràcies a l'elevat flux d'antineutrins procedents del reactor, Reines i Cowan van detectar 36 ± 4 successos a l'hora, corresponent a $\sigma_{\text{exp}} = (1.1 \pm 0.3) \times 10^{-43} \text{ cm}^2$, consistent amb l'esperada.
 - Van realitzar altres experiments per a verificar de manera concloent l'observació.
- Este experiment va mostrar que el neutrí era una partícula real (encara que elusiva, quasi un 'fantasma') i que no era una invenció *ad hoc* purament formal.

3. Desintegració γ

Vides mitjanes. Estimadors de Weisskopf

- La vida mitjana radiativa (gamma) d'un estat nuclear està directament relacionada amb l'amplària intrínseca Γ_γ de l'estat (transicions radiatives significa amb emissió de fotons):

$$\Gamma_\gamma \equiv \Delta E_\gamma \quad \lambda = 1/\tau_\gamma = \Gamma_\gamma / \hbar \quad \text{ja que pel P.I. de } H \rightarrow \tau_\gamma \Gamma_\gamma \approx \hbar$$

- L'amplària total de l'estat és en general major que l'amplària radiativa, a causa de la contribució a esta del procés de conversió interna:

$$\lambda_{\text{tot}} = \lambda_{\text{rad}(\gamma)} + \lambda_{\text{CI}}$$

- El càlcul de la probabilitat de transició radiativa per a una multi-polaritat donada requereix un càlcul mecano-quàntic precís.
- No obstant això, es pot també determinar per mitjà d'una **aproximació** semi-clàssica:
 - La potència radiada $W_{L,m}^{(\sigma)}$ (energia per unitat de temps) per un multi-pol (L,m) en la teoria clàssica de la radiació pot entendre's com a potència radiada en forma de fotons d'energia

$$E_\gamma = \hbar\omega \quad (L \text{ representa l'orde de la multi-polaritat}).$$

- La probabilitat d'emissió de fotons per unitat de temps és:

$$\lambda_{L,m}^{(\sigma)} \cong \frac{W_{L,m}^{(\sigma)}}{\hbar\omega} = \frac{2(L+1)}{\varepsilon_0 \hbar L [(2L+1)!!]^2} \left(\frac{\omega}{c} \right)^{2L+1} m_{L,m}^{(\sigma)}$$

$\sigma = E, M$ on E, M representen les transicions elèctriques o magnètiques respectivament.

- A continuació, els **moments multipolars** han de reemplaçar-se pels corresponents **operadors multipolars** que:

- Passen el nucli del seu estat inicial ψ_i a l'estat final ψ_f :

$$m_{L,m}^{(\sigma)} \rightarrow \int \psi_f^* m_{L,m}^{(\sigma)} \psi_i d^3 \vec{r}$$

- Creen un fotó d'energia, paritat i multi-polaritat adequada.

- Si no hi ha polarització caldrà sumar sobre m , la distribució angular serà isòtropa, i per tant els moments multi-polars tan sols dependran de L :

$$m_{fi}(\sigma L) = \int \psi_f^* m_L^{(\sigma)} \psi_i d^3 \vec{r}$$

- **Aproximació:** els estats inicial ψ_i i final ψ_f són dos estats de **protó individual** del model de capes esfèric amb valors definits del moment angular total (J, M).
- Estimadors de Weisskopf:

$$\lambda(EL) = \frac{2\pi(L+1)\alpha}{L[(2L+1)!!]^2} \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c} \right)^{2L+1} \left(\frac{3}{L+3} \right)^2 cR^{2L}$$

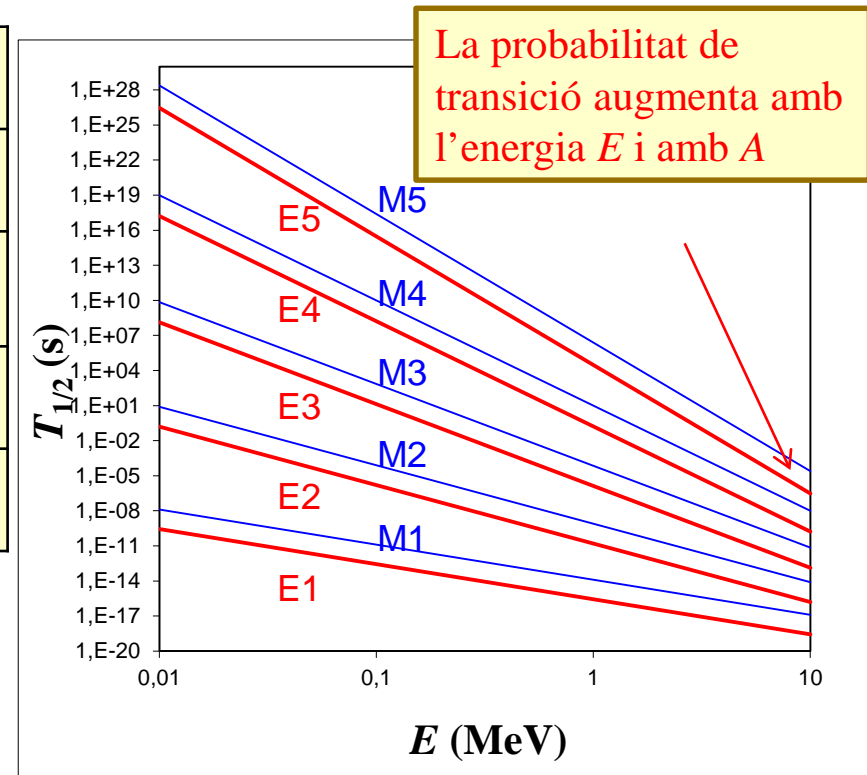
Cal no oblidar que els estimadors de Weisskopf no són càlculs teòrics exactes que es pugen comparar sense més amb les dades experimentals

$$\lambda(ML) = \frac{2\pi(L+1)\alpha}{L[(2L+1)!!]^2} \left(\mu_p - \frac{1}{L+1} \right)^2 \left(\frac{\hbar}{m_p c} \right)^2 \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c} \right)^{2L+1} \left(\frac{3}{L+2} \right)^2 cR^{2L-2} \frac{1}{2}$$

- Prenent $R \approx R_0 A^{1/3}$ i aproximant $[\mu_p - 1/(L+1)]^2 \approx 10$ s'obtenen les estimacions per als ordres multipolars més baixos:

$[\lambda(\text{s}^{-1}) \text{ y } E_\gamma(\text{MeV})]$

$\lambda(E1) = 1.0 \times 10^{14} A^{2/3} E_\gamma^3$	$\lambda(M1) = 5.6 \times 10^{13} A^0 E_\gamma^3$
$\lambda(E2) = 7.3 \times 10^7 A^{4/3} E_\gamma^5$	$\lambda(M2) = 3.5 \times 10^7 A^{2/3} E_\gamma^5$
$\lambda(E3) = 3.4 \times 10^1 A^2 E_\gamma^7$	$\lambda(M3) = 1.6 \times 10^1 A^{4/3} E_\gamma^7$
$\lambda(E4) = 1.1 \times 10^{-5} A^{8/3} E_\gamma^9$	$\lambda(M4) = 4.5 \times 10^{-6} A^2 E_\gamma^9$
$\lambda(E5) = 2.4 \times 10^{-12} A^{10/3} E_\gamma^{11}$	$\lambda(M5) = 7.4 \times 10^{-13} A^{8/3} E_\gamma^{11}$



Representació gràfica dels valors dels estimadors de Weisskopf per a $A = 125$

Conclusions:

- 1) Representen estimacions i no càlculs exactes.
- 2) Dominen les multi-polaritats baixes. Increment d'una unitat en multi-polaritat \rightarrow factor = 10^{-5} en λ
- 3) $\lambda(EL) > \lambda(ML)$ per a la mateixa multi-polaritat en dos ordres de magnitud.

Regles de selecció

- En la interpretació de l'emissió de radiació electromagnètica 2^L -polar (ja siga semi-clàssica o purament mecano-quàntica) es considera que cada fotó porta un **moment angular** $L\hbar$.
 - Un multi-pol d'orde L inclou un factor $Y_{L,m}$ en l'operador de la transició.
- Per tant, per conservació de moment angular:

$$\vec{J}_i = \vec{L} + \vec{J}_f \rightarrow |J_i - J_f| \leq L \leq J_i + J_f \quad (L \neq 0)$$

- La conservació de la paritat en interaccions electromagnètiques imposa per a les transicions radiatives:

$$\left. \begin{array}{l} P(ML) = (-1)^{L+1} \\ P(EL) = (-1)^L \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \Delta P = + \text{ per a transicions par elèctrica i senar magnètica} \\ \Delta P = - \text{ per a transicions senar elèctrica i par magnètica} \end{cases}$$

- Casos particulars a la regla de selecció general:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \rightarrow J \neq 0 \\ J \neq 0 \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow J \leq L \leq J \text{ (c.m.a.)} \Rightarrow \text{tan sols contribueix un multi-pol d'orde } L$$

$$\text{Transicions } J_i = J_f \neq 0 \Rightarrow 1 \leq L \leq 2J_i \Rightarrow L \neq 0$$

Les transicions radiatives
no poden ser $L=0$

$$\text{Transicions } 0 \rightarrow 0 \Rightarrow \text{no contribueix cap multi-pol} \Rightarrow \text{transició radiativa prohibida}$$

- Les transicions $0^+ \rightarrow 0^+$ (que requereixen $L=0$) només poden tindre lloc per mitjà de processos no radiatius (és a dir mitjançant la conversió interna o CI: són les **transicions anomenades E0**).

- En general, les regles de selecció donen distints possibles valors de L , permetent la contribució de distints *multipols* (E i M):
 - Podem usar els estimadors de Weisskopf per a estimar la contribució relativa dels diferents multi-pols permesos que poden contribuir.
 - En general es verifica que:
 - Dominen els multi-pols permesos de menor orde:

$$\frac{\lambda(EL')}{\lambda(EL)} \approx 10^{-5} \quad \frac{\lambda(ML')}{\lambda(ML)} \approx 10^{-5} \quad (L' = L + 1)$$

Com además s'ha de conservar la paritat el següent orde que contribueix del mateix tipus és $L''=L+2$

- Per a un mateix orde de polaritat L , la radiació elèctrica domina sobre la magnètica:

$$\frac{\lambda(EL)}{\lambda(ML)} \approx 10^2$$

- Combinant ($L' = L + 1$):

$$\frac{\lambda(EL')}{\lambda(ML)} \approx 10^{-3} \Rightarrow EL' \text{ competeix amb } ML$$

$$\frac{\lambda(ML')}{\lambda(EL)} \approx 10^{-7} \Rightarrow ML' \text{ no competeix amb } EL$$

- No obstant les propietats dels estats nuclears poden modificar estes estimacions en diversos ordes de magnitud.
- Per exemple, en transicions entre estats de **models nuclears col·lectius** (per a nuclis massius) pot ocórrer: $\lambda(E2) > \lambda(M1)$

- Exemples: $\vec{J}_i = \vec{L} + \vec{J}_f \rightarrow |J_i - J_f| \leq L \leq J_i + J_f \quad (L \neq 0)$

No canvien la paritat

- Transició $\frac{3^+}{2} \rightarrow \frac{5^+}{2} \quad \Delta P = + \quad 1 \leq L \leq 4 \Rightarrow M1, E2, M3, E4$

Si prenem:
$$\left. \begin{array}{l} A=125 \\ E_\gamma = 1 \text{ MeV} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda(M1) \div \lambda(E2) \div \lambda(M3) \div \lambda(E4) \\ 1 \div 1.4 \times 10^{-3} \div 2.1 \times 10^{-10} \div 1.3 \times 10^{-13} \end{array} \right.$$

Contribueix la radiació $M1$ (magnètica amb $L=1$) amb una petita contribució de la $E2$ (elèctrica amb $L=2$), que en general caldrà considerar.

Sí canvien la paritat

- Transició: $\frac{3^+}{2} \rightarrow \frac{5^-}{2} \quad \Delta P = - \quad 1 \leq L \leq 4 \Rightarrow E1, M2, E3, M4$

Si prenem:
$$\left. \begin{array}{l} A=125 \\ E = 1 \text{ MeV} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda(E1) \div \lambda(M2) \div \lambda(E3) \div \lambda(M4) \\ 1 \div 2.3 \times 10^{-7} \div 2.1 \times 10^{-10} \div 2.1 \times 10^{-17} \end{array} \right.$$

tan sols contribueix la radiació $E1$.

- En general per tant, si la contribució dominant és magnètica, cal considerar una petita contribució elèctrica. Si pel contrari, la radiació dominant és elèctrica, la següent contribució magnètica és negligible.

Desintegració per conversió interna (CI)

- La probabilitat de desintegració total d'un estat serà:

$$\lambda_{\text{tot}} = \lambda_{\text{rad}(\gamma)} + \lambda_{\text{CI}}$$

- Coeficient α de conversió interna:

$$\alpha = \frac{\lambda_{\text{CI}}}{\lambda_{\gamma}} \quad \lambda = \lambda_{\gamma}(1 + \alpha)$$

Definició: és la relació de probabilitat d'emissió d'electrons de conversió interna relativa a l'emissió γ , **amb la que competeix**.

- Els **coeficients de conversió parcials** (corresponents a cada capa o sub-capça atòmica) són:

$$\alpha = \alpha_K + \alpha_L + \alpha_M + \dots$$

$$\alpha_L = \alpha_{L_I} + \alpha_{L_{II}} + \alpha_{L_{III}} + \dots$$

- L'element de matriu de la transició és semblant al de la desintegració γ , amb l'excepció que ara tenim la funció d'ona de l'electró abans i després de ser emés: $m_{L,m}^{(\sigma)} \rightarrow \int \psi_f^* m_{L,m}^{(\sigma)} \psi_i d^3r$

$$\left. \begin{array}{l} \psi_i = \psi_{i,N} \psi_{i,e} \\ \psi_f = \psi_{f,N} \psi_{f,e} \end{array} \right\} \psi_{i,e}(\vec{r}_e) = \psi_{i,e}(0) \quad \psi_{f,e} = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_e} \text{ (partícula lliure)}$$

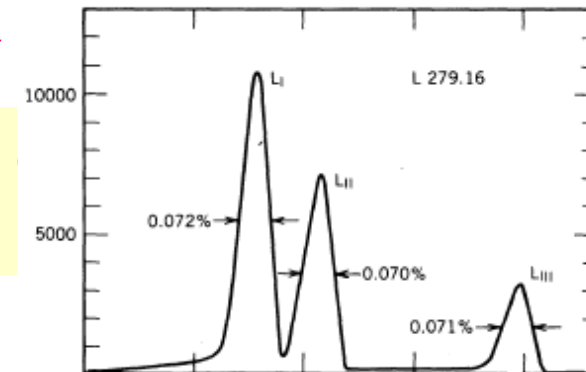
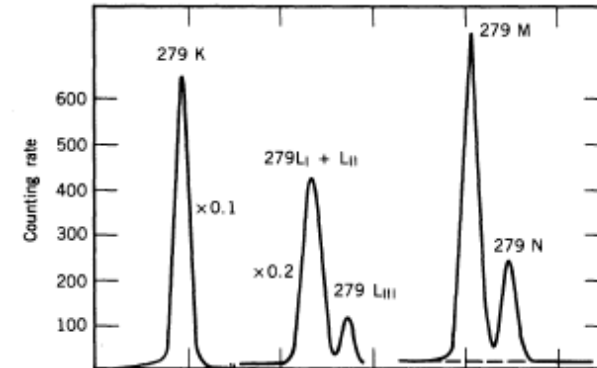
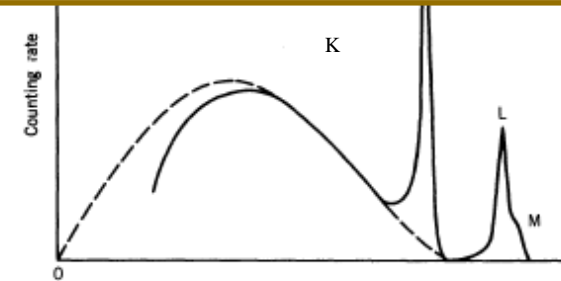
- La part nuclear de l'element de matriu nuclear és idèntica a la dels processos radiatius $\Rightarrow \alpha$ és independent dels detalls de l'estructura nuclear.

Les energies dels processos competitiu radiatiu (emissió γ) i per CI, en les diferents capes atòmiques són:

$$E_{\gamma} = 279 \text{ keV}; E_e(K) = 193 \text{ keV}; E_e(L) = 263 \text{ keV}; E_e(M) = 275 \text{ keV}$$

$$\text{on es verifica } E_{\gamma} = E_{\text{CI}}(K, L..) + B_e(K, L..)$$

Espectre dels e^- del ^{203}Hg : el continu correspon a la desintegració beta, els pics als processos CI en capes K, L i M, del nucli fill en funció de la resolució del detector



- Càlcul semi-clàssic (no relativista) dona:

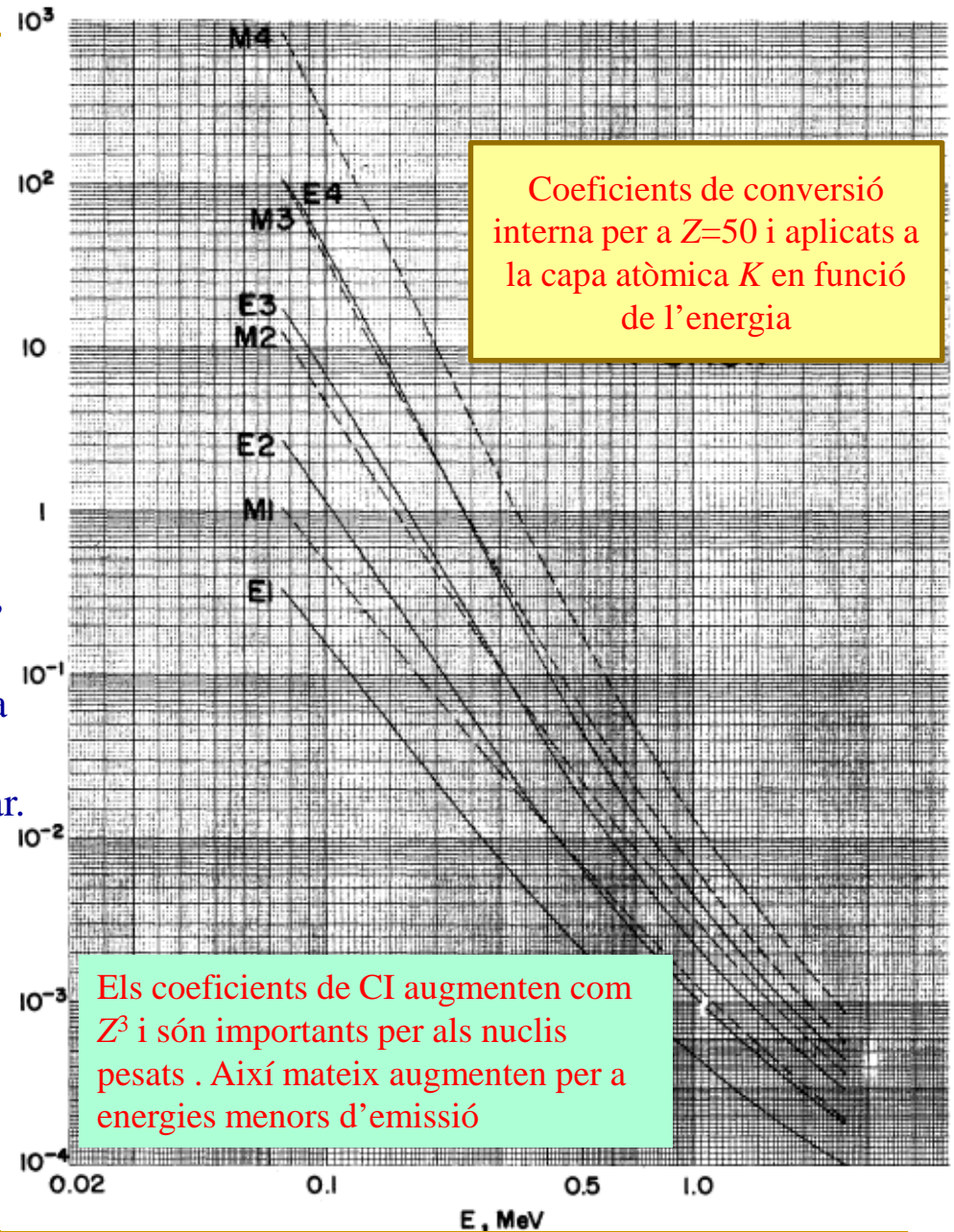
$$\alpha(EL) \approx \frac{Z^3}{n^3} \alpha^4 \left(\frac{L}{L+1} \right) \left(\frac{2m_e c^2}{E_e} \right)^{L+5/2}$$

$$\alpha(ML) \approx \frac{Z^3}{n^3} \alpha^4 \left(\frac{2m_e c^2}{E_e} \right)^{L+3/2}$$

- Z : número atòmic.
 - n : número quàntic principal de la funció d'ona de l'electró ($n = 1, 2, 3, \dots$ per a les capes atòmiques K, L, M, \dots).
 - La diferent dependència de α per a EL i ML pot utilitzar-se per a determinar el tipus i orde multipolar.
- Els coeficients de CI estan àmplia i exhaustivament tabulats (taules i gràfiques).
- Exemples numèrics:

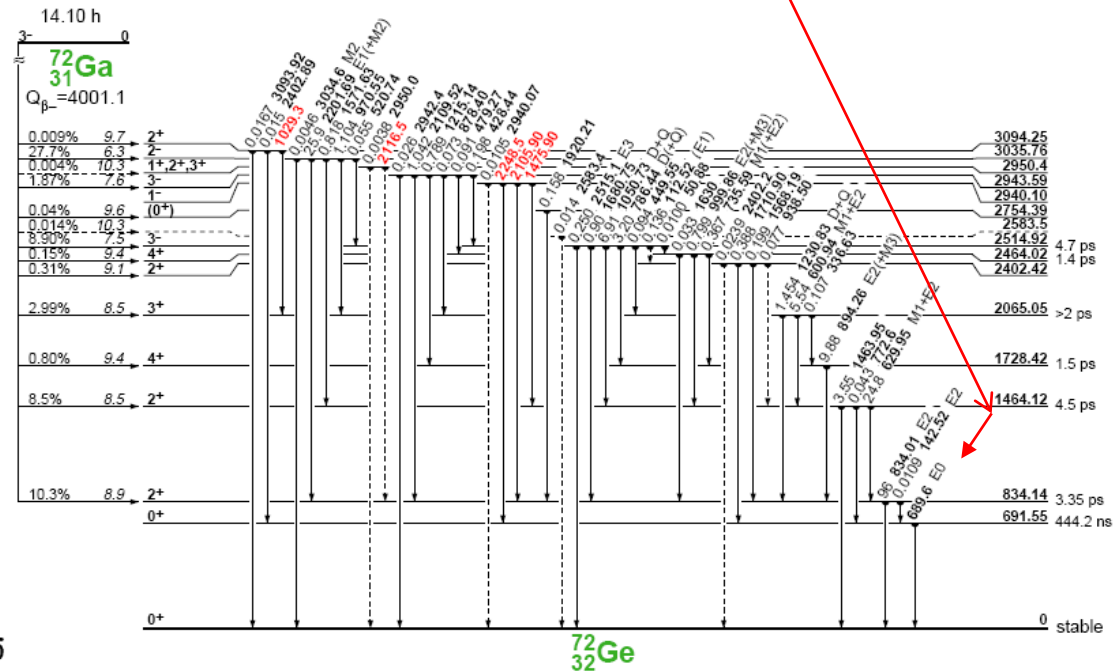
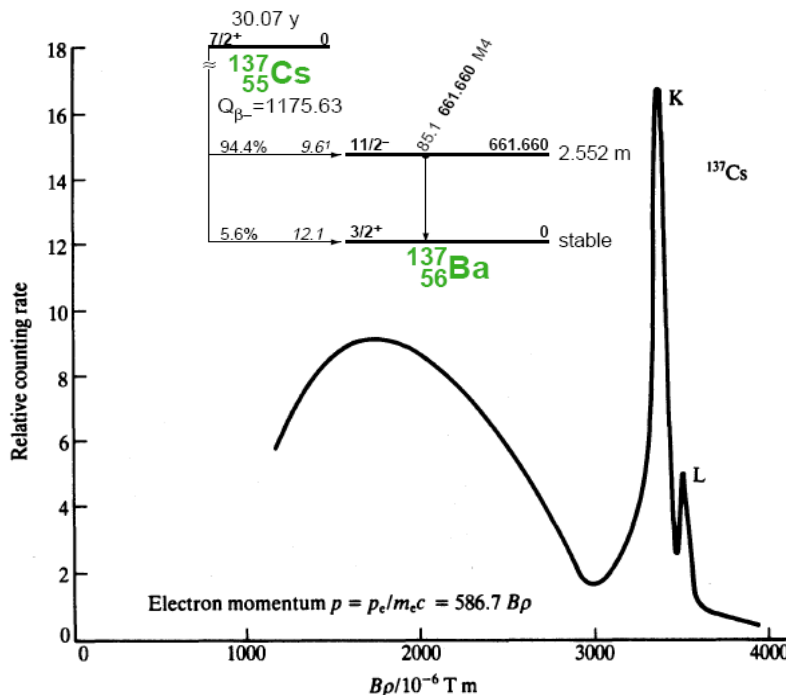
$$\alpha_K(^{22}\text{Ne}) = 6.8 \times 10^{-6} \quad \alpha_{K,M1}(^{99}\text{Tc}) = 0.10$$

$$\alpha_K(^{182}\text{W}) = 2.5 \times 10^{-3} \quad \alpha_{K,M4}(^{99}\text{Tc}) = 30$$



- Les regles de selecció són les mateixes, on l'electró transporta un moment angular L , ara però la transició $0 \rightarrow 0$ està permesa (estes transicions es representen com E0).
- En estes transicions $0 \rightarrow 0$ només és possible la conversió interna.
- No s'ha trobat cap transició $0 \rightarrow 0$ amb canvi de paritat.

Exemples:



$E_\gamma = 661 \text{ keV}$; $E_e(K) = 624 \text{ keV}$; $E_e(L) = 655 \text{ keV}$; $E_e(M, N, O) = 660 \text{ keV}$
 on es verifica $E_\gamma = E_{CI}(K, L..) + B_e(K, L..)$

Observe's que al laboratori observariem l'espectre d'electrons que apareix en la figura, però els electrons mono-energètics de CI corresponen al nucli fill

- S'ha detectat algun cas de producció de parelles $e^+ e^-$ interna com és el cas de la desintegració de l'estat $^{16}\text{O}^*$ de 6.05 MeV $^{16}\text{O}^*(6.05 \text{ MeV}) \rightarrow ^{16}\text{O} + e^+ + e^-$

Tema 8:

La fissió i la fusió nuclears

1. Introducció

2. Fissió nuclear

- 2.1 Fites històriques i aspectes generals de la fissió
- 2.3 Model de la gota líquida i fórmula semi-empírica
- 2.4 Energia d'activació
- 2.5 Característiques de la fissió
- 2.6 Energia en la fissió induïda
- 2.7 Absorció i moderació de neutrons

3. Reaccions de fissió controlada

- 3.1 Cicle de les reaccions de fissió controlada
- 3.2 Grandària crítica
- 3.3 Dinàmica de les reaccions de fissió controlada
- 3.4 Components d'un reactor
- 3.5 Tipus de reactors i tipus de dissenys

4. Fusió nuclear

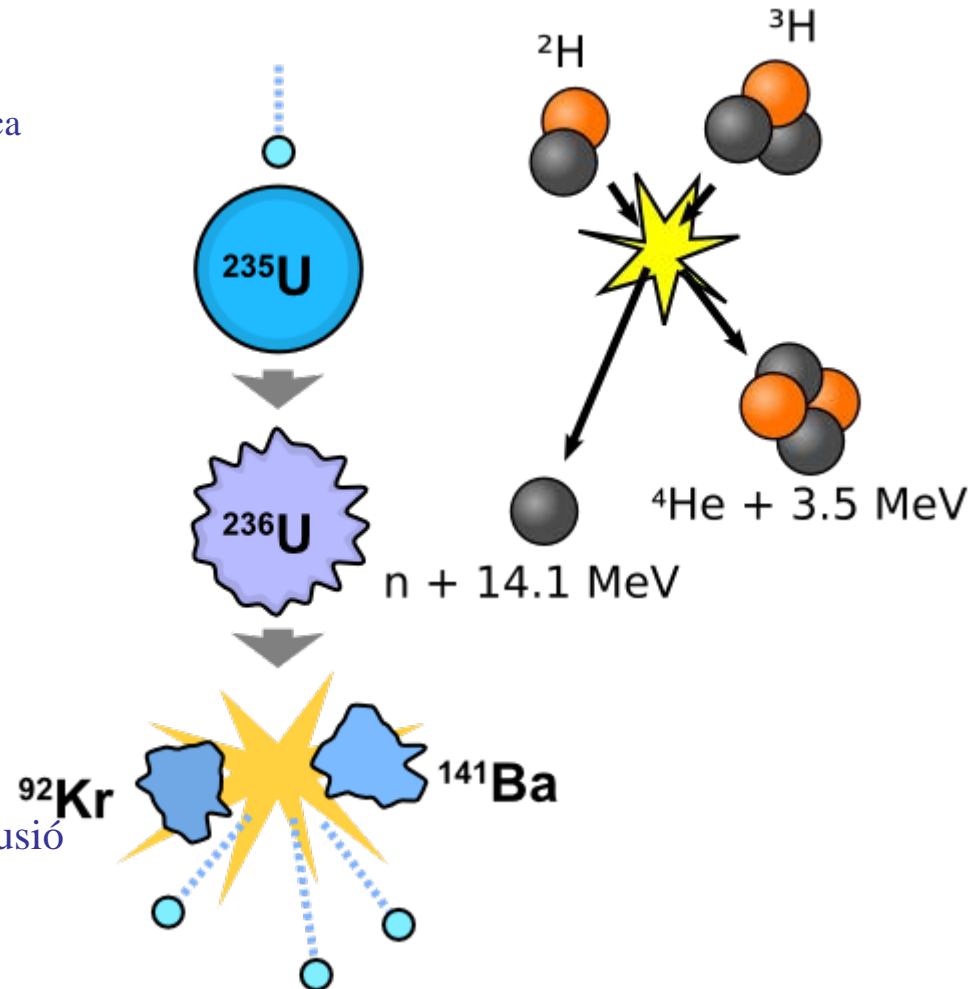
- 4.1 Consideracions generals
- 4.2 Processos bàsics
- 4.3 Característiques de les reaccions de fusió

5. Reaccions de fusió controlada. Reactors de fusió

- 5.1 Confinament magnètic: Tokamaks
- 5.2 Projecte ITER

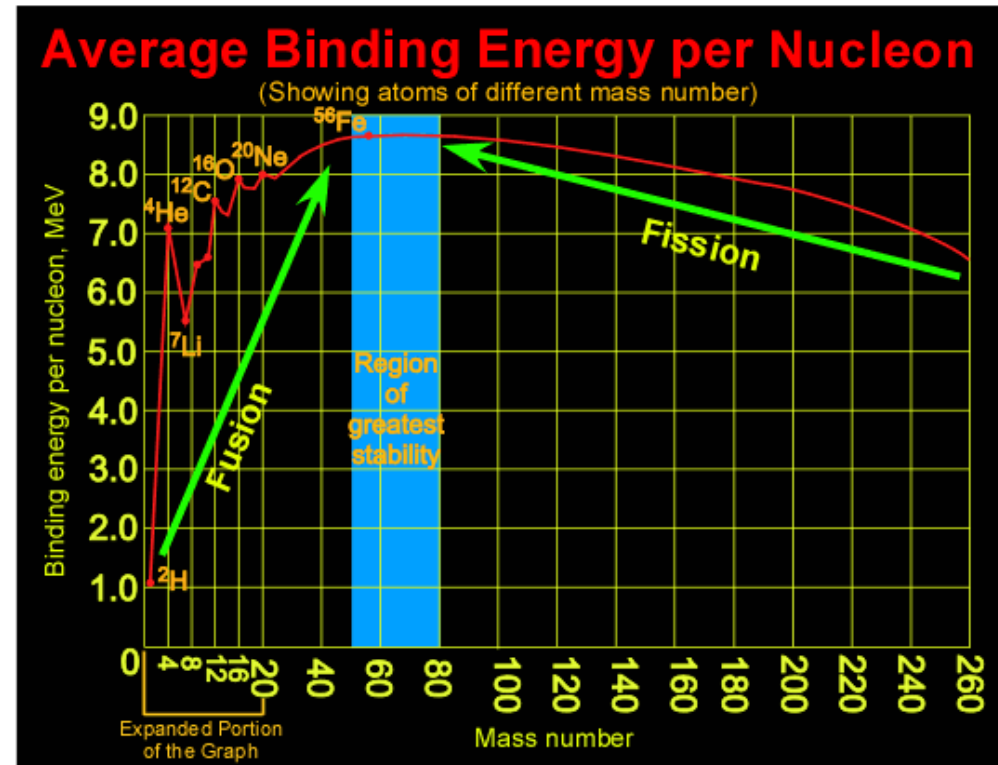
6.1 Confinament inercial

6. Nucleosíntesi estel·lar



1. Introducció

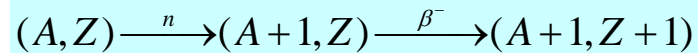
- Dos dels tipus de reaccions nuclears mes importants són la fissió i la fusió.
- En la fissió, un nucli pesat ($Z > 90$) pot fragmentar-se en dos nuclis semblants més alguns neutrons, bé de forma espontània, bé per absorció de partícules de molt baixa energia (n ó γ).
 - Per a $A > 120$ el procés permet alliberar energia.
- En la fusió, dos nuclis lleugers es poden combinar per a donar un nucli més pesat. Per a $A < 60$ el procés permet alliberar també energia.
- En els reactors de fusió, el procés dominant és a través de la interacció forta, mentre que en el Sol, la interacció que controla el procés és la interacció dèbil de dos protons: $p + p \rightarrow d + e^+ + \bar{\nu}_e$
- La fissió i fusió estan íntimament relacionades amb la producció d'energia.
- La fusió té lloc de manera natural en els processos estel·lars, per la qual cosa està íntimament relacionada amb l'Astrofísica i la Cosmologia (Nucleosíntesi estel·lar).
- La fissió i la fusió ocorren en llocs oposats de la taula periòdica.



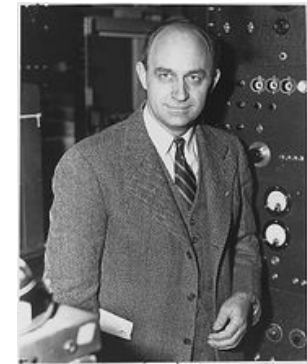
2. La fissió nuclear

Fites històriques

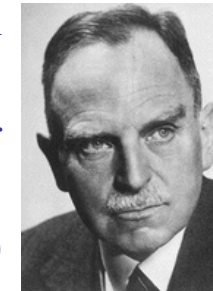
- Poc després del descobriment del neutró per J. Chadwick en 1932, Fermi va realitzar experiments de captura neutrònica per nuclis, observant la producció de nous isòtops del mateix element, que posteriorment es desintegren via β^- (com a mecanisme per a compensar l'excés de neutrons):



- Es va explicar el procés de formació de nuclis per a $A > 56$ en les etapes finals de les estrelles (supernoves).
- Va permetre sintetitzar els primers elements transuranis a partir de la irradiació d'urani.
- En 1938, O. Hahn i F. Strassmann identifiquen (químicament) bari en el bombardeig de sals d'urani amb neutrons tèrmics.
- En 1939, Lise Meitner i Otto Frisch interpreten que la fissió nuclear està tenint lloc en l'experiment de Hahn-Strassmann (fissió induïda).
- En 1943, Fermi construeix el primer reactor de fissió en cadena controlada (CP-I, U. de Chicago).
- En 1945 s'efectua el primer assaig d'una bomba de fissió, i en 1952 s'assaja la primera bomba termonuclear (fissió i fusió).



*Enrico Fermi
Otto Hahn i F Strassmann*

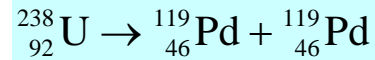


Lise Meitner

Aspectes generals de la fissió

- La fissió és conseqüència de la competició entre les **forces nuclears atractives** proporcionals amb A , la força repulsiva coulombiana $\propto Z^2$ i la força superficial $\propto A^{2/3}$

- Exemple: fissió espontània del $^{238}_{92}\text{U}$:



- Energies de lligadura:

$$B_i(^{238}\text{U}) = 238 \times 7.6 \text{ MeV} = 1809 \text{ MeV}$$

$$B_i(2 \times ^{119}\text{Pd}) = 2 \times 119 \times 8,5 \text{ MeV} = 2033 \text{ MeV}$$

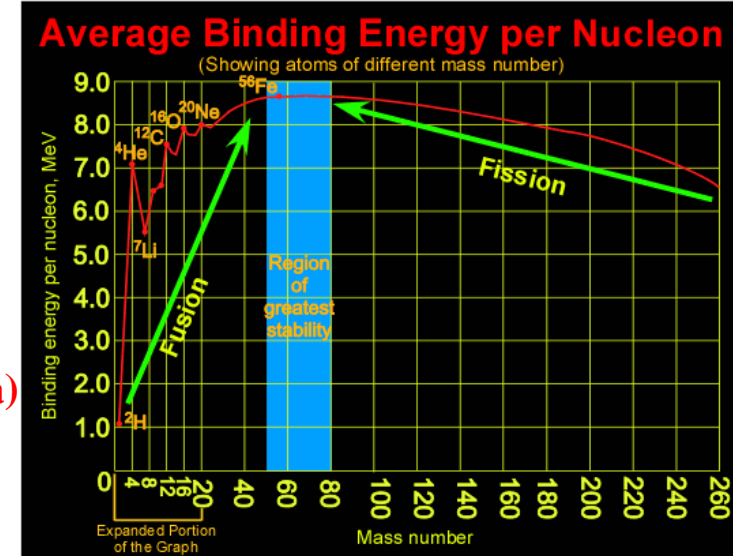
- Calor de reacció (energia alliberada en la fissió):

$$Q = M_i - M_f = B_f - B_i = 214 \text{ MeV} \quad (\text{hexo-energètica})$$

- En general, la fissió serà hexo-energètica quan afecte un nucli que es fissione en dos nuclis amb $A > 56$.

- No obstant això, no sempre serà competitiva enfront d'altres processos.

- Exemple: $^{238}_{92}\text{U} \rightarrow ^{119}_{46}\text{Pd} + ^{119}_{46}\text{Pd}$ no és competitiva enfront de $^{238}_{92}\text{U} \rightarrow ^{234}_{90}\text{Th} + \alpha$



Nuclide	Half-life	Fission prob. per decay (%)	Neutrons per fission
U-235	7.04×10^8 years	2.0×10^{-7} %	1.86
U-238	4.47×10^9 years	5.4×10^{-5} %	2.07
Pu-239	2.41×10^4 years	4.4×10^{-10} %	2.16
Pu-240	6,569 years	5.0×10^{-6} %	2.21
Cf-252	2.638 years	3.09 %	3.73

La fissió espontània augmenta amb A , i és competitiva per $A > 250$

$$\Rightarrow T_{1/2}(\alpha) \approx 4.5 \times 10^9 \text{ anys}$$

$$T_{1/2}(\text{fissió}) \approx 10^{16} \text{ anys}$$

Semi-vides parcials

En general la probabilitat de fissió augmenta amb A i A imparell.

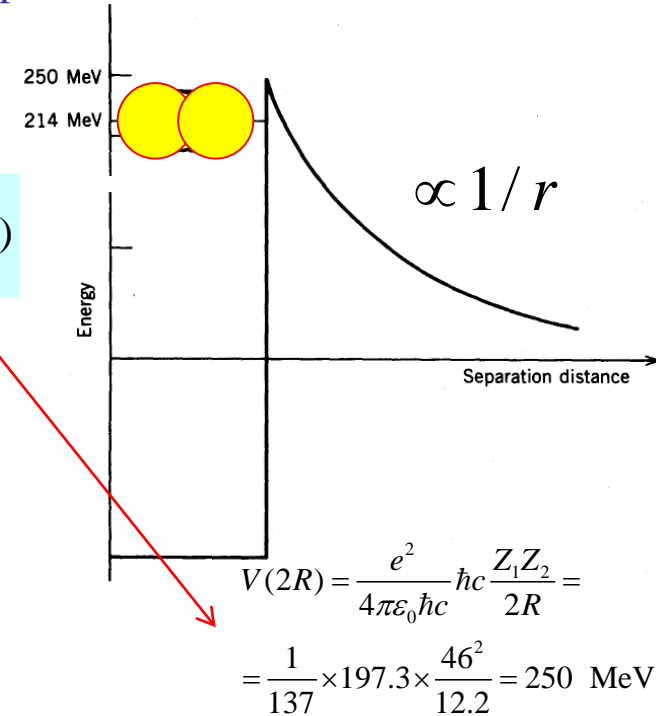
- La fissió pot entendre's com un procés de penetració de barrera semblant a la desintegració α :
 - Els nuclis de fissió tenen el seu estat fonamental per baix i prop de l'altura de la barrera de potencial, de manera que la **fissió espontània** està inhibida per la barrera coulombiana.
 - Exemple: ^{238}U

Si dividim el ^{238}U en dos fragments idèntics tot junts:

$$V(2R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_1 + R_2} \approx 250 \text{ MeV} \quad (R_1 \approx R_2 \approx 1.25 \times 119^{1/3} = 6.1 \text{ fm})$$

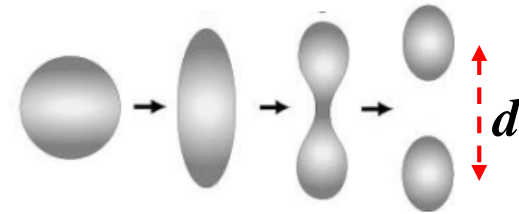
- La diferència entre l'altura de la barrera ($\sim 250 \text{ MeV}$) i l'energia disponible ($\sim 214 \text{ MeV}$) inhibeix la fissió espontània (encara que pot ocórrer per penetració de la barrera de potencial).
- Esta estimació és només aproximada (10-20%) ja que:

- ✓ Els nuclis de fissió són en general diferents.
- ✓ S'alliberen uns quants neutrons en la fissió, doncs els nuclis fill serien molt rics en neutrons.
- ✓ L'altura de la barrera es redueix en augmentar $A \Rightarrow$ Model de la gota líquida i fórmula semi-empírica de la massa.



El model de la gota líquida i la fórmula semiempírica

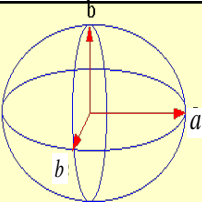
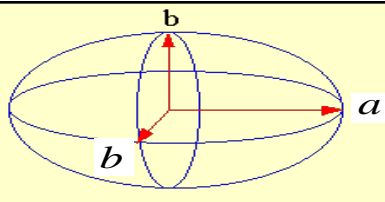
- El procés de fissió d'un nucli pot entendre's en els seus aspectes principals basant-se en el model de la gota líquida i la fórmula semi empírica de la massa.
- Si partim d'un nucli esfèric, el procés de fissió requerirà una estirada del mateix, que pot ser originada per una pertorbació (n, γ).



- Si este procés té lloc a volum constant, la desviació de l'el·lipsoide respecte de l'esfera vindrà determinada pel paràmetre d'excentricitat, que proporciona els dos semi eixos a i b :

$$a = R(1 + \varepsilon) \quad b = R(1 + \varepsilon)^{-1/2} \quad R^3 = ab^2 \quad \text{Deformació a volum constant, } \varepsilon \text{ infinitesimal}$$

- Com la deformació en matèria nuclear és a volum constant, només els termes de superfície i de Coulomb es veuran afectats en la fórmula semi-empírica de la massa:

 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$	 $V = \frac{4}{3}\pi ab^2$
$S \propto R^2$	$S \propto R^2(1 + \frac{2}{5}\varepsilon^2 + \dots)$
$E_c \propto R^{-1}$	$E_c \propto R^{-1}(1 - \frac{1}{5}\varepsilon^2 + \dots)$

Amb la deformació, augmenta l'energia superficial i minva l'energia de Coulomb

- En la deformació, s'origina una variació en l'energia de lligadura:

$$\Delta E = B(\varepsilon) - B(\varepsilon = 0) \approx -a_s A^{2/3} \left(1 + \frac{2}{5}\varepsilon^2 + \dots\right) - a_c Z^2 A^{-1/3} \left(1 - \frac{1}{5}\varepsilon^2 + \dots\right) + a_s A^{2/3} + a_c Z^2 A^{-1/3}$$

$$\Delta E \approx \left(-\frac{2}{5}a_s A^{2/3} + \frac{1}{5}a_c Z^2 A^{-1/3} \right) \varepsilon^2$$

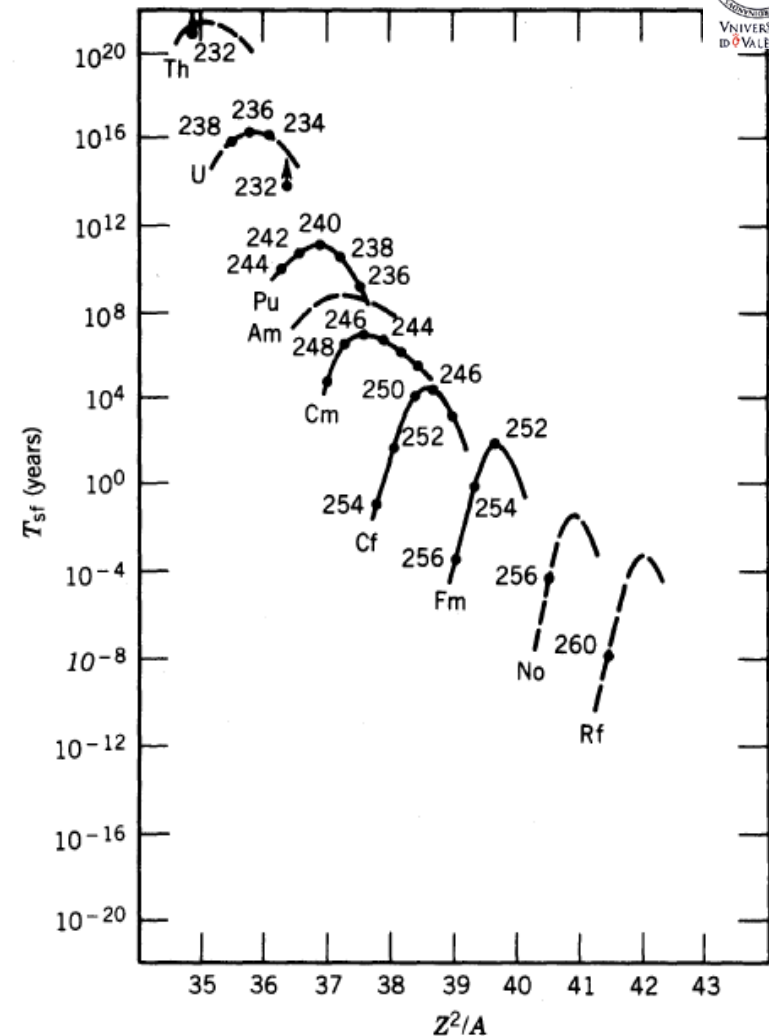
- La fissió serà energèticament possible si $\Delta E > 0$, la qual cosa requereix que el guany per l'energia de Coulomb siga major que la pèrdua per l'energia superficial:

$$a_c Z^2 A^{-1/3} > 2a_s A^{2/3}$$

- Prenent $a_s = 16.8$ MeV i $a_c = 0.72$ MeV:

$$\frac{Z^2}{A} > 47 \Rightarrow \begin{cases} Z > 114 \\ A > 270 \end{cases}$$

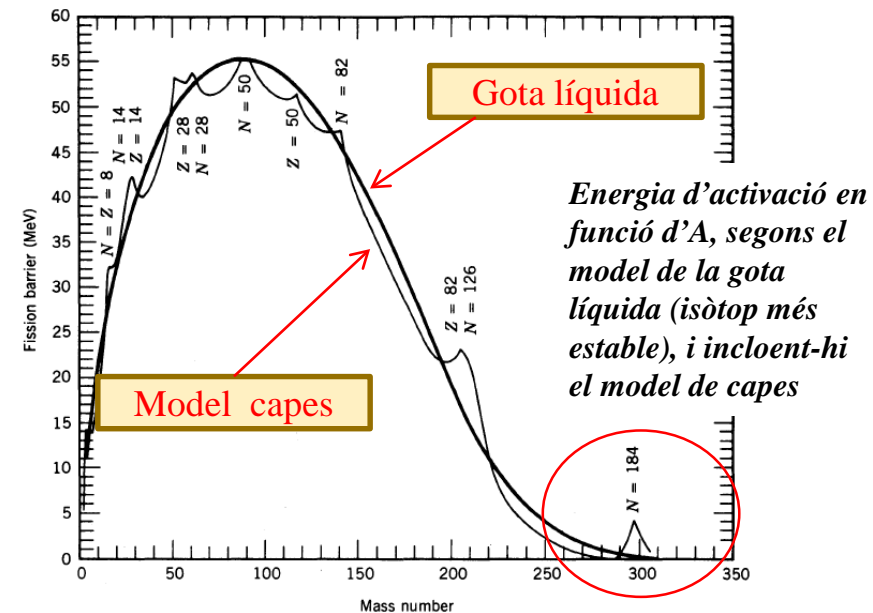
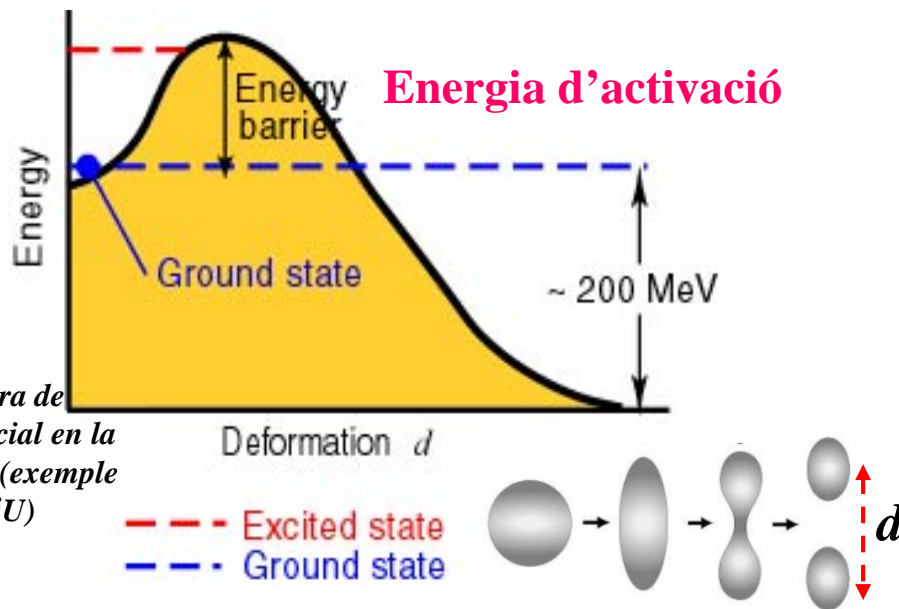
- Esta estimació no té en compte la deformació permanent dels nuclis.
- No obstant això, el factor Z^2/A és un bon indicador de la probabilitat de fissió espontània:
 - Quant major és Z^2/A major és la probabilitat de fissió.
 - Si és major que 47 \Rightarrow **fissió instantània** (nuclis amb $A > 270$) \Rightarrow nuclis inestables.
 - Si és menor, la fissió es pot produir per **penetració de barrera**, la creada per la força coulombiana i tensió superficial \Rightarrow **fissió espontània** (competitiva front a l'emissió α per a nuclis amb $A > 250$).



Vides mitjanes per a la fissió espontània, que augmenten a mesura que A decreix, doncs augmenta la altura de la barrera de potencial

Energia d'activació

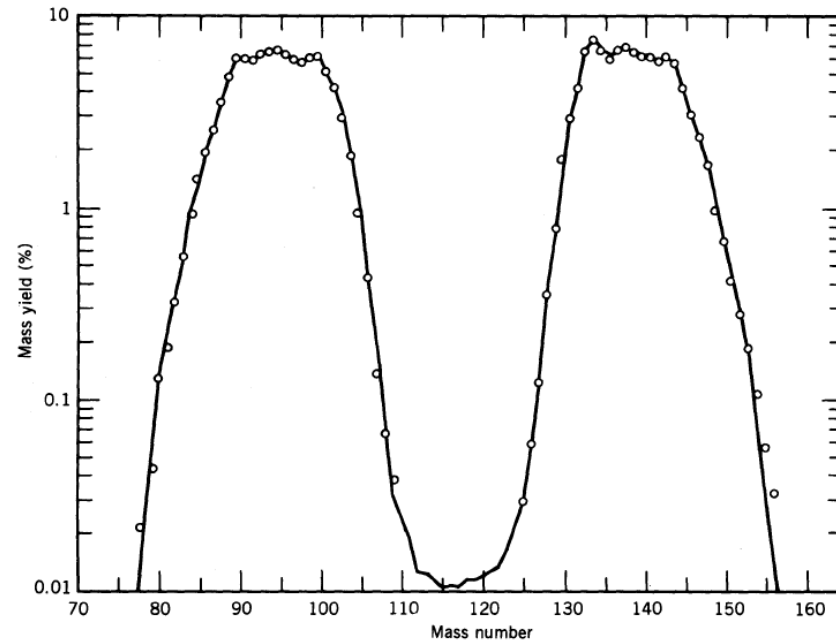
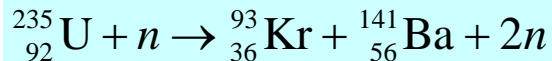
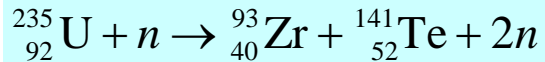
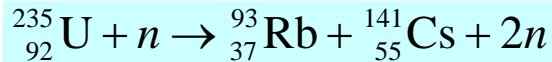
- **Fissió espontània, instantània i induïda:** Per als nuclis en què l'altura de la barrera és massa elevada, l'absorció d'una xicoteta quantitat d'energia Q , com un fotó o **neutró** de baixa energia (pertorbació), permet formar un estat intermedi (nucli compost): si l'energia del nucli és semblant o superior a la barrera \Rightarrow **fissió induïda**.
- Si l'estat intermedi està per davall de la barrera la fissió està inhibida \Rightarrow altres processos dominen (per exemple, desintegració β ó α , o la reemissió de la pròpia partícula).
- **Energia d'activació:** altura de la barrera de fissió per damunt de l'estat fonamental.



- Si $Q \approx E_{\text{barrera}}$ ($E_{\text{act}} \approx 0$) es pot produir la **fissió espontània** ($^{262}_{105}\text{Ha}$).
- Si $Q > E_{\text{barrera}}$ ($E_{\text{act}} < 0$) es produeix **fissió instantània**.
- Si $Q < E_{\text{barrera}}$ ($E_{\text{act}} > 0$) es pot produir la **fissió induïda** (^{235}U).

Característiques de la fissió

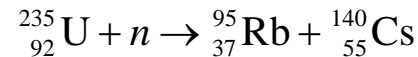
- Els productes de fissió no estan definits unívocament, sinó que hi ha una distribució de masses dels fragments, com per exemple en la fissió del ^{235}U :



Distribución de masas de los fragmentos de la fisión con neutrones térmicos de ^{235}U

- La distribució és aproximadament simètrica.
- Paradoxalment, la fissió induïda amb neutrons tèrmics mostra un mínim en $A_1 \approx A_2$.
 - Encara no hi ha explicació clara d'este comportament.
 - Per al ^{235}U , els valors màxims són: $A_1 \approx 95$, $A_2 \approx 140$.
- No obstant això, la fissió amb partícules energètiques sí que ens mostra un màxim entorn dels valors d' $A_1 \approx A_2$.

- Els fragments són molt rics en neutrons i emeten neutrons instantàniament, en el mateix instant de la fissió (10^{-16} s) amb energies de l'orde del MeV, sent l'energia cinètica mitjana ~ 2 MeV.
- A estos neutrons se'ls denomina **neutrons immediats** (*prompt neutrons*).
- En l'exemple ^{235}U , si els 92 protons disponibles es repartiren en proporció a la massa es tindria:



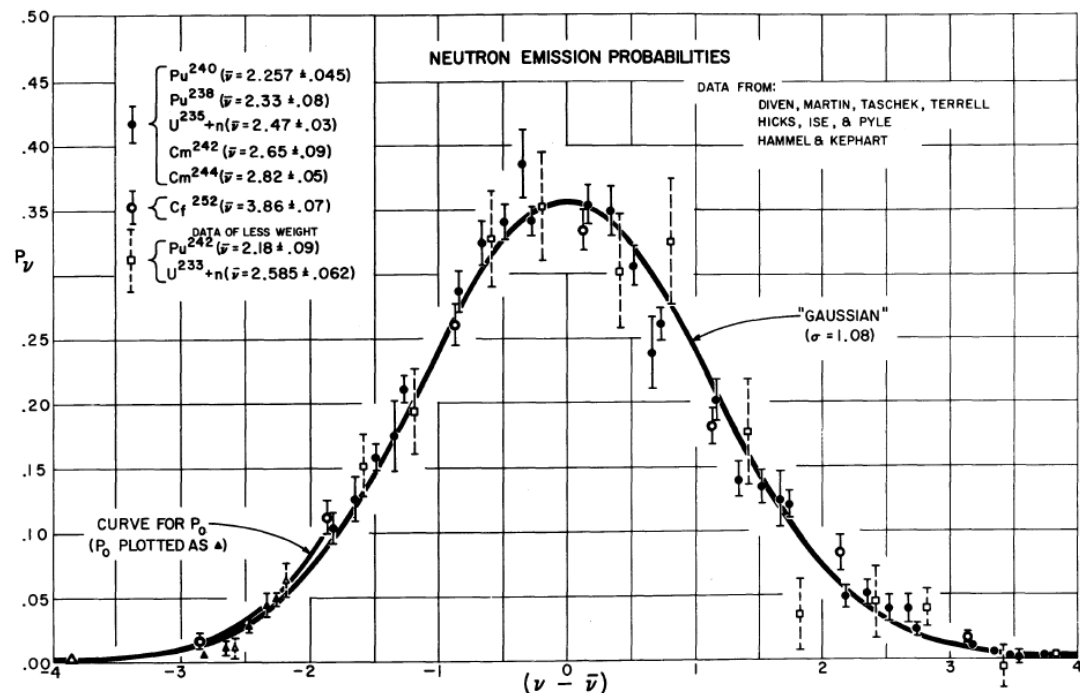
Es té $Z/A = 92/235 \approx 37/95 \approx 55/140 \approx 0.39$, però els nuclis estables en la regió dels productes de fissió tenen $Z/A = 37/(37+52) \approx 0.41$ i $55/(55+85) \approx 0.40 \Rightarrow$ es tenen que alliberar neutrons!

- El número mitjà de neutrons *prompt*, $\bar{\nu}$, és característic del procés particular de fissió:

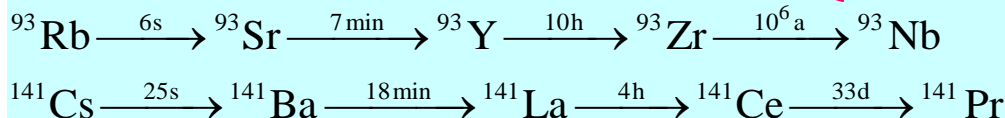
$$\bar{\nu}(^{233}_{92}\text{U}) = 2.48 \quad \bar{\nu}(^{235}_{92}\text{U}) = 2.42 \quad \bar{\nu}(^{239}_{94}\text{Pu}) = 2.86$$

Però la **desviació típica** de la probabilitat d'emissió de neutrons sobre este valor mitjà és universal:
 $\sigma = 1.08$.

*Probabilitats
d'emissió de neutrons*

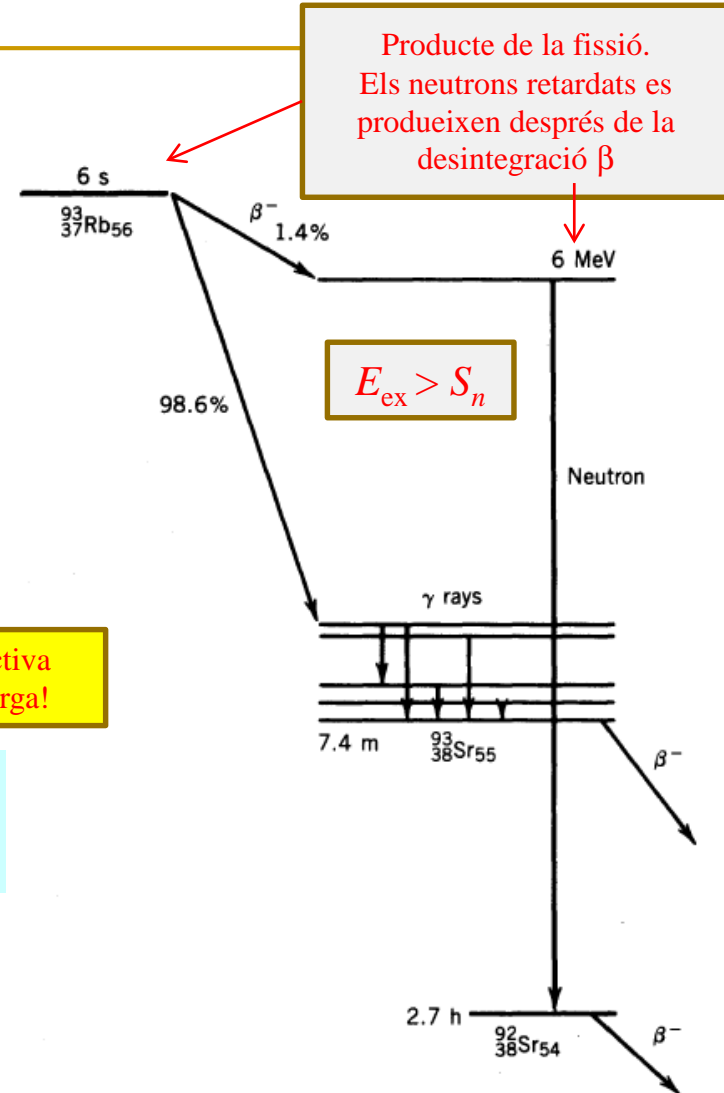


- Els fragments de la fissió poden, després de la desintegració β , emetre neutrons, denominats **neutrons retardats** (*delayed neutrons*) amb temps de retard de l'orde del segon respecte als neutrons immediats.
- Procés en competició amb la desintegració γ .
- Els neutrons retardats representen $\sim 2.5\%$ (1 per cada 100 fissions) del total de neutrons, però són essencials per al control dels reactors nuclears.
- Els productes inicials de la fissió són molt radioactius i es desintegren en cascada cap a isòbars estables emetent moltes partícules, essencialment β i γ .
- Exemple:



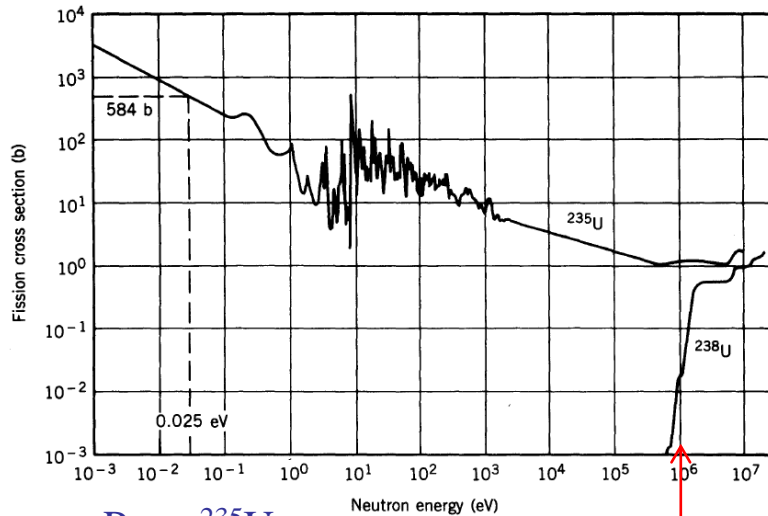
Brutícia radioactiva de vida molt llarga!

- Alguns isòbars tenen vides mitges molt curtes, altres molt llargues (especialment els pròxims a l'isòbar més estable de la sèrie).
- Contribueixen a l'energia total del procés de fissió.
- En els reactors de fissió constitueixen la “**brutícia nuclear**”



Emissió de neutrons retardats del ${}^{93}\text{Rb}$

Seccions eficaces de fissió induïda per als dos isòtops de l'urani, importants en la fissió:



Per a ^{235}U :

Regió tèrmica: $\sigma(\text{fis. indu.}) \propto 1/v$

Regió 1-100 eV: ressonàncies

Dominant

$\sigma(n \text{ tèrmics}) \approx 584 \text{ b} \approx 10^3 \sigma(n \text{ ràpids})$

\Rightarrow moderació de neutrons (temalitzar).

$\sigma(\text{captura radiativa}) \approx 97 \text{ b}$, $\sigma(\text{difusió}) \approx 9 \text{ b}$

Per a ^{238}U , només és possible la fissió amb neutrons ràpids ($>1 \text{ MeV}$).

Diferència ^{235}U - ^{238}U per les distintes energies d'excitació (originades per la δ de la f.s.e.m., nucli par-par)

Nuclide	Cross Section (b)	$A + 1$ Activation Energy (MeV)
$^{227}_{90}\text{Th}_{137}$	200 ± 20	
$^{228}_{90}\text{Th}_{138}$	< 0.3	
$^{229}_{90}\text{Th}_{139}$	30 ± 3	8.3
$^{230}_{90}\text{Th}_{140}$	< 0.001	8.3
$^{230}_{91}\text{Pa}_{139}$	1500 ± 300	7.6
$^{231}_{91}\text{Pa}_{140}$	0.019 ± 0.003	7.6
$^{232}_{91}\text{Pa}_{141}$	700 ± 100	7.2
$^{233}_{91}\text{Pa}_{142}$	< 0.1	7.1
$^{231}_{92}\text{U}_{139}$	300 ± 300	6.8
$^{232}_{92}\text{U}_{140}$	76 ± 4	6.9
$^{233}_{92}\text{U}_{141}$	530 ± 5	6.5
$^{234}_{92}\text{U}_{142}$	< 0.005	6.5
$^{235}_{92}\text{U}_{143}$	584 ± 1	6.2
$^{238}_{92}\text{U}_{146}$	$(2.7 \pm 0.3) \times 10^{-6}$	6.6
$^{234}_{93}\text{Np}_{141}$	1000 ± 400	5.9
$^{236}_{93}\text{Np}_{143}$	3000 ± 600	5.9
$^{237}_{93}\text{Np}_{144}$	0.020 ± 0.005	6.2
$^{238}_{93}\text{Np}_{145}$	17 ± 1	6.0
$^{239}_{93}\text{Np}_{146}$	< 0.001	6.3
$^{238}_{94}\text{Pu}_{144}$	17 ± 1	6.2
$^{239}_{94}\text{Pu}_{145}$	742 ± 3	6.0
$^{240}_{94}\text{Pu}_{146}$	< 0.08	6.3
$^{241}_{94}\text{Pu}_{147}$	1010 ± 10	6.0
$^{242}_{94}\text{Pu}_{148}$	< 0.2	6.2
$^{241}_{95}\text{Am}_{146}$	3.24 ± 0.15	6.5
$^{242}_{95}\text{Am}_{147}$	2100 ± 200	6.2
$^{243}_{95}\text{Am}_{148}$	< 0.08	6.3
$^{244}_{95}\text{Am}_{149}$	2200 ± 300	6.0
$^{243}_{96}\text{Cm}_{147}$	610 ± 30	6.1
$^{244}_{96}\text{Cm}_{148}$	1.0 ± 0.5	6.3
$^{245}_{96}\text{Cm}_{149}$	2000 ± 200	5.9
$^{246}_{96}\text{Cm}_{150}$	0.2 ± 0.1	6.0

Seccions eficaces de fissió induïdes per neutrons tèrmics

L'energia en la fissió induïda

- Què fa que el ^{235}U siga tan diferent del ^{238}U per a produir la fissió amb **neutrons tèrmics**?
 - **Energia d'excitació del nucli compost** després de la captura neutrònica (a partir de les masses):

$$\left. \begin{array}{l} n + {}^{235}\text{U} \rightarrow {}^{236}\text{U}^* \\ n + {}^{238}\text{U} \rightarrow {}^{239}\text{U}^* \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} E_{\text{ex}}({}^{236}\text{U}^*) = [M({}^{236}\text{U}^*) - M({}^{236}\text{U})]c^2 = [M({}^{235}\text{U}) + m_n - M({}^{236}\text{U})]c^2 \approx 6.5 \text{ MeV} \\ E_{\text{ex}}({}^{239}\text{U}^*) = [M({}^{239}\text{U}^*) - M({}^{239}\text{U})]c^2 = [M({}^{238}\text{U}) + m_n - M({}^{239}\text{U})]c^2 \approx 4.8 \text{ MeV} \end{cases}$$

^{235}U (parell-senar): $\delta = 0$ ^{238}U (parell-parell): $\delta > 0$ en B/A (< 0 en M)
 ^{236}U (parell-parell): $\delta > 0$ en B/A (< 0 en M) ^{239}U (parell-senar): $\delta = 0$

En el cas del ^{238}U partim d'un estat més lligat que en el ^{235}U

- **Energies d'activació** en estats fissionables, calculades utilitzant un model de gota líquida (fórmula semi-empírica de la massa):

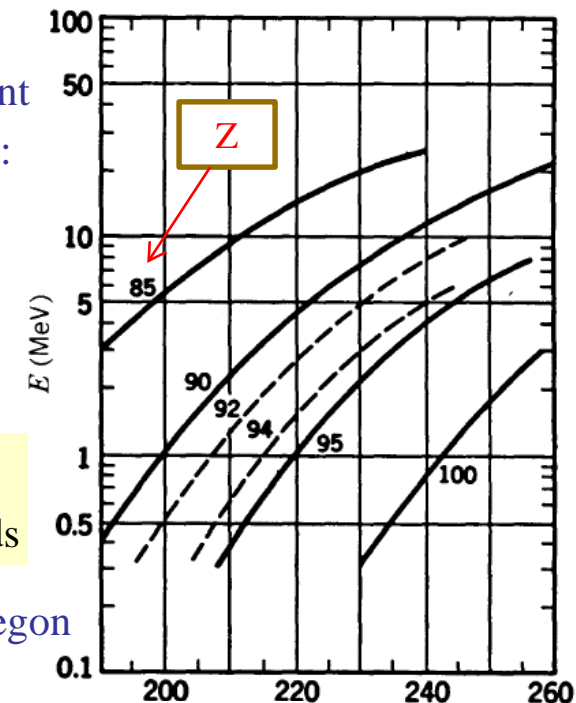
$$\begin{aligned} E_{\text{act}}({}^{235}\text{U}) &\approx 6.2 \text{ MeV} \\ E_{\text{act}}({}^{238}\text{U}) &\approx 6.6 \text{ MeV} \end{aligned}$$

- **Energia llindar de fissió:**

$$E_{\text{llind}}({}^{235}\text{U}) \approx 6.2 - 6.5 \text{ MeV} < 0 \Rightarrow \text{fissió del } {}^{235}\text{U} \text{ per } n \text{ tèrmics}$$

$$E_{\text{llind}}({}^{238}\text{U}) \approx 6.6 - 4.8 \text{ MeV} \approx 1.8 \text{ MeV} \Rightarrow \text{fissió del } {}^{238}\text{U} \text{ només per } n \text{ ràpids}$$

- En el primer cas es supera l'energia llindar de la fissió i no en el segon



Energies d'activació de nuclis pesats (fórmula semi-empírica) A

- El diferent comportament dels nuclis radica en l'energia d'excitació i esta pot entendre's més qualitativament en funció del terme d'aparellament de la fórmula semi-empírica de la massa:

$$B({}_Z^AX_N) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z(Z-1)A^{-1/3} - a_{sim} \frac{(A-2Z)^2}{A} + \delta$$

$$\delta = \begin{cases} -a_p A^{-3/4} & \text{senar-senar} \\ 0 & \text{parell-senar} \\ +a_p A^{-3/4} & \text{parell-parell} \end{cases}$$

$$M({}_Z^AX_N) = ZM({}_1^1H) + Nm_n - B({}_Z^AX_N) / c^2$$

- Per a la diferència de masses tindrem:

$$\begin{cases} E_{\text{ex}}({}_{92}^{236}\text{U}^*) = [M({}_{92}^{235}\text{U}) + m_n - M({}_{92}^{236}\text{U})]c^2 \approx [\Delta B({}_{92}^{235}\text{X}) + a_p 236^{-3/4}] \approx 6.5 \text{ MeV} \\ E_{\text{ex}}({}_{92}^{239}\text{U}^*) = [M({}_{92}^{238}\text{U}) + m_n - M({}_{92}^{239}\text{U})]c^2 \approx [\Delta B({}_{92}^{238}\text{X}) - a_p 238^{-3/4}] \approx 4.8 \text{ MeV} \end{cases}$$

Major energia d'enllaç,
menor massa

on ΔB ve donada per la fórmula semi-empírica com:

$$\Delta B({}_Z^AX) = a_v - a_s \left[(A+1)^{2/3} - A^{2/3} \right] - a_c Z(Z-1) \left[(A+1)^{-1/3} - A^{-1/3} \right] - a_{sim} \left[\frac{(A+1-2Z)^2}{A+1} - \frac{(A-2Z)^2}{A} \right]$$

Que ens dona finalment: $E_{\text{ex}}({}_{92}^{236}\text{U}^*) - E_{\text{ex}}({}_{92}^{239}\text{U}^*) \approx 2a_p A^{-3/4} \approx 1.2 \text{ MeV}$

- Observe's que encara que les energies d'activació són similars, el fet que el nucli ${}^{236}\text{U}$ siga parell-parell origina un alliberament major d'energia, que explica el fenomen.
- Hi ha un efecte semblant en molts altres nuclis pesats:

Exemples:



- Per tant, l'elevada "fissionabilitat" del ${}^{235}\text{U}$, ${}^{239}\text{U}$ i ${}^{232}\text{Pa}$ està determinada per la força d'aparellament nuclear.

- **Distribució de l'energia:** L'energia alliberada en la fissió és $Q \approx 200$ MeV. Exemple:

$$Q(^{235}\text{U} + n \rightarrow ^{93}\text{Rb} + ^{141}\text{Cs} + 2n) = 181 \text{ MeV}$$

- Es distribueix entre:

- Energia cinètica dels fragments de fissió ($\approx 80\%$ ó ≈ 165 MeV).

- Els dos pics corresponen al fragment lleuger i al pesat.

Negligint el moment dels n :

$$M_1 v_1 = M_2 v_2 \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{1}{2} M_1 v_1^2}{\frac{1}{2} M_2 v_2^2} = \frac{M_2}{M_1} \approx \frac{95}{140} \approx 0.68 \approx \frac{61}{93}$$

- Neutrons *prompt* ($\approx 2\%$):

$$\approx 2.5 \text{ n/fissió} \times 2 \text{ MeV/n} = 5 \text{ MeV.}$$

- Rajos γ *prompt* ($\tau \approx 10^{-14}$ s) ≈ 8 MeV.

- Desintegració de fragments radioactius:

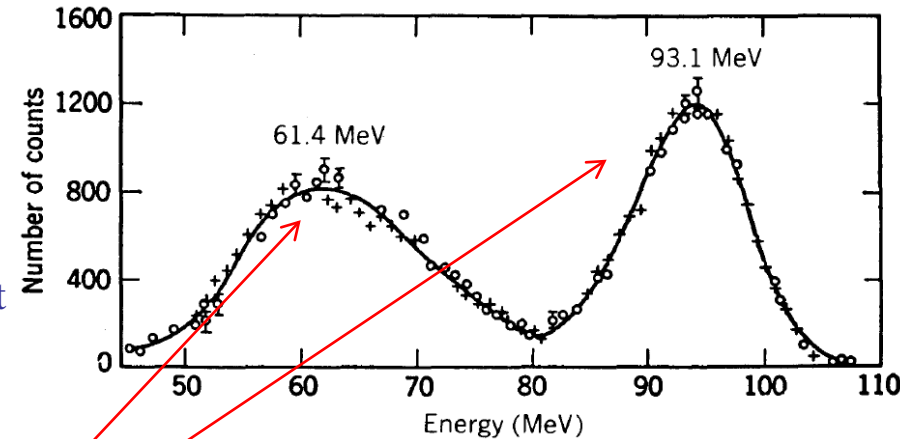
- Desintegració $\beta \approx 19$ MeV.

- $\approx 30\text{-}40\%$ a partícules β .

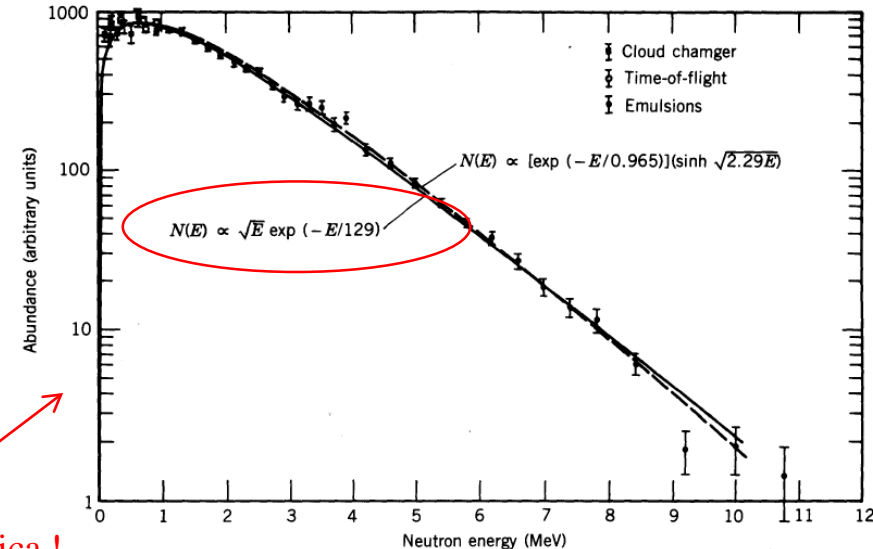
- La resta (≈ 12 MeV) a neutrinos.

- Desintegració $\gamma \approx 7$ MeV.

Distribució energètica dels fragments nuclears de la fissió per n tèrmics del ^{235}U



Distribució energètica dels neutrons produïts en la fissió per n tèrmics del ^{235}U



Escala logarítmica !

Absorció i moderació de neutrons

- **Absorció de neutrons:** la intensitat d'un feix de neutrons decreix (s'atenua) en travessar un mitjà material pel fet que els neutrons són eliminats del feix per les reaccions nuclears que pateixen:

$$dI = -I\sigma_t N dx \Rightarrow I = I_0 e^{-\sigma_t N x} \quad N: \text{número d'àtoms blanc per unitat de volum}$$

Llei d'atenuació

- Exemple: fluorur de bor, BF_3 : $\sigma_t(E = 0.014 \text{ eV}) = 1000 \text{ b}$, $\sigma_t(E = 1 \text{ eV}) = 120 \text{ b}$

- Els neutrons no poden accelerar-se (neutres), però sí frenar-se per mitjà de col·lisions elàstiques amb els àtoms del material que travessen \Rightarrow este efecte es denomina **moderació de neutrons**.
- La moderació consisteix en la col·lisió elàstica d'un neutró d'energia E_0 i velocitat v_0 amb un nucli de massa A en repòs inicialment i que ix amb energia E .

- Per la conservació d'energia i moment tenim (on E és l'energia en que ix el neutró n):

$$\frac{E}{E_0} = \frac{A^2 + 1 + 2A \cos \theta}{(A + 1)^2} \xrightarrow{\theta=\pi} \left(\frac{E}{E_0} \right)_{\min} = \left(\frac{A - 1}{A + 1} \right)^2$$

Màxima transferència d'energia al blanc

θ : angle de difusió del n en el sistema CM. E i E_0 en el lab.

- Per a $A=1$ (hidrogen), tota l'energia del neutró és transferida al protó en el cas de col·lisió frontal $\theta=\pi$.
- Per a E_n per davall de $\approx 10 \text{ MeV} \Rightarrow$ només contribueix $L=0$ (ona S) \Rightarrow distribució angular uniforme (en CM) \Rightarrow E/E_0 uniformement distribuïda entre 1 i $(E/E_0)_{\min}$

Màxima transferència d'energia d'un neutró i un nucli, per a distints materials

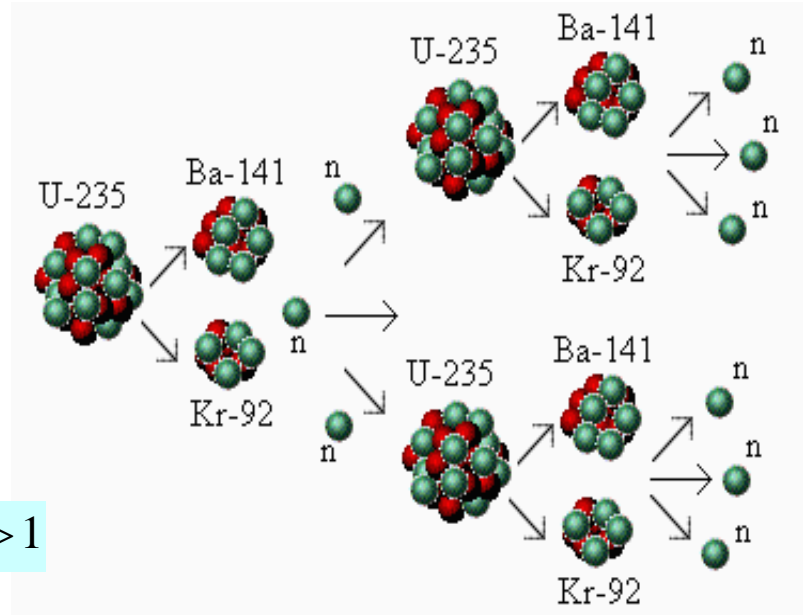
Nucli	$1 - (E/E_0)_{\min}$
^1H (aigua lleugera)	1
^2H (aigua pesada)	0.89
^4He	0.64
^9Be	0.36
^{12}C (grafito)	0.28
^{238}U	0.02

Índex de transferència d'energia

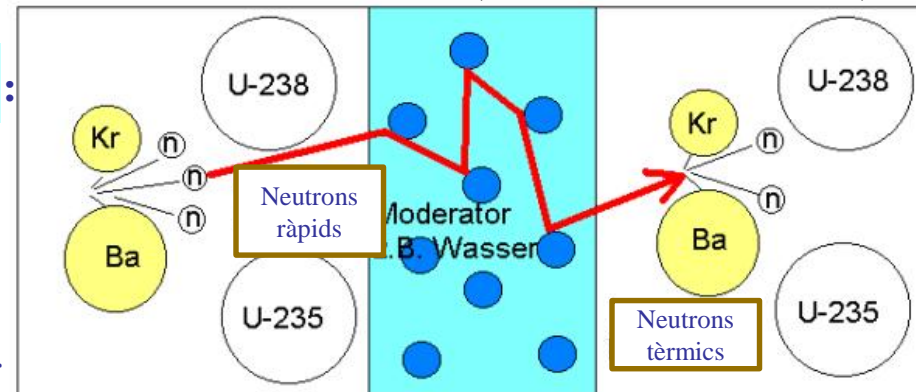
3. Reaccions de fissió controlada

Reacció en cadena en medi infinit

- Considerem un bloc infinit d'urani natural: (0.72% de ^{235}U y 99.28% de ^{238}U).
- Es generen en mitjana **2.5 neutrons ràpids / fissió induïda** per cada n tèrmic.
- S'allibera en promig ≈ 200 MeV/fissió en forma d'energia cinètica (calor) i radiació.
- Definim el **factor de multiplicació infinit** k_{∞}
 - És el que existeix en un **medi infinit** \Rightarrow no hi ha fuga de neutrons per les parets.
 - Hi ha per tant un **increment net** en el nombre de n tèrmics d'una generació a la següent: $k_{\infty} > 1$
 - Per a mantindre la reacció en cadena:
- Neutrons alliberats en la fissió són ràpids i com la secció eficaç per a n ràpids molt xicoteta \Rightarrow cal aplicar **la moderació dels n** .
- **Factor de multiplicació en medi finit** k_{eff} : és el que ocorre en un medi finit:
 - $k = 1$ Pila crítica (\rightarrow reacció controlada).
 - $k < 1$ Pila subcrítica (\rightarrow extinció).
 - $k > 1$ Pila supercrítica (\rightarrow explosió).
- **Reactivitat** $\rho = (k - 1) / k$, que és nul·la per a una pila controlada.



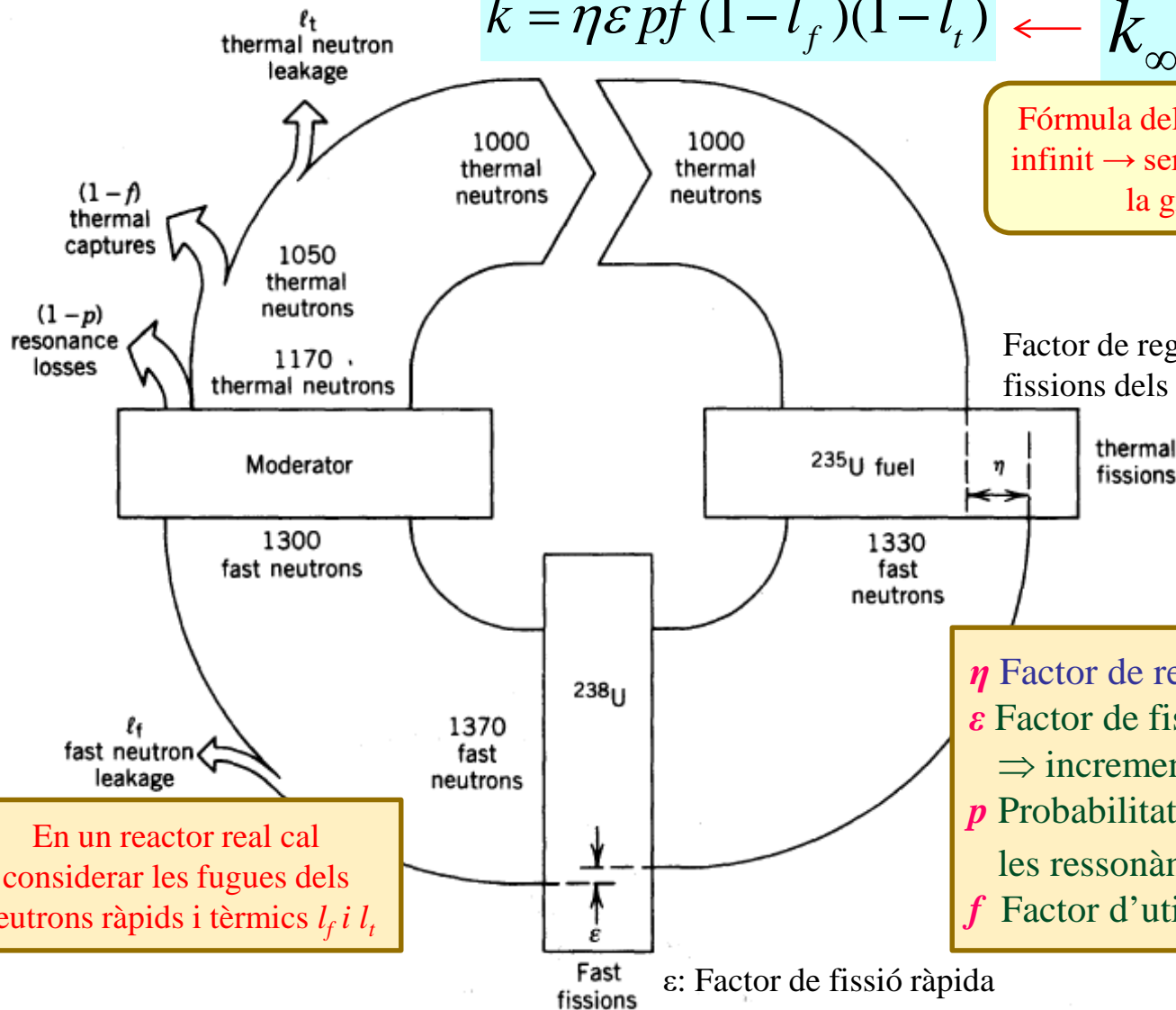
Pila de reacció en cadena (combustible+moderador)



Cicle de les reaccions de fissió controlada: balanç de neutrons

$$k = \eta \varepsilon p f (1 - l_f)(1 - l_t) \leftarrow k_{\infty} = \eta \varepsilon p f$$

Fórmula dels quatre factors en material infinit → sense pèrdues, independent de la grandària del reactor



Factor de regeneració tèrmica η : les fissions dels n tèrmics generen n ràpids

En un reactor real cal considerar les fugues dels neutrons ràpids i tèrmics l_f i l_t

- η Factor de regeneració tèrmica
- ε Factor de fissió dels n ràpids sobre ^{238}U ⇒ incrementa el nombre de n ràpids.
- p Probabilitat d'escap de ser absorbit per les ressonàncies del ^{238}U (~0.9)
- f Factor d'utilització dels n tèrmics (~0.9)

ε : Factor de fissió ràpida

Factor de regeneració tèrmic η :

[Captura radiativa (n,γ) per ^{238}U i ^{235}U]

$$\eta = \nu \frac{\sigma_{\text{fis}}}{\sigma_{\text{fis}} + \sigma_{\text{abs}}}$$

$$\sigma_{\text{fis}}(^{235}\text{U}) = 584 \text{ b} \quad \sigma_{\text{abs}}(^{235}\text{U}) = 97 \text{ b}$$

$$\sigma_{\text{fis}}(^{238}\text{U}) = 0 \text{ b} \quad \sigma_{\text{abs}}(^{238}\text{U}) = 2.75 \text{ b}$$

$\nu = 2.5$ neutrons
ràpids/fissió

No origina fissió
→ problema

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\text{fis}}(\text{U natural}) &= 0.0072\sigma_{\text{fis}}(^{235}\text{U}) + 0.9928\sigma_{\text{fis}}(^{238}\text{U}) = 4.20 \text{ b} \\ \sigma_{\text{abs}}(\text{U natural}) &= 0.0072\sigma_{\text{abs}}(^{235}\text{U}) + 0.9928\sigma_{\text{abs}}(^{238}\text{U}) = 3.43 \text{ b} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \eta(\text{U natural}) = 1.33$$

Veure pàg. 12

- 1.33 està ja molt pròxim a 1 \Rightarrow cal enriquir l'urani, dada la contribució de les pèrdues.
 - 3% $\Rightarrow \eta = 1.84 \rightarrow$ un enriqueiximent del 3% incrementa η considerablement.
- O utilització d'altres combustibles produïts per reactors de conversió:
 - ^{239}Pu , obtingut a partir de ^{238}U .
 - ^{233}U , obtingut a partir de ^{232}Th .

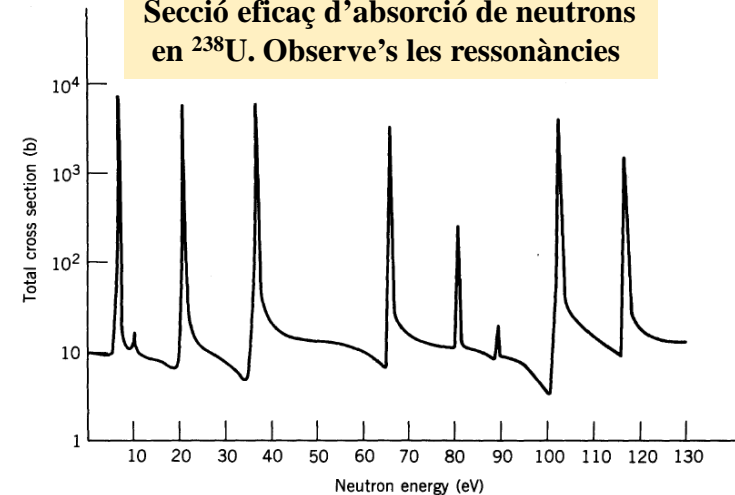
Factor 1- p de pèrdua per absorció ressonant (ó p d'escap de ser absorbits per les ressonàncies)

- Este factor p pot optimitzar-se col·locant blocs de moderador entre el combustible, de manera que els neutrons que penetren en el bloc isquen tèrmics.
- Exemple: en grafit, blocs ~ 19 cm.
(longitud de moderació).

Factor 1- f de captures tèrmiques (ó f d'utilització tèrmica):

- f considera els n capturats en el moderador i components estructurals entre este i el combustible.

Secció eficaç d'absorció de neutrons
en ^{238}U . Observe's les ressonàncies



Grandària crítica

$$k = k_{\infty} (1 - l_f)(1 - l_t)$$

$$k_{\infty} - k \approx k_{\infty} (l_f + l_t) \text{ per a } l_f, l_t \text{ petits}$$

Pèrdues = $f(\text{geometria, material})$

- Menor quocient $S/V \Rightarrow$ menors pèrdues.
- Estes pèrdues disminueixen en disminuir **la longitud de migració M** , definida com el recorregut lliure mitjà d'un neutró abans de ser absorbit.

$$M \equiv \sqrt{L_d^2 + L_m^2} \equiv \sqrt{L_d^2 + \tau_{ter}}$$

- **Longitud de difusió** per a n tèrmics, L_d : distància que un n recorre des que aconseguix energia tèrmica fins que és absorbit.
- **Longitud de frenada o moderació**, L_m (també anomenada **edat de Fermi tèrmica**, τ_{ter}): distància que un n recorre per a reduir la seua energia des de valors ràpids a tèrmics.
- Exemple: grafit $L_m = 18.7 \text{ cm}$ $L_d = 50.8 \text{ cm}$ $M = 54.1 \text{ cm}$
- Com $k_{\infty} - k \propto 1/S$ i ha de dependre de M , per anàlisi dimensional: $k_{\infty} - k \propto M^2 / S$
 - La constant de proporcionalitat depèn de la geometria de la pila, i és ~ 1
 - Per a la criticitat ($k = 1$) la superfície ha de prendre un valor crític:

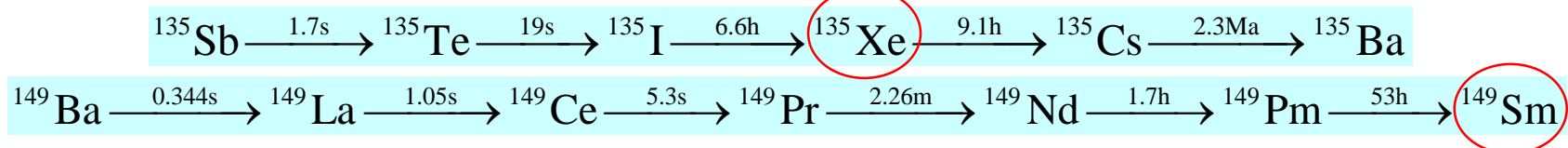
$$S_c \propto \frac{M^2}{k_{\infty} - k}$$
 - Per a una geometria esfèrica: $R_c = \pi M / \sqrt{k_{\infty} - 1}$
 - Exemple: pila de U natural + grafit, $R_c \approx 5 \text{ m}$
 - La grandària crítica pot reduir-se col·locant un material reflector de neutrons que rodege la pila.

Dinàmica de les reaccions de fissió controlada

- L'evolució temporal del número N de neutrons en una pila de factor de multiplicació k , és:

$$dN = (kN - N) \frac{dt}{\tau} \Rightarrow N(t) = N_0 \exp\left[\frac{(k-1)t}{\tau}\right]$$

- τ és la **constant de temporal** del cicle dels neutrons, que inclou:
 - Temps de moderació ($\sim 10^{-6}$ s), associat a L_m .
 - Temps d'absorció després de termalitzar-se ($\sim 10^{-3}$ s), associat a L_d .
- Si $k = 1 \Rightarrow N$ constant, el reactor és estable.
- Si $k < 1 \Rightarrow N$ decreix exponencialment, fins a extingir-se.
- Si $k > 1 \Rightarrow N$ creix exponencialment amb el temps, fins i tot a poder explotar.
- Exemple numèric: $k = 1.01$, $\tau / (k - 1) \approx 0.1 \text{ s} \xrightarrow{1s} e^{10} = 22000 \leftarrow$ Fac. multiplicació dels n .
- Per tant, es requereix un elevat control del factor $k \Rightarrow$ dissenyar **barres i sistemes de control**.
 - Inserció de barres amb un material amb elevada σ d'absorció de neutrons tèrmics.
 - S'empra cadmi, bor, samari, que tenen una gran secció eficaç d'absorció dels neutrons.
 - Barres de parada, de control gros i de control fi.
- Factors (que en primer orde) cal considerar per al control del factor k :
 - **Neutrons retardats** ($\sim 2\%$ dels neutrons).
 - **Enverinament de la pila:** productes de fissió amb **seccions eficaces** d'absorció de neutrons tèrmics molt elevades. Els principals verins són: ^{135}Xe ($2.7 \times 10^6 \text{ b}$) i ^{149}Sm ($4.1 \times 10^4 \text{ b}$)



Components d'un reactor



- **Combustible o material fissible:**
 - ❑ Urani natural (0.72 % de ^{235}U).
 - ❑ Urani enriquit (2-3% de ^{235}U).
 - Costós de produir, generalment per mitjà de difusió gasosa del hexa-fluorur d'urani (UF_6).
 - ❑ ^{239}Pu , ^{233}U , generat en reactors convertidors (tipus *breeder*).

- **Material moderador** clau en el disseny del reactor. El moderador ideal ha de ser: (i) abundant i barat, (ii) químicament estable, (iii) A pròxim a 1, (iv) elevada densitat (sòlid o líquid), i a més (v) cal que tinga baixa σ de captura de n . Es solen usar:
 - ❑ Carbó (grafit): A alt, i ha de compensar-se amb una elevada quantitat. Sòlid manejable i barat.
 - ❑ Aigua lleugera (H_2O): molt alta σ de captura de n ($n + p \rightarrow d + \gamma$)
 - ❑ Aigua pesant (D_2O): resol el problema de l'aigua lleugera, però:
 - Produeix triti (radioactiu) després de la captura neutrònica.
 - Costosa de produir.
 - ❑ Be ó BeO: difícil de manejar i altament tòxic (verinós).

- **Reflector** al voltant del nucli (combustible + moderador), per a evitar pèrdues de neutrons i disminuir la grandària crítica de la pila.

- **Vas de contenció**, per a evitar la fuga dels productes de fissió (alguns són gasosos).
- **Blindatge per a rajos γ i neutrons**, per a evitar dany biològic al personal en les proximitats.
- **Refrigerant** per a efectuar l'intercanvi de calor amb el nucli (aire, CO₂, heli, aigua, altres líquids i inclús líquids pesats -alta capacitat calorífica-, com el sodi i liti).
 - Sense ell el nucli del reactor es fondria.
 - L'eficiència de la transferència de calor entre el nucli i l'exterior és especialment important en els reactors de potència (eficiència de Carnot).
- **Sistema de control**, per a controlar el nivell de potència i mantindre-lo constant.
- **Sistemes d'emergència**, per a previndre situacions de fallades en els sistemes de refrigeració i/o de control.
- **Tipus d'Acoblaments:**
 - Homogenis, quan estan uniformement mesclats.
 - Heterogenis, quan combustible i moderador estan separats (*lumped*).
 - Exemple: urani-grafit (no pot ser crític si és homogeni).
- Els reactors de neutrons ràpids no contenen material moderador.
 - Menys voluminosos que els reactors tèrmics.
 - Requereixen major quantitat de material fissible ($\times 10$ -100 per a la mateixa potència), atés que la σ d'absorció de neutrons ràpids és molt menor que per a n tèrmics.
 - Utilitzats en sistemes de propulsió (submarins).

Tipus de reactors

■ Reactors de potència

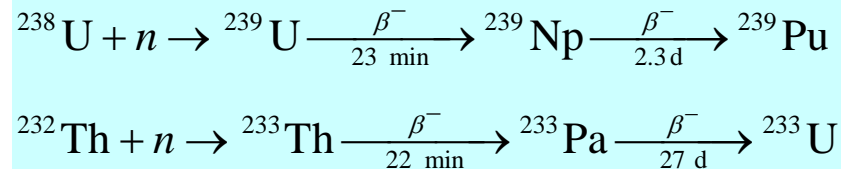
- Generen potència elèctrica a partir de la calor generat en el nucli (energia cinètica dels productes) (1 kg de carbó dóna 9.3 kWh, 1 kg de ^{235}U dóna 2.9×10^7 kWh).

■ Reactors d'investigació

- Dissenyats per a produir grans fluxos de neutrons ($\sim 10^{13}$ n / cm² s, i en alguns casos diversos ordres de magnitud majors) i neutrins.

■ Reactors convertidors

- Converteixen material no fissible per neutrons tèrmics (material fèril) en fissible:



- Es requereix $\eta > 2.0$ perquè el reactor produísca més material fissible que consumisca \Rightarrow reactor tipus *breeder*.
- Els més interessants són els tipus *fast breeder*, ja que usualment η és major per a neutrons ràpids (MeV) que per a tèrmics.
 - Exemple: $\eta(^{239}\text{Pu}, n \text{ tèrmics}) = 2.1$, $\eta(^{239}\text{U}, n \text{ ràpids}) = 3$
- El material fissible produït pot separar-se del fèril per mitjans químics \Rightarrow molt més fàcil i rendible que la separació isotòpica (exemple $^{235}\text{U}/^{238}\text{U}$).

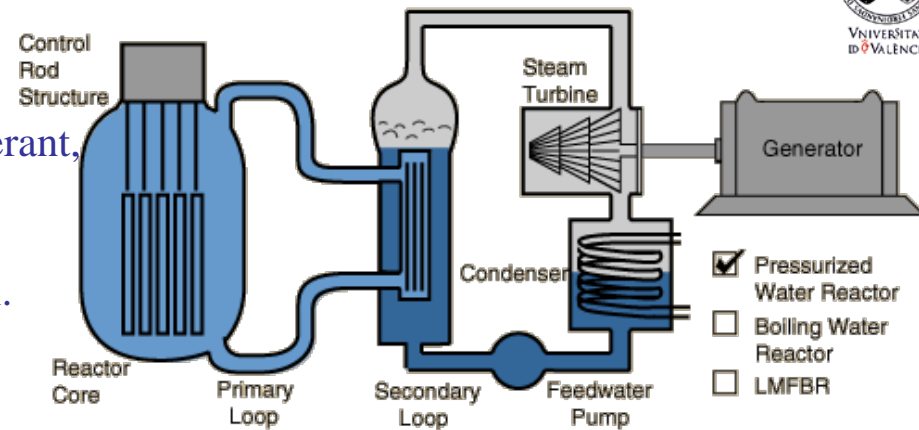
Tipus de dissenys

■ Reactors d'aigua pressuritzada (PWR)

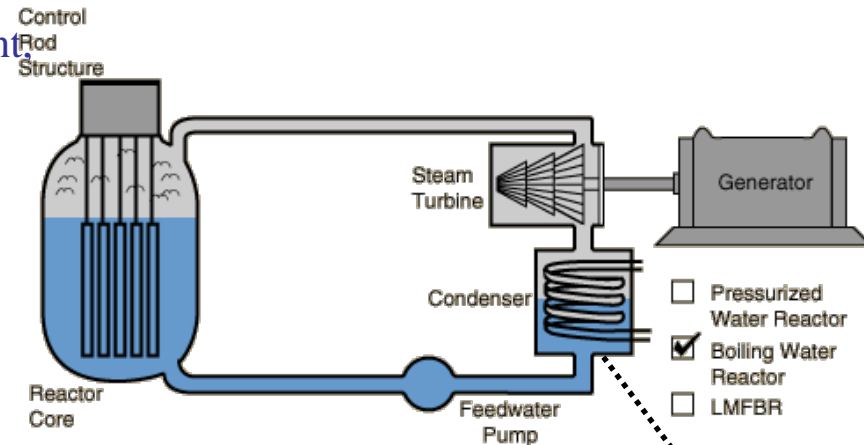
- ❑ L'aigua lleugera fa de moderador i refrigerant, sense bullir (~160 atm).
- ❑ Si es de potència, el vapor que acciona la turbina se produeix en el circuit secundari.
- ❑ Alta eficiència de Carnot.
- ❑ Urani enriquit al 2-3%.
- ❑ Exemples: Almaraz, Ascó i Trillo.

■ Reactors d'aigua en ebullició (BWR)

- ❑ L'aigua lleugera fa de moderador i refrigerant, en ebullició (~70 atm).
- ❑ El mateix circuit acciona la turbina.
- ❑ Urani enriquit al 2-3%.
- ❑ Tècnicament més senzill que el PWR.
- ❑ Els desavantatges:
 - Xicoteta fracció de ^{18}O per captura neutrònica.
 - Qualsevol fuga de combustible pot contaminar l'aigua.
 - Menor eficiència de Carnot.
- ❑ Exemple: Cofrents.



Reactor de agua presurizada



Reactor de agua en ebullición



■ Reactors d'aigua pesada pressuritzada (PHWR)

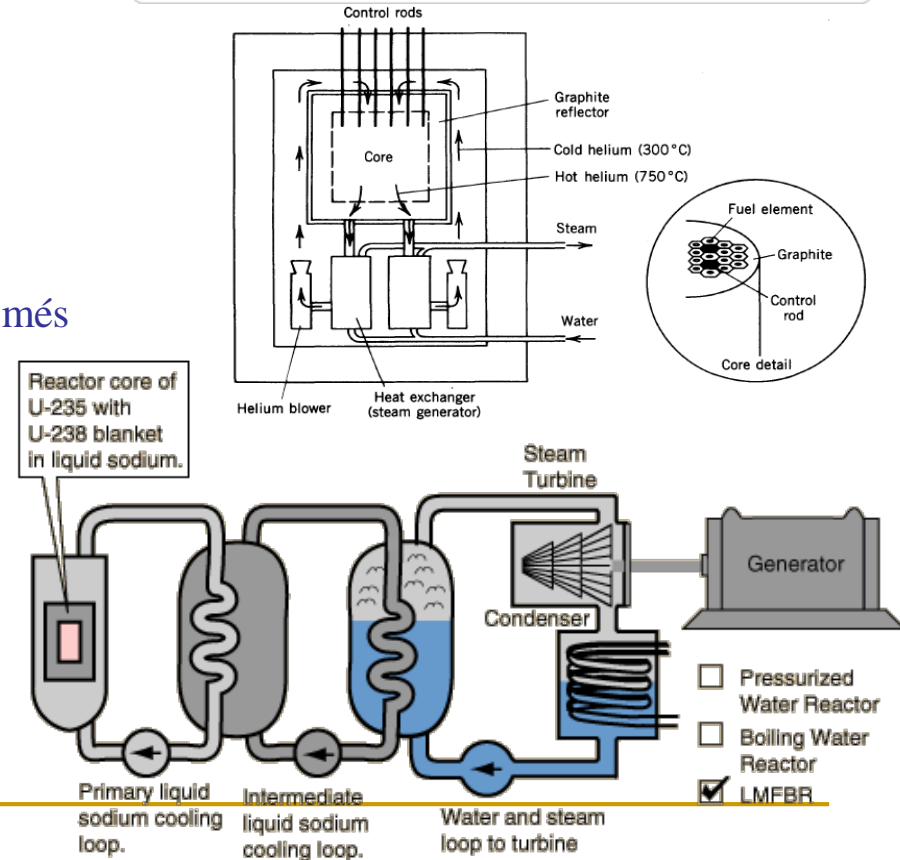
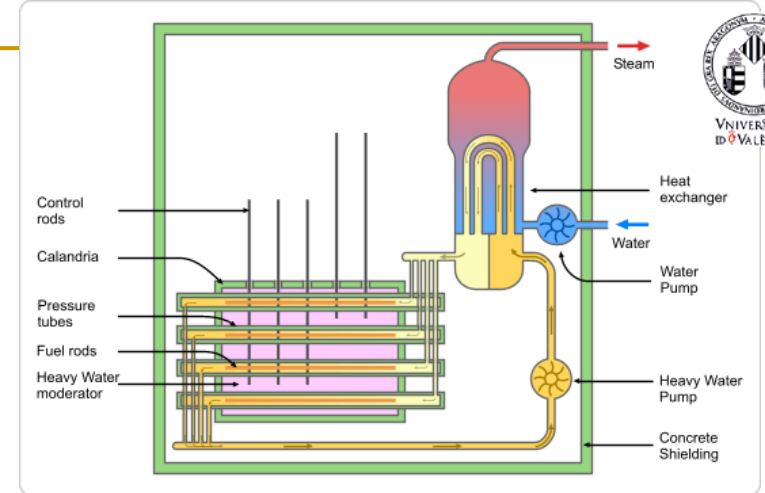
- ❑ Doble circuit.
- ❑ L'aigua pesada fa de moderador i com refrigerant s'utilitza aigua pesada o lleugera.
- ❑ Urani natural.

■ Reactors refredats per gas (GCR o AGCR)

- ❑ El moderador és grafit i el refrigerant sol ser CO_2 gasós.
- ❑ Heterogenis.
- ❑ Alta eficiència tèrmica ($> \text{PWR}$).
- ❑ Exemple: Vandellós.

■ Reactors *liquid metal fast breeder* (LMFBR)

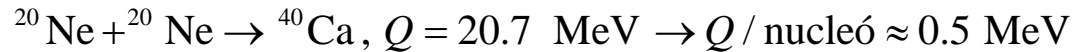
- ❑ Refrigerats per metalls líquids (Li, Pb, Hg i més usualment Na), para evitar moderació de neutrons i augmentar transferència de calor.
- ❑ Urani enriquit (^{235}U) al 15-30%.
- ❑ ^{238}U para transmutació a ^{239}Pu .
- ❑ Generen potència i plutoni.
- ❑ Eficiència tèrmica similar als PWR.



4. Fusió nuclear

Consideracions generals

- El balanç energètic en una **reacció de fusió** com la següent és:



La repulsió coulombiana (superfícies nuclears en contacte) a superar: $E_{\text{Coulomb}} = 21.2 \text{ MeV}$

Caldrà subministrar $E_{\text{inicial}} = 21.2 \text{ MeV}$ per a obtenir $E_{\text{final}} = 20.7 + 21.2 = 41.9 \text{ MeV}$

- Com es pot fer?

- Reacció entre ions pesats:

- Accelerant ions de ^{20}Ne fins a energies de 21.2 MeV.

- Inconvenients:

- Intensitats de feixos d'ions xicotetes: nA-μA.
 - Seccions eficaces de fusió xicotetes.
 - Potència d'eixida insignificant.

- Fusió termonuclear:** Calfant gas Ne a alta temperatura \Rightarrow els nuclis adquireixen energia tèrmica suficient perquè els dos nuclis xoquen amb 21.2 MeV.

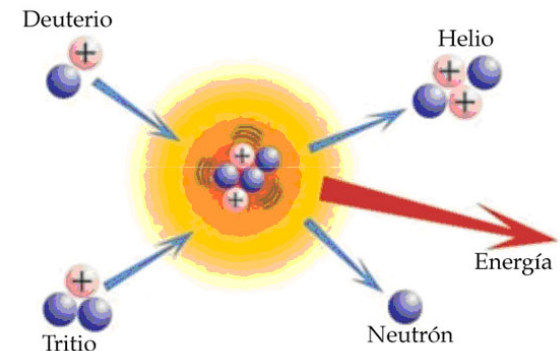
$$E_{\text{Ne}} = \frac{1}{2}(21.2 \text{ MeV}) = \frac{3}{2}kT \Rightarrow T \approx 10^{11} \text{ K}$$

[Gas monoatòmic]

$$[1 \text{ eV} \approx 11604 \text{ K}]$$

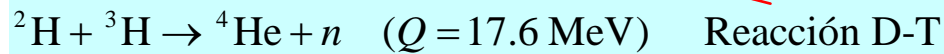
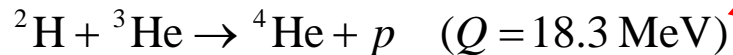
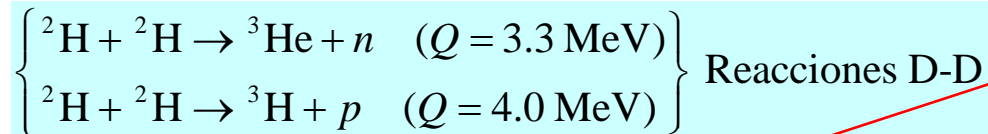
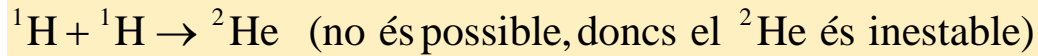
$$300 \text{ K} \approx 0.025 \text{ eV}$$

- Amb deuteri o triti, menor Z, la barrera coulombiana és menor $\Rightarrow T \sim 10^8\text{-}10^9 \text{ K}$.



Processos bàsics

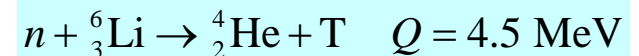
- La fusió **no és un procés espontani** a causa de la barrera de Coulomb:



Reacció seleccionada en reactors de fusió controlada.

Procés no utilitzable per la càrrega i dificultat de produir el ${}^3\text{He}$.
Este n ix amb energia de 14.1 MeV, molta més que els n de la fissió.

El T (${}^3\text{H}$) és inestable β , amb vida mitja de 17.7 anys, pel que cal produir-lo. A més, de la reacció D-D, altre mode de produir-lo és



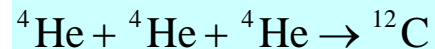
- Altres reaccions:**

- La reacció $4 {}^1\text{H} \rightarrow {}^4\text{He}$ (que ocorre en diverses etapes) és la bàsica en estrelles semblants al Sol (pàgs. 38-39)

- Les reaccions:



No s'observa, el ${}^8\text{Be}$ inestable es desintegra en formar-se, 10^{-16} s



Molt poc probable, ja que requereix ${}^8\text{Be} + {}^4\text{He}$.

només ocorren en estrelles molt més calentes (velles), pel fet que la barrera de Coulomb en nuclis de ${}^4\text{He}$ és major que amb ${}^2\text{H}$.

Característiques de les reaccions de fusió

- **Energia alliberada:** Siga la reacció $a + X \rightarrow b + Y$ on es verifica $T_a, T_X \sim 1-10 \text{ keV} \ll Q$ [tant en aplicacions de fusió com en processos estel·lars, l'energia incident és negligible front a l'energia dels productes de la fusió]

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} m_b v_b^2 + \frac{1}{2} m_Y v_Y^2 &\approx Q \\ m_b v_b &\approx m_Y v_Y \end{aligned} \right\} \Rightarrow T_b \approx \frac{Q}{1 + m_b / m_Y}; T_Y \approx \frac{Q}{1 + m_Y / m_b}, \text{ semblant a la desintegració } \alpha.$$

$$\frac{T_b}{T_Y} = \frac{m_b}{m_Y} \Rightarrow \begin{cases} \text{D-T} \Rightarrow T_n \sim 80\% Q \\ \text{D-D} \Rightarrow T_n, T_p \sim 75\% Q \end{cases}$$

- **La barrera de Coulomb,** ha de superar-se per a la fusió:

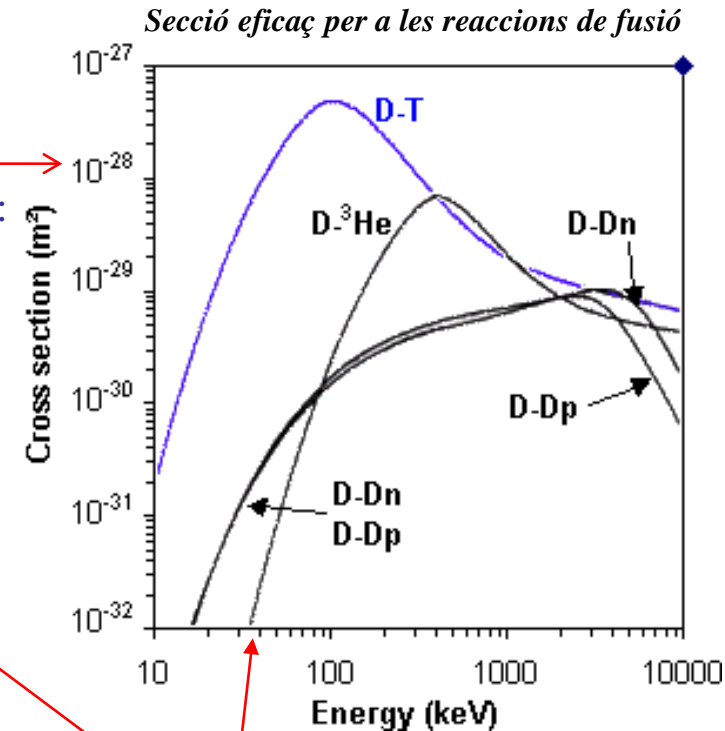
$$V_c(r) = \frac{e^2 \hbar c}{4\pi \epsilon_0 \hbar c} \frac{Z_a Z_X}{R_a + R_X} = \hbar c \alpha \frac{Z_a Z_X}{R_a + R_X}, \quad r = R_a + R_X$$

$$\text{D-T} \Rightarrow V_c \approx 0.4 \text{ MeV} \gg T_a, T_X$$

- **Secció eficaç,** calculada com en la desintegració α :

$$\sigma \propto \frac{1}{v^2} e^{-2G}; \quad G \approx Z_a Z_X \alpha \sqrt{\frac{2\mu c^2}{\frac{1}{2}\mu v^2}} \frac{\pi}{2} = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0} \frac{\pi Z_a Z_X}{\hbar v}; \quad V_c \gg T_a, T_X$$

- v es la velocitat relativa de les partícules entrants.
- G és el **factor de Gamow**, considerant $T_a \ll B$.
- Dependència $1/v^2$ prové de la dependència $1/k^2$ en el desenvolupament d'ones parcials, en absència de ressonàncies.
- La reacció D-T és la més afavorida a energies dels keV ($i > Q$)



$$T \approx 10^9 \text{ K}$$

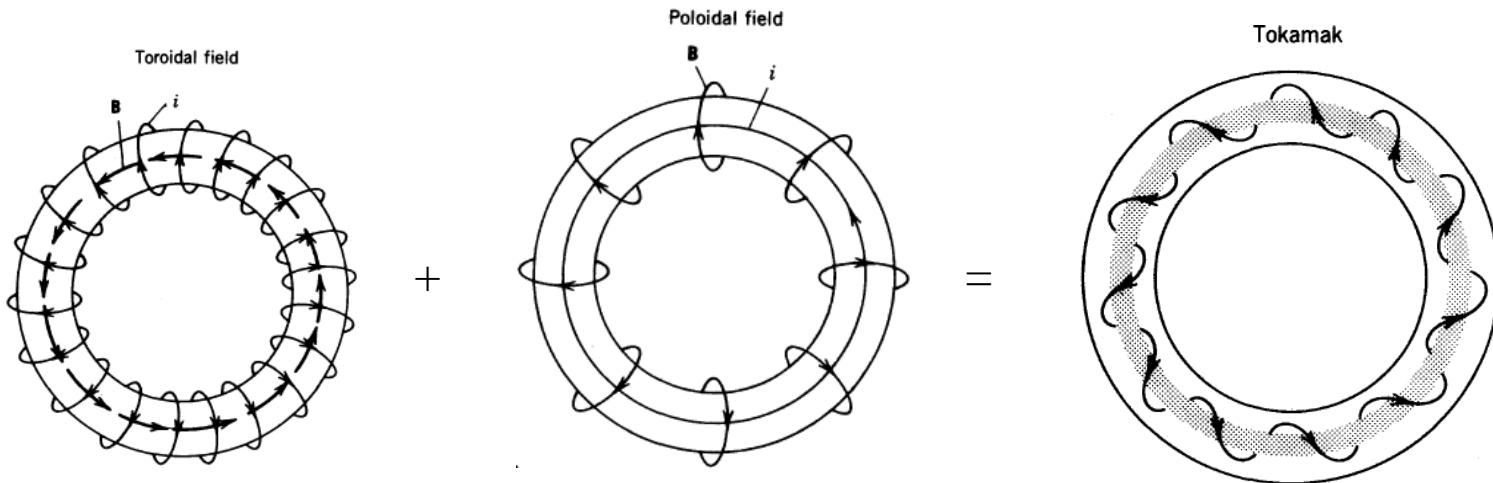
$$G \approx zZ'\alpha \sqrt{\frac{2\mu c^2}{T_a}} \left[\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{T_a}{B}} \right]$$

5. Reaccions de fusió controlada. Reactors de fusió

- Per a aconseguir reaccions de fusió controlada i extraure potència utilitzable es requereix:
 - Calfar el combustible a temperatures $\approx 10^8$ K ($T \approx 10$ keV)
 - Aconseguir una **densitat de plasma molt alta** durant un temps prou llarg.
- A estes T els àtoms estan ionitzats \Rightarrow mescla neutra de núvols de ions positius i electrons negatius \Rightarrow el combustible està en forma de **plasma**.
- Problema: si el combustible intercanviara calor amb les parets del contenidor es refredaria i no faria la reacció al mateix temps que fondria el contenidor \Rightarrow caldrà confinar el plasma.
- **Mètodes de confinament:**
 - **Confinament magnètic**, que sembla tindre major pervindre (Tokamacs).
 - **Confinament inercial**.
 - **Fusió freda** (amb muons, catalitzadors de la reacció).
- Els dos primers:
 - Usen el confinament del plasma calent de D-T, més favorable energèticament i per millor secció eficaç al voltant dels 10-20 keV.
 - No presenten problemes de combustible: el D es troba en l'aigua i el T ($T_{1/2} = 12.26$ anys) es pot produir fàcilment per bombardeig de neutrons sobre ^6Li i ^7Li .
- Existeixen **pèrdues de confinament** degudes a pèrdues d'energia del plasma, bàsicament per:
 - Radiació de frenada (*bremsstrahlung*) per col·lisions del plasma.
 - Radiació de sincrotró (molt menys important, negligible enfront de la de frenada).

Confinament magnètic: Tokamaks

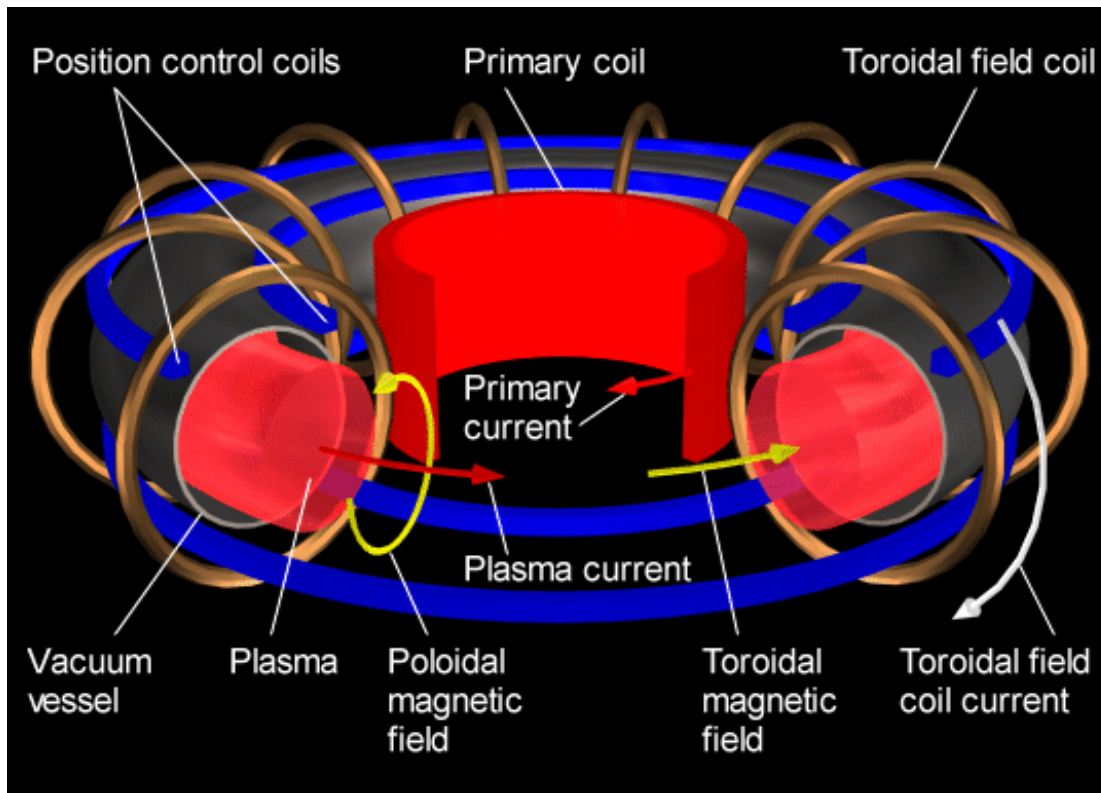
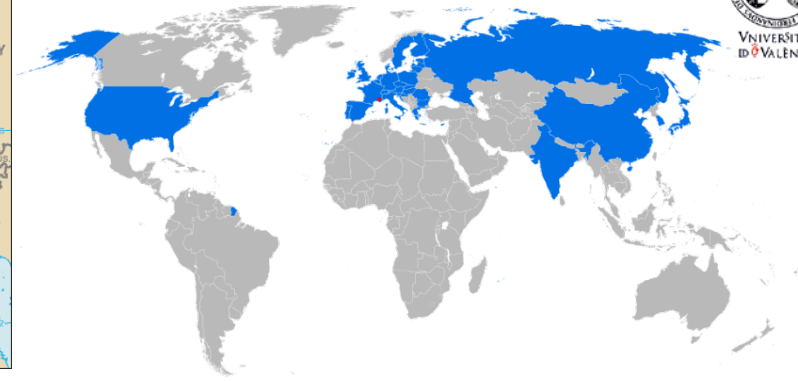
- El plasma es confina mitjançant camps magnètics.
- Cal destacar els **Tokamak** (acrònim en rus de cambra toroïdal) en els que el plasma és calfat en un vas toroïdal i confinat per mitjà de camps magnètics toroïdals i poloïdals.



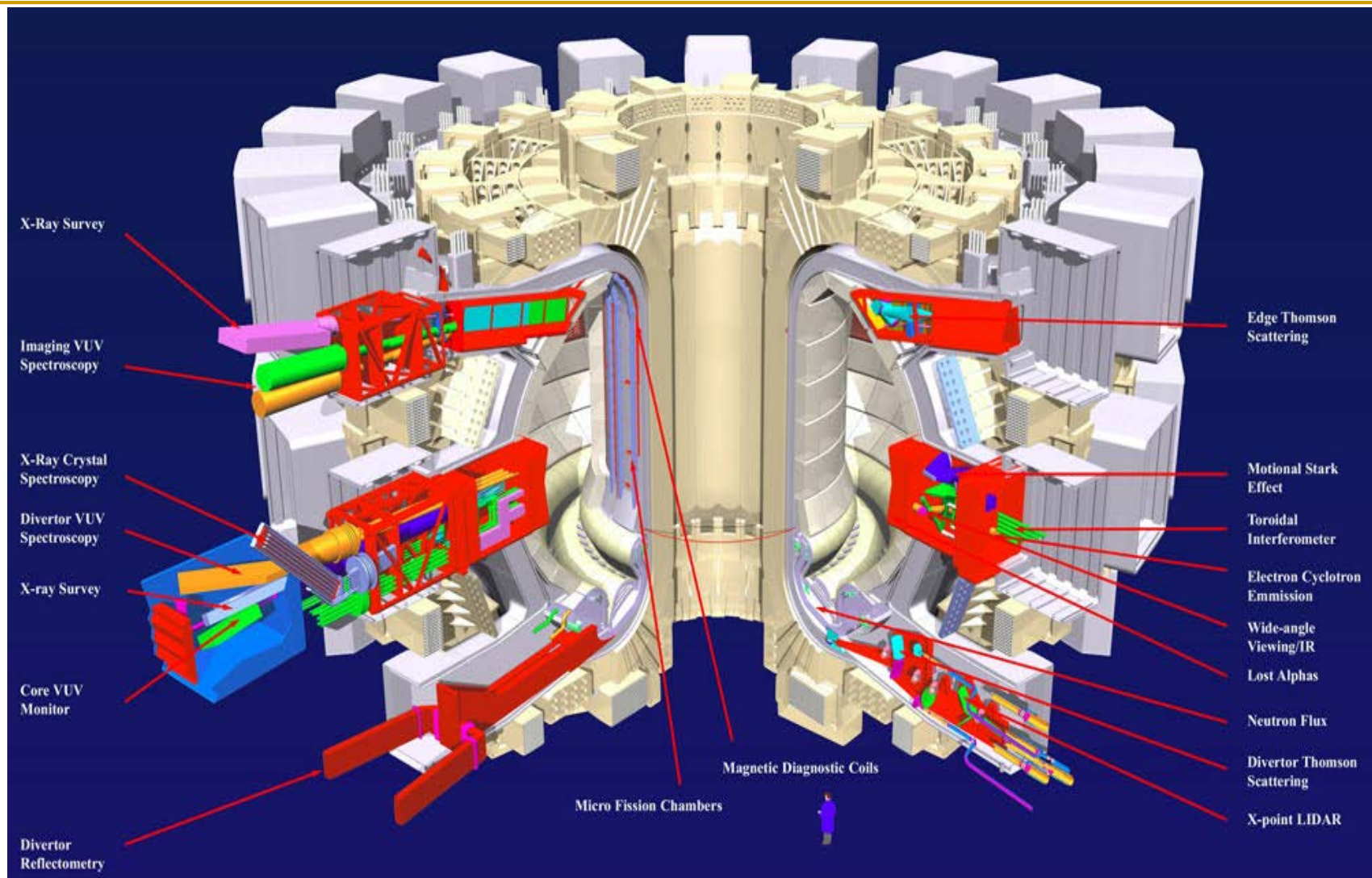
- Corrent poloïdal polsada (~ 1 s) \Rightarrow limitació d'operativitat.
- Calfament òhmic del corrent induït (\sim MA) en el plasma.
- Mètodes addicionals de calfament (10-100 keV) per mitjà d'injecció de:
 - Radiofreqüència (RF): la deriva dels electrons indueix un corrent toroïdal.
 - Feixos neutres (H o D): transferència d'energia de Coulomb, neutres per a no desviar-se.
- Sistemes auxiliars d'ignició (\sim desenes de MW), que una vegada iniciada no són necessaris ja que les partícules α de la reacció D-T supleixen el calfament necessari.

Projecte ITER

- <http://www.iter.org/>
- 'El camí', en llatí.
- Objectiu: demostrar la viabilitat, tant des del punt de vista científic com tecnològic, de la fusió
- Col·laboració Internacional



El plasma a alta temperatura (10^9 - 10^{10} K) es mantindrà, gràcies a potents camps magnètics, donant voltes en un toroide en el que s'ha practicat un alt buit.



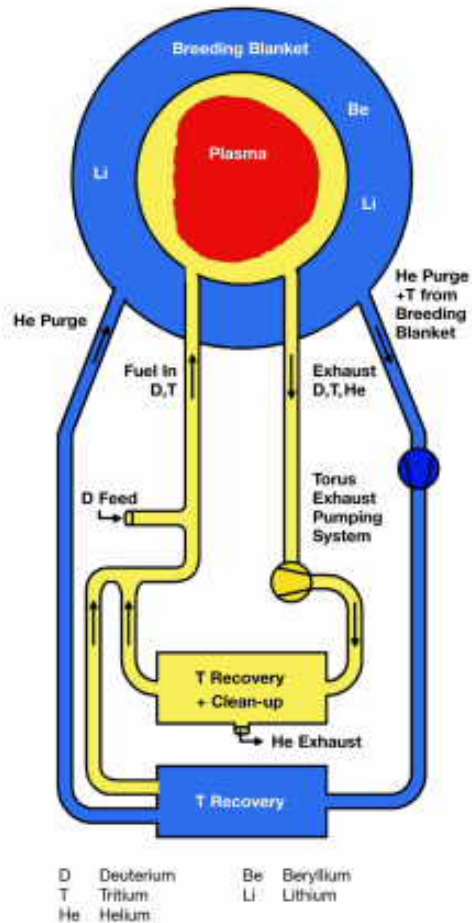
La fase de construcció s'espera concloure en el 2019, quan començarà la instal·lació del reactor. Els primers experiments amb plasma estan previstos pel 2020, i els experiments amb deuteri-triti pel 2027.

Cicle del reactor

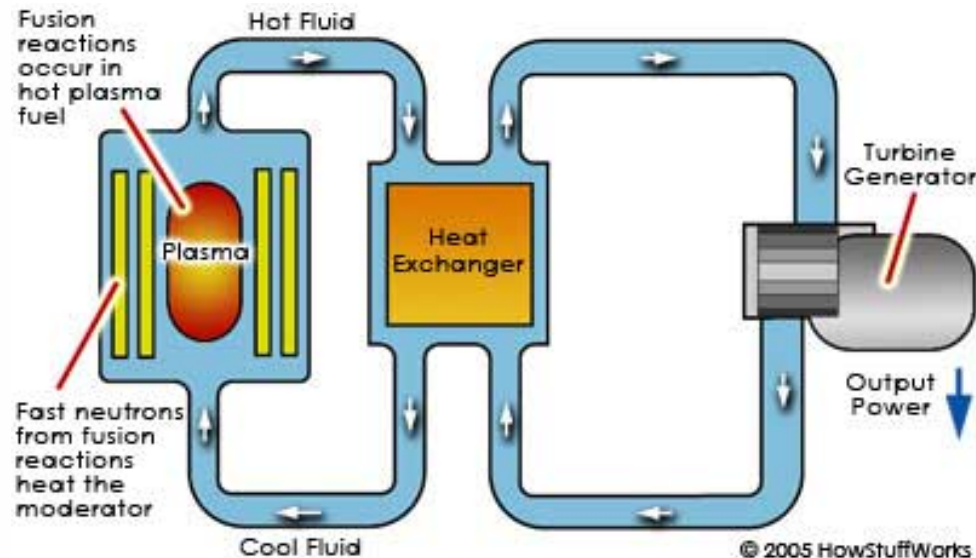
- En un reactor de fusió el combustible de deuteri i triti radioactiu es processa en un cicle tancat.
- Mentre que el deuteri es lliura des de fora, el triti es produeix per absorció de neutrons en liti ("bred", o "criat") en l'anomenat "blanket", que és una estructura de aproximadament 1 m de gruixuda que conté liti muntat sobre el costat de la cambra de reacció (cambra de buit) que mira al plasma.

- **El cicle de combustible es compon de dues parts:**

- A la part exterior (en blau) el triti criat s'extrau del blanket pel gas de purga d'heli i és separat successivament del gas en la planta de triti fora de la cambra de reacció.
- A la part interior (en groc) s'extrau l'heli "cendra" i el combustible no cremat i l'heli es separa. La mescla de deuteri/triti es barreja amb triti de la part exterior i el deuteri subministrat externament i tot s'injecta de nou al toroide.

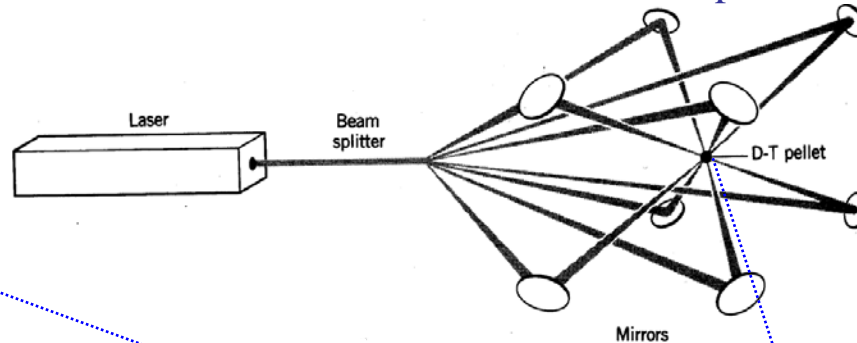
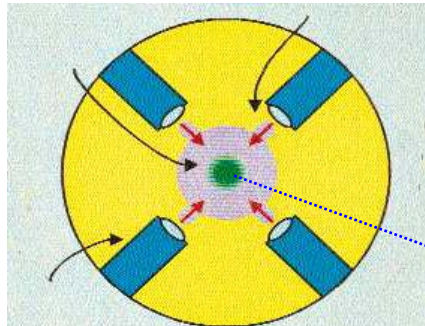


The fuel cycle of a fusion reactor



Confinament inercial

- Una càpsula de combustible contenint D i T és calfada i comprimida bombardejant-la simultàniament des de moltes direccions amb feixos intensos de fotons o partícules.



→ Radiation

→ Blowoff

→ Inward transported thermal energy



Laser beams or laser-produced x rays rapidly heat the surface of the fusion target, forming a surrounding plasma envelope.



Fuel is compressed by the rocketlike blowoff of the hot surface material.
(Compressional shock wave)

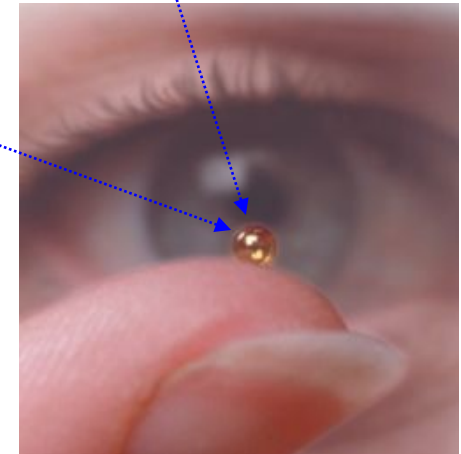


During the final part of the capsule implosion, the fuel core reaches 20 times the density of lead and ignites at 100,000,000°C.

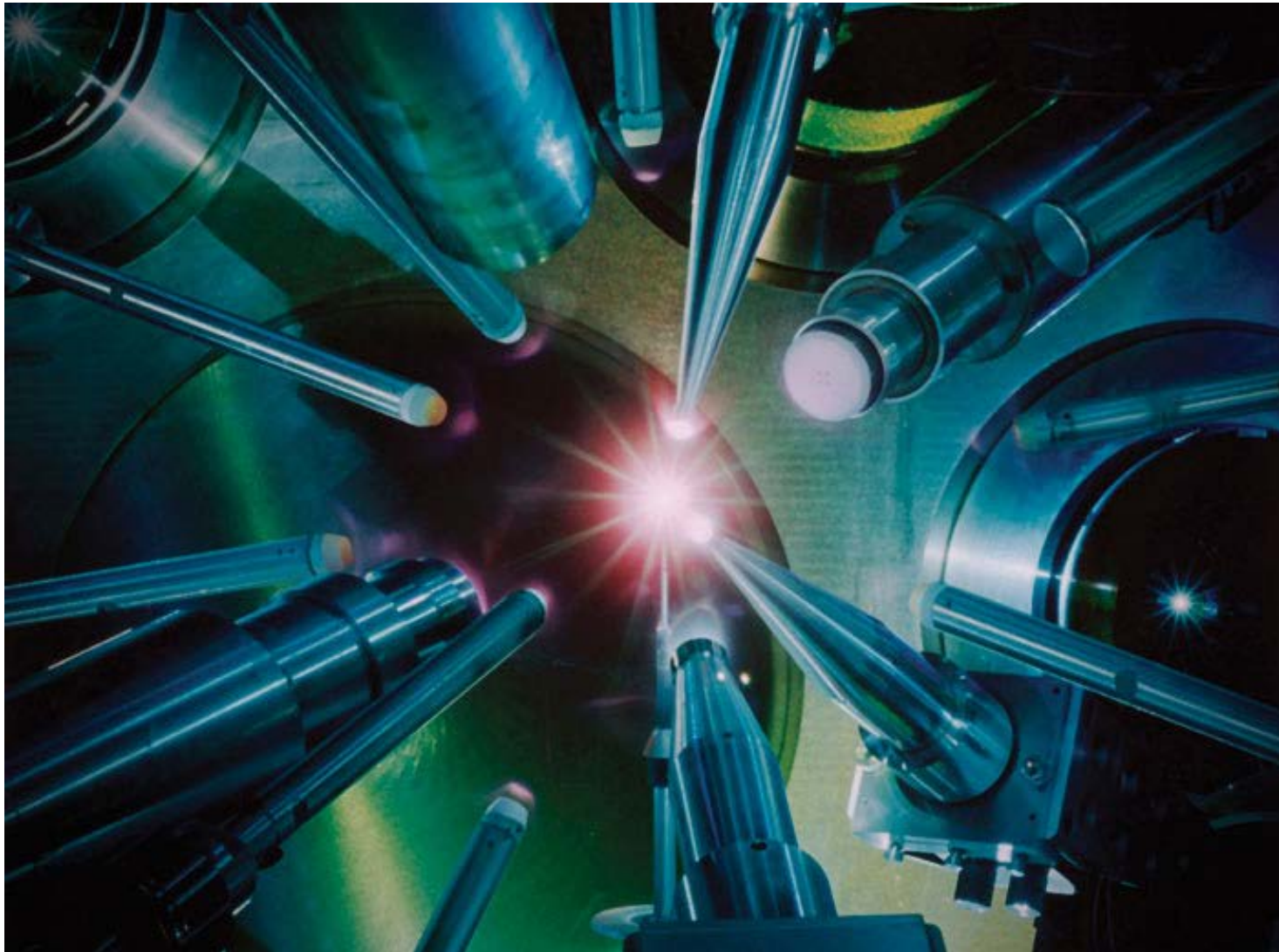


Thermonuclear burn spreads rapidly through the compressed fuel, yielding many times the input energy.

The α particles from first D-T reactions lose their energy in fuel, contributing to additional heating

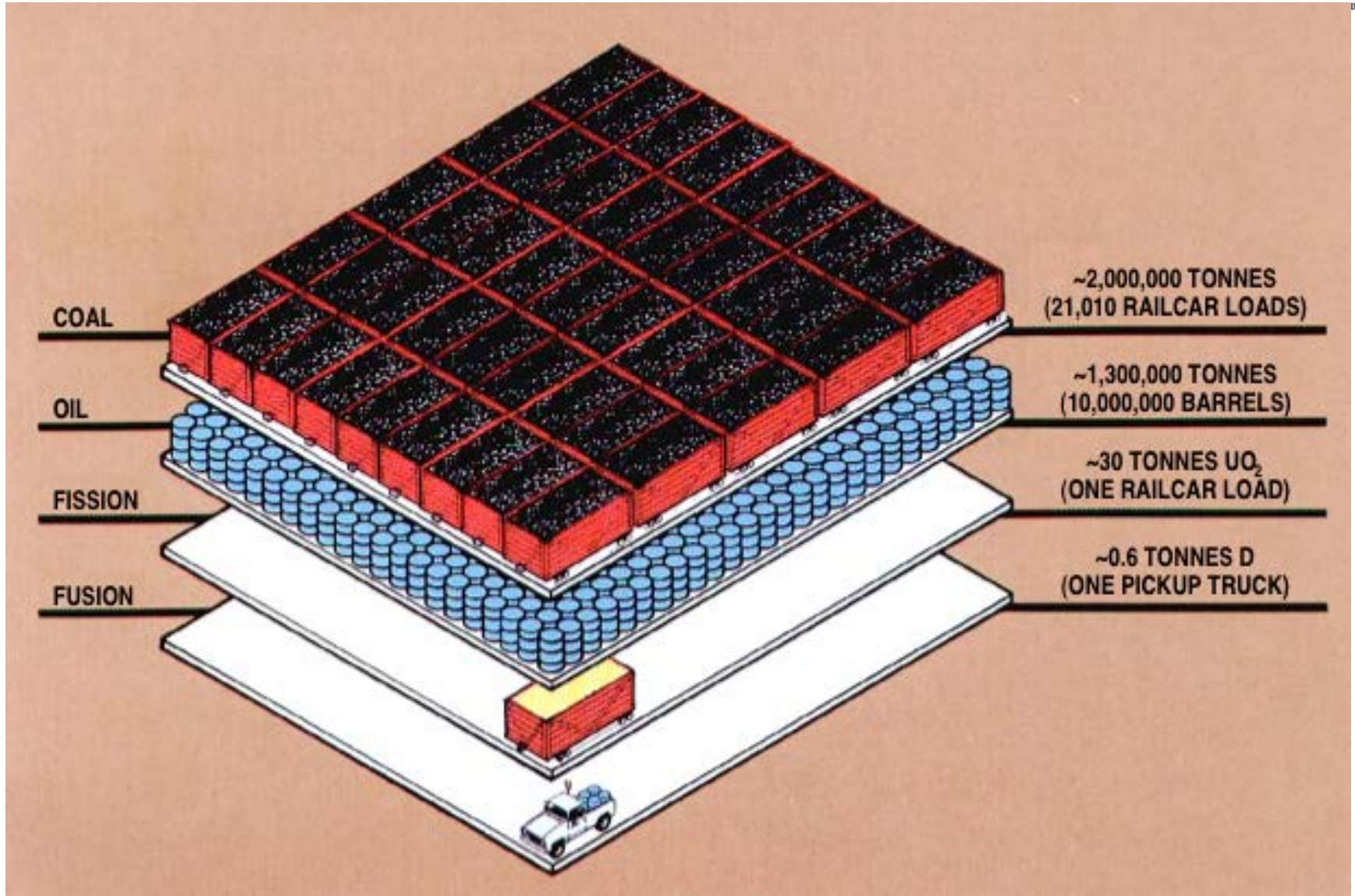


- Cicle: injecció de combustible, compressió, ignició, potència (com un motor de combustió interna...).



National Ignition Facility (NIF),
part del Lawrence Livermore National Laboratory, EEUU)

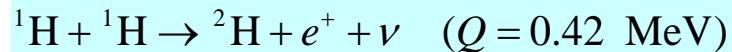
Comparació amb altres fonts energètiques (no renovables)



6. Nucleo-síntesi estel·lar

- Procés bàsic: Fusió de H per a donar He.
No hi ha neutrons!

Primer pas (lent, procés dèbil), constitueix el controlador de la reacció «coll de botella» que evita l'explosió estelar:



$$\sigma \sim 10^{-27} \text{ b} \quad T_p \sim \text{keV} \quad (\sigma \sim 10^{-23} \text{ b} \quad T_p \sim \text{MeV})$$

$$\text{Per al Sol: } n_p \sim 7.5 \times 10^{25} \text{ p/cm}^3 \quad N_p \sim 10^{56} \text{ p}$$

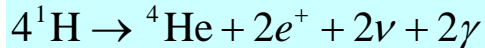
Velocitat de reacció:

$$\langle \sigma \phi \rangle \sim 5 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1} / p; \quad \langle \sigma \phi \rangle \sim 10^{38} \text{ s}^{-1}$$

$$\tau = 1 / \langle \sigma \phi \rangle \approx 7 \times 10^9 \text{ anys}$$

Es forma un deuteró per cada
 10^{18} protons cada segon.

Cicle protó-protó: resultat global ppI

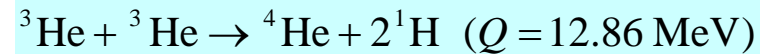
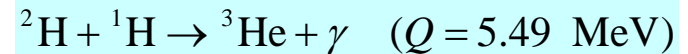


$$Q = 26.7 \text{ MeV}$$

$$(T_\nu)_{\text{max}} = 0.42 \text{ MeV}$$

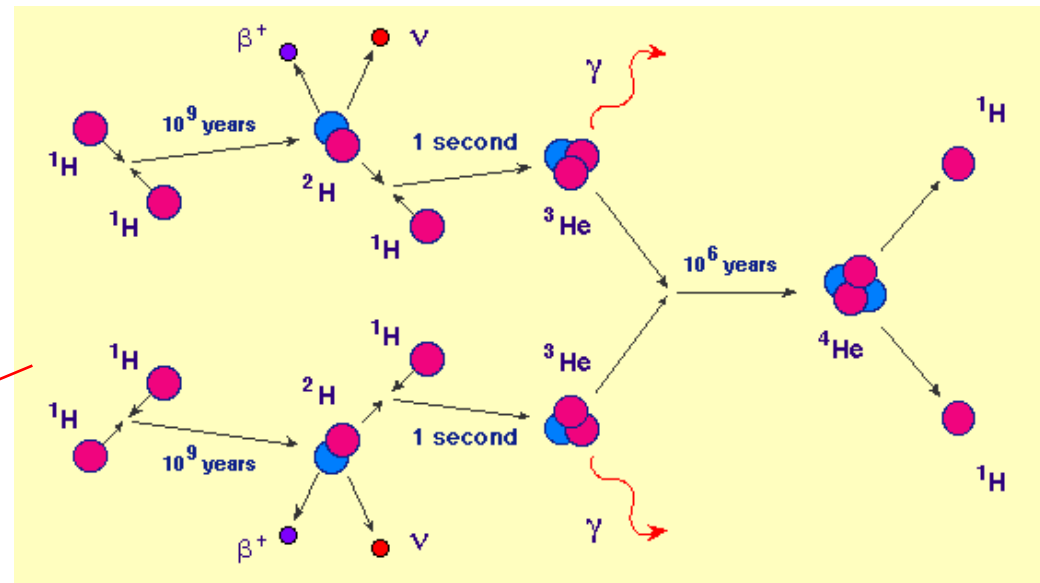
Els següents passos són molt més ràpids, doncs són per interacció forta:

$$\tau \approx 1.4 \text{ s}$$



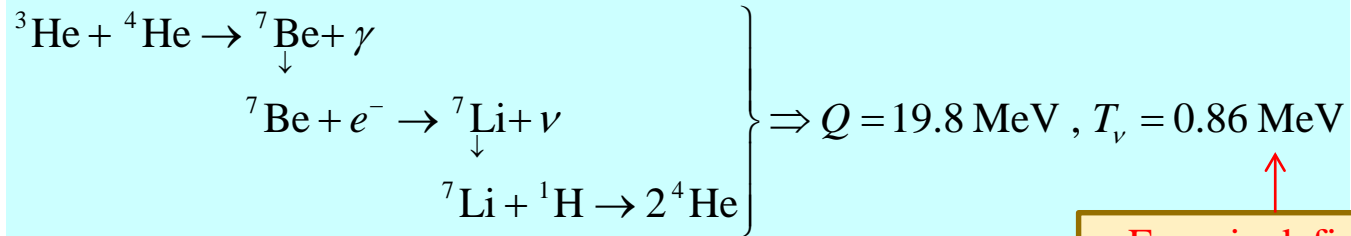
$$\tau \approx 2.4 \times 10^5 \text{ anys}$$

Procés que domina per a
temperatures $T \approx (10-14) \times 10^6 \text{ K}$



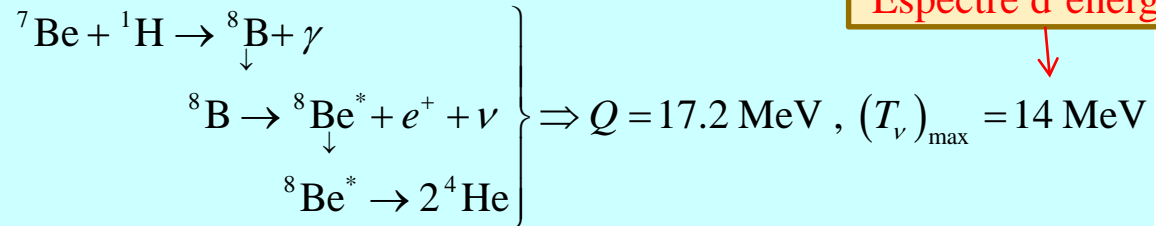
- El cremat del ^3He pot seguir **altres possibles camins**, depenent de la composició i temperatura de l'estrela:

ppII

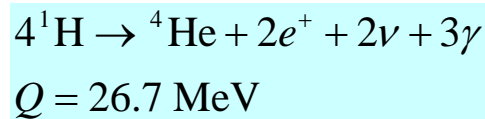


Energia definida.
Espectre d'energies.

ppIII

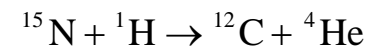
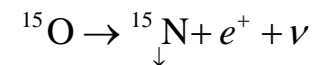
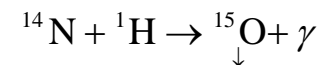
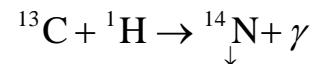
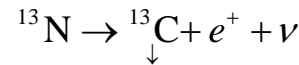
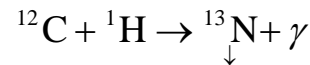


- Analitzant els neutrinos es pot determinar quin és el procés que ocorre (exp. de Davis).
- Un altre cicle possible de cremat de H per a produir heli utilitza el ^{12}C com a catalitzador (el propi ^{12}C ni es crea ni destrueix ← catalitzador de la reacció).

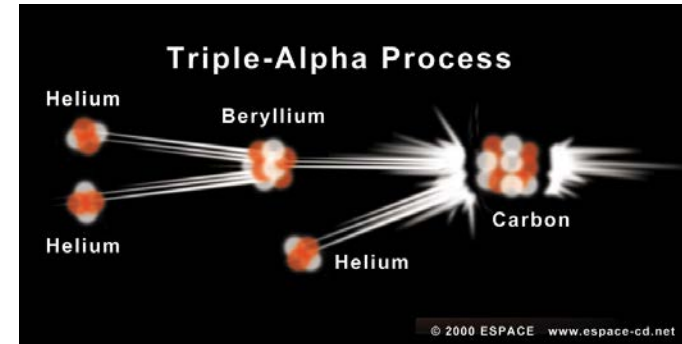
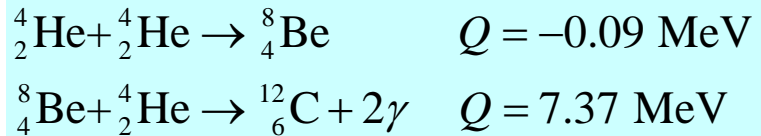


Cicle CNO ó del carbono

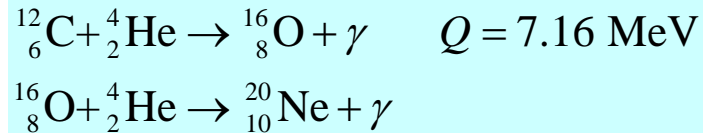
El cicle CNO no té el “coll de botella” de la producció de deuteri, però presenta una barrera de Coulomb 6-7 vegades major \Rightarrow serà dominant a temperatures més elevades: procés que competeix amb els anteriors.



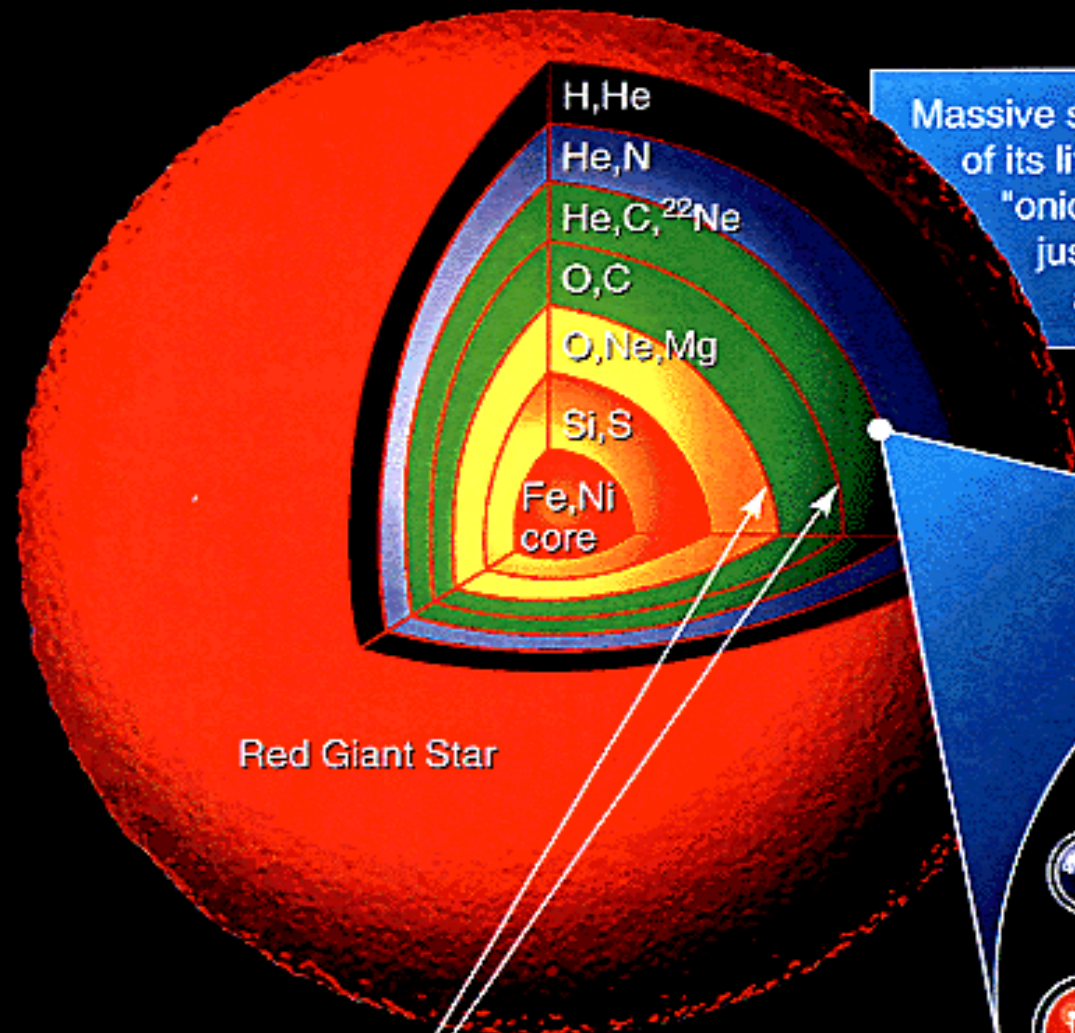
- Una vegada consumit el combustible d'hidrogen, si l'estrela és prou massiva, es contraurà i el seu nucli es calfarà a temperatura suficient perquè es pugui cremar l'heli (es supera l'increment de la barrera de Coulomb del He).
- El cremat de ${}^4\text{He}$ es produeix pel procés denominat de “triple alfa”:



- Quan s'ha cremat gran part del He, si l'estrela és prou massiva, es contrau novament i el seu nucli pot arribar a temperatura suficient per a iniciar el cremat de carboni:



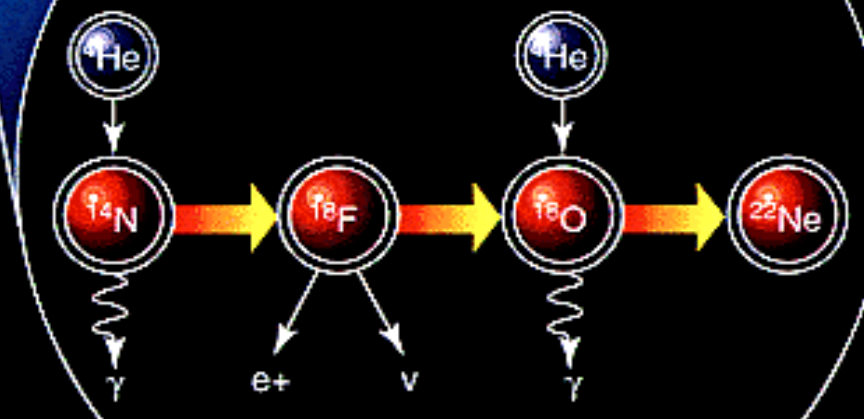
- Posteriorment, i si l'estrela és de nou prou massiva, el cicle continuarà i se n'aniran formant nuclis cada vegada més pesats fins a arribar al ${}^{56}\text{Fe}$, a partir del qual ja no hi ha guany d'energia.
- Este mecanisme permet entendre l'estructura de capes de les estrelles en funció de la pressió i la temperatura, així com les distintes categories d'estrelles i les abundàncies relatives dels diversos elements i isòtops nuclears.
- El nombre de capes d'una estrela depèn de la seua massa (veure figura).



Red Giant Star

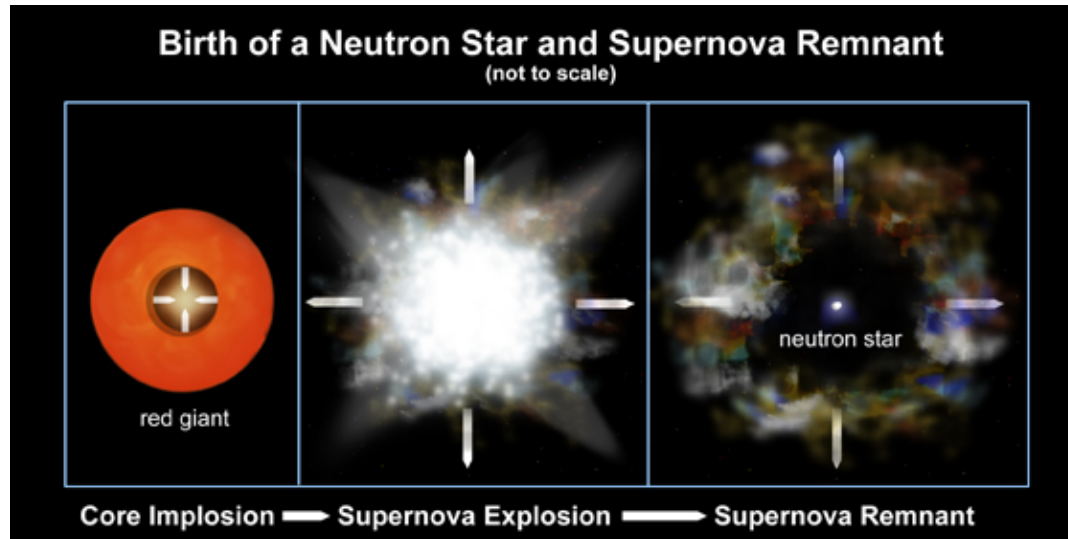
Massive star near the end of its lifetime has an "onion-like" structure just prior to exploding as a supernova

Nuclear burning occurs at the boundaries between zones



Example of nuclear reactions that build neutron-rich isotopes

- Si l'estrela és prou massiva ($>10 \times m_{\text{Sol}}$) arribarà un moment en què les reaccions de fusió (que originen una pressió de radiació oposada a la gravitatòria) ja no permetran oposar-se a l'atracció gravitatòria \Rightarrow Col·lapse gravitacional i posterior explosió de la supernova.



- Les capes externes són expulsades i queda una estrela d'una massa $1.4 \times m_{\text{Sol}}$, que pot ser una estrela de neutrons o un forat negre.
- En les supernoves, una gran part de la capa externa està formada per Fe. Les reaccions induïdes per neutrons i successives desintegracions β generen els nuclis més pesats que el Fe.

